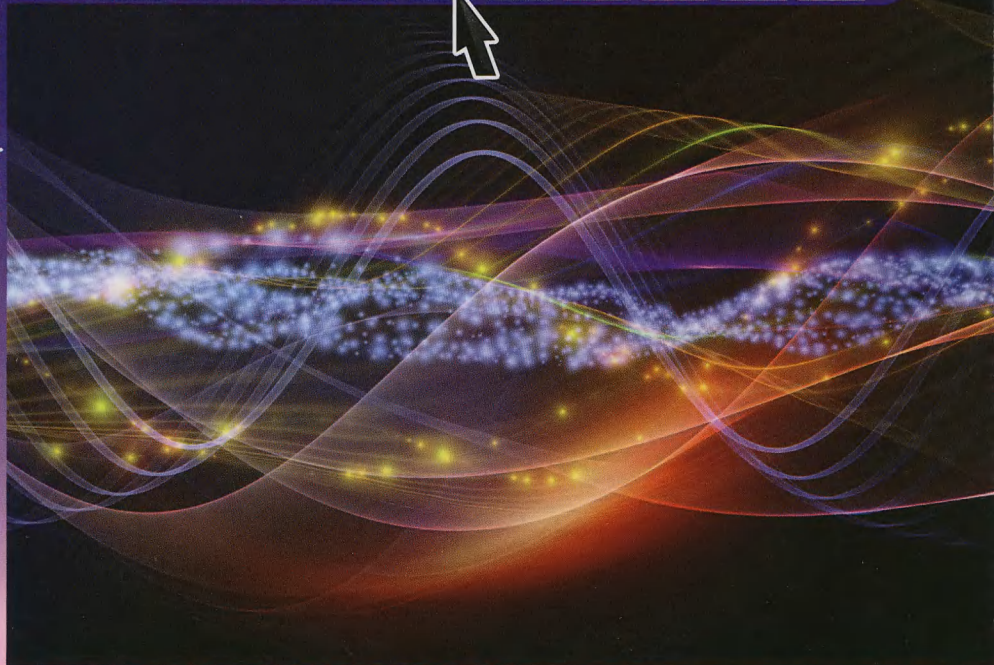


ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ДЛЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

СПЕЦИАЛЬНОСТЬ



ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

Б. И. Шахтарин



Б. И. Шахтарин

3-е издание

Б. И. Шахтарин

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

3-е издание

*Рекомендовано учебно-методическим объединением вузов
по университетскому образованию в качестве учебного пособия для
студентов высших учебных заведений*

**Москва
Горячая линия – Телеком
2015**



УДК 621.37:621.391

ББК 32.849

Ш32

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор *А. И. Козлов*;
доктор техн. наук, профессор *Н. Н. Удалов*

Шахтарин Б. И.

Ш32 Обнаружение сигналов. Учебное пособие для вузов. – 3-е изд.,
испр. – М.: Горячая линия–Телеком, 2015. – 464 с.: ил.
ISBN 978-5-9912-0395-1.

Рассмотрены основы теории обнаружения сигналов и ее основные направления от классического подхода, включая последовательное обнаружение, до разделов, касающихся обнаружения сигналов при априорной неопределенности, включая непараметрическое обнаружение (знаковые обнаружители, обнаружители Вилкоксона, Манна–Уитли и др. с примерами АОЭ обнаружителей) и адаптивный прием. Приводятся алгоритмы обнаружения случайных сигналов на основе приемников Стратоновича–Сосулина и приемника Швеппе. Рассмотрены обнаружители с постоянным уровнем ложной тревоги и примеры робастных обнаружителей.

Для студентов старших курсов и аспирантов.

ББК 32.841

Адрес издательства в Интернет WWW.TECHBOOK.RU

ISBN 978-5-9912-0395-1

© Б. И. Шахтарин, 2006, 2015

© Издательство Горячая линия–Телеком, 2015

Предисловие

В данном, третьем издании книги «Обнаружение сигналов» в основном сохранена структура первого издания. Как и в первом издании, рассмотрены основы теории обнаружения сигналов и ее основные направления от классического подхода, включая последовательное обнаружение, до разделов, касающихся обнаружения сигналов при априорной неопределенности, включая непараметрическое обнаружение (знаковые обнаружители, обнаружители Вилкоксона, Манна-Уитли и другие с примерами АОЭ обнаружителей), а также адаптивный прием сигналов.

Приводятся алгоритмы обнаружения случайных сигналов на основе приемника Стратоновича–Сосулина и приемника Швеппе.

В процессе работы над вторым изданием книги автором расширена глава 5 «Последовательное обнаружение» за счет материалов по вычислению АОЭ обнаружителей и усеченному последовательному анализу.

Переработана также глава 10 «Адаптивный прием сигналов».

Кроме того, добавлена глава 14 «Обнаружители с постоянным уровнем ложной тревоги» [ПУЛТ-процессоры (обнаружители), или CFAR-processors (receiver)] и глава 15 «Робастные методы фильтрации».

Автор благодарит за помощь в работе д.т.н., проф. В.И. Тихонова, д.т.н. В.В. Сизых, д.т.н., проф. В.И. Хименко, к.т.н., доц. И.В. Шитова, к.т.н., доц. М.С. Долгих, В.М. Зинченко, А.А. Бутенко, М.М. Трегубенко, которые не пожалели своих усилий и средств для обеспечения автора столь необходимой в работе над данным учебным пособием литературой. Вячеслав Максимович Зимчук поделился с автором своими результатами, использованными в главах шестой и девятой, и подарил книгу Gibson J.D., Melsa J.L. «Introduction to nonparametric detection with application», без которой было бы весьма затруднительно подготовить главу 9, а также снабдил автора копиями статей F.C. Schwegge, L.L. Scharf и некоторыми другими.

За вклад в издание книги автор приносит искреннюю благодарность Б.А. Атаянцу, А.А. Быкову, А.А. Бутенко, В.А. Шадрину, Д.И. Темирханову.

Автор искренне благодарен д.т.н., профессору Юрию Георгиевичу Сосулину за предоставленную им возможность использовать мате-

риалы его книги «Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов», без которых было бы трудно подготовить главы 10 и 13.

Автор благодарит к.т.н., доц. Ю.А. Сидоркину за набор нового материала книги.

За внимание к работе автор благодарит чл. корр. РАН И.Б. Фёдорова, к.т.н., доц. В.В. Зеленцова, к.т.н., доц. А.К. Ковальчука.

Особую благодарность автор выражает к.т.н., профессору Ю.Н. Чернышову за редактирование и верстку книги.

Автор благодарит рецензентов и д.ф-м. н. А.И. Козлова и д.т.н., проф. Н.Н. Удалова за благожелательные отзывы на данное учебное пособие.

Введение

Теории обнаружения сигналов посвящены многочисленные работы, включая монографии, учебные пособия и статьи.

Современные обзоры [1–3] составлены авторами, принимавшими непосредственное участие в разработке этой теории. Отметим, что перевод обзора [3] на русский язык представлен в Дополнении.

Классическая теория обнаружения и различения сигналов основана на работах [4–10] и на предшествующих им статьях [11, 12]. Очевидно, в нашем Отечестве работы [5–12] являются первыми, в которых систематизировано изложена классическая теория обнаружения сигналов. Дальнейшее развитие классическая теория получила в 60-х годах прошлого века [13–17]. Докторская диссертация В.А. Котельникова (1947 г.) – одна из первых в мире, которая до сих пор широко цитируется в России и в зарубежной литературе [1–3].

При написании первого раздела данного учебного пособия «Обнаружение и различение сигналов (классическая версия)» использовались в частности статьи и книги [18–26], а также другие источники, на которые имеются ссылки по мере изложения материала первого раздела.

При написании главы 5 «Последовательное обнаружение сигналов» использовались материалы [22, 27–29 и др.].

Материалы второго раздела «Обнаружения сигналов в условиях априорной неопределенности» основаны на [22, 28, 30–49].

В основе материалов третьего раздела «Обнаружение случайных сигналов» использованы книги [22, 24, 43, 50, 51] и статьи [3, 52, 53].

В данном пособии основное внимание уделяется алгоритмическим вопросам. Такие понятия, как равномерно наиболее мощный (РНМ) критерии, локально оптимальный (ЛО) обнаружитель и другие, связанные с общей теорией проверки гипотез практически не рассматриваются.

В области непараметрических методов обнаружения необходимо отметить работы П.С. Акимова, которые автор использовал при написании главы 9. П.С. Акимов (1931–2002) был не только выдающимся ученым МГТУ им. Н.Э. Баумана, но и признанным в России [44, 77] и за рубежом [96–105] как высококлассный и эрудированный специалист в области непараметрического обнаружения сигналов и оценки их параметров. Так, например, в библиографическом списке С.А. Кассамы

[48] имеются ссылки на 10 работ П.С. Акимова [96–105]. Следует отметить, что и в [95] также цитируются многие работы П.С. Акимова.

Безусловно, неоценим вклад в теорию обнаружения случайных сигналов Р.Л. Стратоновича, который разработал теорию нелинейной оптимальной фильтрации случайных сигналов и создал целое направление в этой теории [130, 133, 134, 139, 146 и др.]. Совместно с Ю.Г. Сосулиным им предложен нелинейный оптимальный приемник случайных сигналов, причем это сделано задолго до появления линейного приемника Швеппе [46].

В своей версии изложения данной темы автор старается придерживаться структуры замечательного обзора известных специалистов [3]. В этой связи добавлены две главы: глава 14 «Обнаружители с постоянным уровнем ложной тревоги» (ПУЛТ процессоры, или CFAR processors) и глава 15 «Робастные методы фильтрации», поскольку в последние 25 лет робастным методам обработки сигналов посвящено значительное число работ [112, 155 и др.].

Часть I

Обнаружение и различение сигналов (классическая версия)

*Посвящается светлой памяти
Ильи Николаевича Амиантова*

1 Проверка статистических гипотез при обнаружении (различении) сигналов

В данной главе рассматривается задача проверки двухальтернативных гипотез, а именно простейший случай проверки гипотез.

Пусть наблюдается некоторое событие, которое может быть порождено одной из двух взаимно исключающих друг друга причин Π_0 или Π_1 . Гипотеза о том, что событие обусловлено первой из двух причин, обозначается через H_0 , а гипотеза о том, что событие обусловлено второй причиной, — через H_1 . Требуется установить подходящее правило для выбора между гипотезами H_0 и H_1 и тем самым принять решение о том, которая из двух причин наблюдаемого события в каком-то смысле (по сформулированному критерию) более правдоподобна. Данные измерений (выборки) x на основе которых принимается решение, могут быть одномерными (скалярными) или многомерными (векторными). Все пространство данных делится на две области R_0 и R_1 . Правило выбора $D(x)$ гипотезы определено, если определено одно из множеств R_0 или R_1 , так что $R_0 \cup R_1 = R$, $R_0 \cap R_1 = \emptyset$. Обычно проверка гипотез рассматривается с точки зрения одной из гипотез, например H_0 . Тогда R_0 называется областью принятия гипотезы, а R_1 — областью отвергания гипотезы (или критической областью). Если результаты измерения попадают в область R_0 ($x \in R_0$), то принимается решение D_0 о том, что справедлива гипотеза H_0 ; аналогично при ($x \in R_1$) принимается решение D_1 о том, что справедлива гипотеза H_1 .

Если наблюдаемое значение x попадает в R_1 так, что отвергается гипотеза H_0 , а на самом деле H_0 является истинной, то говорят, что допущена ошибка первого рода, ее вероятность обозначается через $P(D_1 | H_0) = Q_0$. Если x попадает в R_0 , а правильной является H_1 , то говорят об ошибке второго рода с вероятностью $P(D_0 | H_1) =$

$= Q_1$. При этом вероятность $Q_0 = P(D_1 | H_0)$ называется уровнем значимости или объемом критерия. Вероятность $P(D_1 | H_1) = 1 - P(D_0 | H_1)$ отождествляется с мощностью критерия.

В радиолокации ошибка первого рода называется ложной тревогой, $P(D_1 | H_0) = Q_0 = P_{\text{лт}}$ — вероятность ложной тревоги (ВЛТ); ошибка второго рода называется пропуском сигнала, $P(D_0 | H_1) = Q_1$ — вероятность пропуска сигнала. Мощность критерия называется вероятностью обнаружения сигнала

$$Q_d = P(D_1 | H_1) = 1 - P(D_0 | H_1). \quad (1.1)$$

В рассматриваемой бинарной задаче существует несколько способов для определения «наилучшей» стратегии в терминах вероятностей обнаружения и ложной тревоги. Одним из наиболее известных и используемых в радиолокации является критерий Неймана–Пирсона, который на языке математической статистики определяет критерий выбора между H_0 и H_1 , обладающий максимальной мощностью из всех критериев с уровнем значимости, не большим заданного значения, или иначе в терминах радиолокации: по критерию Неймана–Пирсона максимизируется вероятность обнаружения (1.1) при сохранении вероятности ложной тревоги Q_0 на заранее заданном уровне, т.е. решается задача

$$\max_{D(x)} = P(D_1 | H_1); \quad P(D_1 | H_0) \leq P_{\text{лт}}, \quad (1.2)$$

где $D(x)$ обозначает правило решения.

Вместе с тем критерий Неймана–Пирсона в другой формулировке предписывает добиваться минимума вероятности пропуска сигнала при ограничении сверху на вероятность ложной тревоги. Таким образом, решается задача

$$D(x) = P(D_0 | H_1); \quad P(D_1 | H_0) \leq P_{\text{лт}}. \quad (1.3)$$

Однако наиболее общей наилучшей стратегией выбора между гипотезами является байесовское решение (правило Байеса), из которого вытекают другие критерии, в том числе и критерий Неймана–Пирсона.

Допустим, что за ошибку первого рода наблюдатель платит штраф C_0 , а за ошибку второго рода — штраф C_1 , при этом величина $C_0 Q_0$ называется риском, соответствующим гипотезе H_0 , тогда $C_1 Q_1$ — риск, соответствующий гипотезе H_1 .

Средний риск при принятии решения

$$\bar{C} = \pi_0 C_0 Q_0 + \pi_1 C_1 Q_1, \quad (1.4)$$

где π_0 и π_1 — априорные вероятности гипотез, причем $\pi_0 + \pi_1 = 1$.

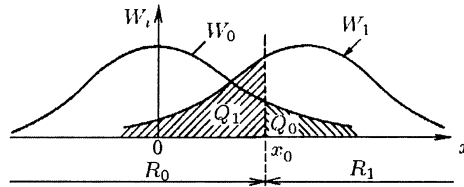


Рис. 1.1

Наблюдатель должен выбрать такую стратегию (правило Байеса), которая минимизировала бы средний риск. Минимальное значение среднего риска $\bar{C} = \bar{C}$ называется *байесовским риском*.

Далее для того чтобы найти границу раздела областей R_0 и R_1 , необходимо предположить наличие ПРВ $W_0(x)$ и $W_1(x)$, $x \in R$, каждая из которых определяет вероятностный закон, соответствующий одной из двух взаимно исключающих друг друга причин.

Задача состоит в установлении разумного правила выбора между H_0 и H_1 . Это означает, что пространство R надо разделить на две области R_0 и R_1 так, чтобы для всякого отсчета x можно было сказать, какая из двух причин считается действительно имеющей место. В случае скалярных (одномерных) данных, требуется найти величину $x = x_0$ (рис. 1.1), разделяющую области R_0 и R_1 .

При найденном значении $x = x_0$

$$Q_0 = P(D_1 | H_0) = \int_{R_1} W_0(x) dx = \int_{x_0}^{\infty} W_0(x) dx; \quad (1.5)$$

$$Q_1 = P(D_0 | H_1) = \int_{R_0} W_1(x) dx = \int_{-\infty}^{x_0} W_1(x) dx; \quad (1.6)$$

$$Q_d = P(D_1 | H_1) = \int_{R_1} W_1(x) dx = \int_{x_0}^{\infty} W_1(x) dx. \quad (1.7)$$

Критерий Неймана-Пирсона (1.2) записывается в виде

$$\begin{aligned} \max P(D_1 | H_1) &= \max \int_{R_1} W_1(x) dx; \\ P(D_1 | H_0) &= \int_{R_1} W_0(x) dx \leq P_{\text{лт}}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Согласно байесовскому решению должно выполняться условие минимума среднего риска, когда граничное значение x_0 находится из уравнения

$$\frac{d\bar{C}(x_0)}{dx_0} = 0,$$

где

$$\bar{C}(x_0) = \pi_0 C_0 \int_{x_0}^{\infty} W_0(x) dx + \pi_1 C_1 \int_{-\infty}^{x_0} W_1(x) dx.$$

Тогда, дифференцируя интегралы с переменными пределами, получим

$$\frac{d\bar{C}(x_0)}{dx_0} = -\pi_0 C_0 W_0(x_0) + \pi_1 C_1 W_1(x_0) = 0. \quad (1.9)$$

Отсюда получаем уравнение для получения x_0 :

$$\frac{W_1(x_0)}{W_0(x_0)} = \frac{\pi_0 C_0}{\pi_1 C_1} = \Lambda_0. \quad (1.10)$$

Величина $\Lambda(x) = \frac{W_1(x)}{W_0(x)}$ называется отношением правдоподобия (ОП).

Байесовское решение:

$$\begin{aligned} \text{при } \Lambda(x) > \Lambda_0 & \text{ принимается гипотеза } H_1; \\ \text{при } \Lambda(x) < \Lambda_0 & \text{ принимается гипотеза } H_0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Критерий отношения правдоподобия является частным случаем байесовского решения:

при $\Lambda(x) > 1$ принимается гипотеза H_1 ;

при $\Lambda(x) < 1$ принимается гипотеза H_0 .

Этим реализуется принцип наибольшего правдоподобия.

Более общим, чем критерий отношения правдоподобия, критерием является критерий максимума апостериорной вероятности (МАВ) (англ.: maximum a posteriori probability (MAP)). Если обозначить апостериорные вероятности причин Π_0 и Π_1 через $P(\Pi_0 | x)$ и $P(\Pi_1 | x)$, то критерий МАВ принимает вид

$$P(\Pi_1 | x) > P(\Pi_0 | x) \quad (1.12)$$

в том случае, когда принимается гипотеза H_1 , в противном случае принимается гипотеза H_0 .

Можно показать справедливость соотношения [7, 8]

$$\frac{P(\Pi_1 | x)}{P(\Pi_0 | x)} = \frac{\pi_1 W_1(x)}{\pi_0 W_0(x)}. \quad (1.13)$$

Следовательно, критерий МАВ является частным случаем байесовского критерия (1.11) при $C_1 = C_0$:

следует выбирать гипотезу H_1 , если $\Lambda(x) = \frac{W_1(x)}{W_0(x)} > \frac{\pi_0}{\pi_1} = \Lambda_0$;

и выбирать гипотезу H_0 , если $\Lambda(x) < \frac{\pi_0}{\pi_1}$. (1.14)

В системах связи обычно не разделяют ошибки двух типов, а вычисляют полную вероятность ошибки

$$\begin{aligned} P_{\text{ош}} &= P(H_0)P(D_1 | H_0) + P(H_1)P(D_0 | H_1) = \pi_0 Q_0 + \pi_1 Q_1 = \\ &= \pi_0 \int_{R_1} W_0(x) dx + \pi_1 \int_{R_0} W_1(x) dx = \\ &= \pi_0 \int_{x_0}^{\infty} W_0(x) dx + \pi_1 \int_{-\infty}^{x_0} W_1(x) dx. \end{aligned} \quad (1.15)$$

В качестве следующего критерия проверки гипотез может быть принят критерий идеального наблюдателя, который минимизирует вероятность полной ошибки $P_{\text{ош}}$. Из условия $dP_{\text{ош}}/dx_0 = 0$, как и в случае (1.9), приходим к соотношениям (1.14), следовательно, критерий идеального наблюдателя эквивалентен критерию МАВ.

Вывод. Приведенные четыре критерия (критерии Байеса, отношение правдоподобия, МАВ, идеального наблюдателя) отличаются друг от друга лишь величиной порога Λ_0 , с которым сравнивается отношение правдоподобия $\Lambda(x)$.

Пример 1.1. Пусть наблюдается случайная величина

$$x = m + n, \quad (1.16)$$

где n — СВ, распределенная по закону Гаусса $N(0, \sigma_n^2)$, величина m может принимать два значения a_0 и a_1 ($a_1 > a_0$). Тогда

$$W_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left[-\frac{(x - a_i)^2}{2\sigma_n^2} \right], \quad i = 0, 1. \quad (1.17)$$

Найти вероятности Q_0 , Q_1 и Q_d .

Решение. Выберем критерий МАВ.

Согласно критерию МАВ или критерию идеального наблюдателя (1.14), минимизирующего полную вероятность ошибки принимается гипотеза $H_1 : m = a_1$, если

$$\Lambda_1(x) = \pi_1 W_1(x) / [\pi_0 W_0(x)] > 1,$$

или в силу монотонности функции этот критерий эквивалентен неравенству для логарифма ОП (ЛОП)

$$\ln \Lambda_1(x) > 0.$$

Используя (1.17) при $a_1 > a_0$, приходим к правилу выбора H_1 : $m = a_1$, если

$$x > x_0 = [\sigma_n^2 / (a_1 - a_0)] \ln(\pi_0 / \pi_1) + (a_1 + a_0) / 2. \quad (1.18)$$

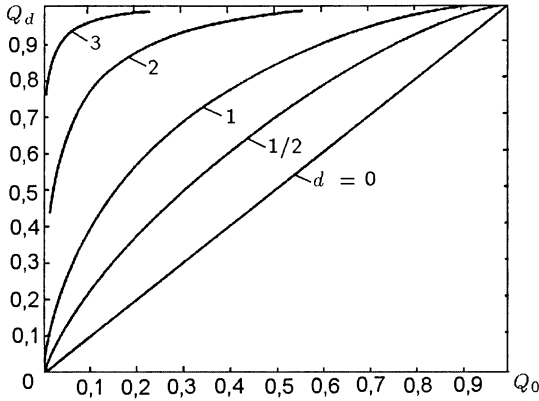


Рис. 1.2

Вероятности ошибок первого и второго рода принимают вид

$$\begin{aligned}
 Q_0 &= P(D_1 | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_{x_0}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - m_0)^2}{2\sigma_n^2} \right] dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_0}^{\infty} e^{-u^2/2} du = Q(u_0) = \operatorname{erfc} u_0 = 0,5 - \psi(u_0); \quad (1.19) \\
 u_0 &= \frac{1}{d} \ln \frac{\pi_0}{\pi_1} + \frac{d}{2}; \quad d = \frac{a_1 - a_0}{\sigma_n}; \quad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-u^2/2} du;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= P(D_0 | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \int_{-\infty}^{x_0} \exp \left[-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma_n^2} \right] dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_1} e^{-u^2/2} du = \Phi(u_1) = 0,5 + \psi(u_1); \quad (1.20)
 \end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{1}{d} \ln \frac{\pi_0}{\pi_1} - \frac{d}{2} = u_0 - d.$$

Иначе вероятность ложной тревоги (ВЛТ) Q_0 и вероятность обнаружения Q_d можно записать в виде:

$$Q_0 = Q(x); \quad Q_d = Q(x - d), \quad (1.21)$$

где $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du = 1 - \Phi(x)$; $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$.

Параметр d принимается за ОСШ.

Зависимость $Q_d = f(Q_0)$ при $d = \text{const}$ называется рабочей характеристикой приемника (РХП) (рис. 1.2). Зависимость вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ (1.15) от ОСШ d при $\pi_0 = \text{const}$ ($\pi_1 = \text{const}$) изображена на рис. 1.3. При равенстве априорных вероятностей $\pi_0 = \pi_1 = 1/2$ с учетом равенства $\psi(-d/2) = -\psi(d/2)$ по (1.19) и (1.20) находим

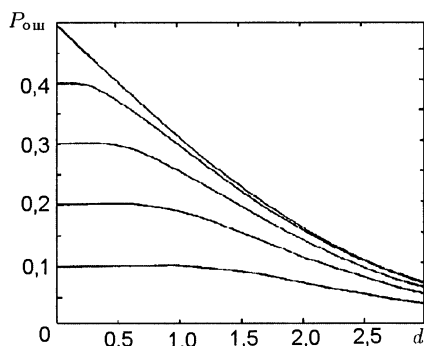


Рис. 1.3

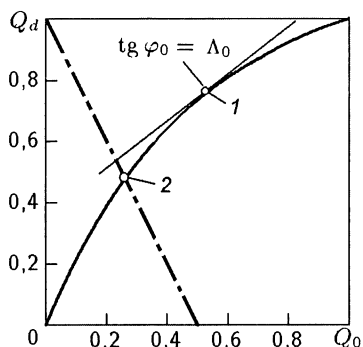


Рис. 1.4

$Q_0 = Q_1$, поэтому по (1.15) получим

$$P_{\text{ош}} = Q_0 = Q_1 = \text{erfc}(d/2) = Q(d/2), \quad (1.22)$$

что соответствует верхней кривой рис. 1.3. При $d = 0$ по (1.15) следует $P_{\text{ош}} = \pi_1$.

Теорема Неймана–Пирсона утверждает, что принцип наибольшего правдоподобия удовлетворяет критерию (1.2), а именно, если η — действительное неотрицательное число, то критическая область $R_1(\eta)$, состоящая из всех x , для которых $W_1(x)/W_0(x) \geq \eta$, определяет критерий выбора между гипотезами H_0 и H_1 , обладающий максимальной мощностью из всех критериев с уровнем значимости $Q_0 \leq Q_0(R_1(\eta))$. Доказательство теоремы приводится в [7].

Таким образом, критерий Неймана–Пирсона отличается от других критериев, перечисленных в выводе, лишь величиной порога $\eta = \Lambda_0$.

Поскольку справедливо равенство [8, 13] (рис. 1.3)

$$\left. \frac{dQ_d}{dQ_0} \right|_{x=x_0} = \Lambda_0, \quad (1.23)$$

то в отличие от других упомянутых критериев в критерии Неймана–Пирсона величина порога Λ_0 зависит от ОСШ и находится в точке касания к РХП (при заданной вероятности $Q_0 = P_{\text{лт}}$) прямой с углом наклона φ_0 , таким, что (рис. 1.4)

$$\text{tg } \varphi = \Lambda_0. \quad (1.24)$$

По известной РХП (рис. 1.2) могут быть вычислены характеристики обнаружения (рис. 1.5), причем при $d = 0$ $Q_d = Q_0$ (ср. (1.19) и (1.20))

$$Q_d = f(d) \text{ при } Q_0 = P_{\text{лт}} = \text{const}. \quad (1.25)$$

При заданной вероятности $Q_d = Q_{d1}$ по характеристике обна-

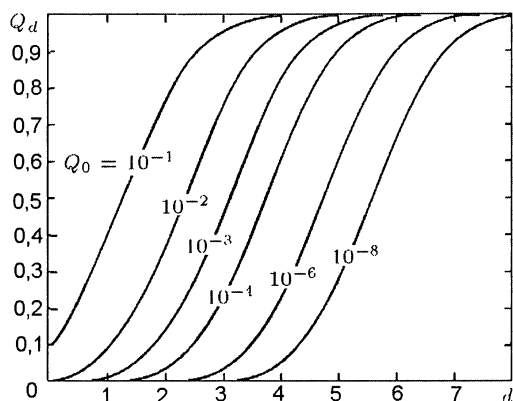


Рис. 1.5

ружения (при $Q_0 = P_{\text{лт}} = \text{const}$ находится пороговое ОСШ $d = d$, обеспечивающее данную вероятность обнаружения Q_d . Найденному значению d и заданной вероятности $Q_0 = P_{\text{лт}}$ на известной РХП при $d = d$ находится рабочая точка, в которой тангенс угла φ_0 наклона касательной к РХП определяет необходимую величину порога Λ_0 .

В условиях примера 1.1

$$Q_0 = P(D_1 | H_0) = \int_{x_0}^{\infty} W_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(x_0 - a_0)/\sigma_n}^{\infty} e^{-u^2/2} du = P_{\text{лт}}. \quad (1.26)$$

Пример 1.2. Пусть задана вероятность ложной тревоги $P_{\text{лт}} = 10^{-6}$ и ОСШ $d = 5$. Найти вероятность Q_d и порог x_0 .

Решение. По кривой обнаружения рис. 1.5 находим вероятность обнаружения $Q_d = 0,6$. Определим, кроме того, порог x_0 . По (1.26) при $P_{\text{лт}} = 10^{-6}$ находим (по таблице) $(x_0 - a_0)/\sigma_n = 4,75$. Если, например, положить $a_0 = 1$, $\sigma_n = 0,25$, то получим $x_0 = 2,19$ и, следовательно, критическая область R_1 определяется неравенством $x > 2,19$.

Пример 1.3. Пусть $\pi_0 = \pi_1 = 0,5$, $\sigma_n = 1$, $m = 0$, либо $m = 1$. Найти вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$.

Решение. Случайная величина (1.16) является гауссовской со средним значением 0 или 1 для гипотез H_0 и H_1 соответственно.

По критерию минимума вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ по (1.14) находим

$$\Lambda(x) = \frac{W_1(x)}{W_0(x)} > 1.$$

Отсюда следует ЛОП

$$\ln \Lambda(x) = -\frac{(x-1)^2}{2\sigma_n} + \frac{x^2}{2\sigma_n^2} > 0.$$

или эквивалентно $x = x_0 = 1/2$. Тогда

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0,5}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \operatorname{erfc} 0,5 = 0,5 - \psi(0,5) = 0,309.$$

По (1.22) $Q_1 = Q_0 = 0,309$ и вероятность ошибки

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2}Q_0 + \frac{1}{2}Q_1 = 0,309.$$

По рис. 1.3 при $\pi_0 = \pi_1 = 0,5$, используя верхнюю кривую при $P_{\text{ош}} = 0,31$, находим $d = 1$, как и должно быть согласно условию $m/\sigma_n = 1$.

Минимаксный критерий

При неизвестных априорных вероятностях π_0 и π_1 байесовское решение (1.11) найти невозможно. В этом случае критерий минимального среднего риска следует заменить на минимаксный критерий. Согласно этому критерию наблюдатель должен использовать байесовскую стратегию, соответствующую такому значению априорной вероятности $\pi_0 = \xi$, для которого байесовский риск максимален (байесовским риском называется минимальное значение среднего риска $\bar{C} = \bar{C}$). Зная ξ , которым пользуется природа (или другой противник), наблюдатель применил бы байесовское решение, соответствующее этому значению ξ , и его потери были бы равны байесовскому риску $\bar{C}(\xi)$ (рис. 1.6, кривая 2). Когда наблюдатель использует байесовское решение для априорной вероятности $\xi = \xi_1$, а природа пользуется другим значением ξ , то средние потери наблюдателя (не минимальные) описываются прямой, касательной к графику кривой $\bar{C}(\xi)$ в точке $\xi = \xi_1$ (рис. 1.6, штриховая линия 1). Уравнение прямой имеет вид

$$\bar{C} = \bar{C}(\xi) = \xi C_0 Q'_0 + (1 - \xi) C_1 Q'_1, \quad (1.27)$$

где $Q'_0 = Q_0(\xi_1)$; $Q'_1 = Q_1(\xi_1)$.

Потери при этом могут быть достаточно большими, но если наблюдатель использует байесовское решение для значения $\xi = \xi_0$, при котором байесовский риск (рис. 1.6, штрихпунктирная линия) $\bar{C}(\xi)$ максимален и прямая (1.27) горизонтальна, то он уверен, что его потери не будут превышать $\bar{C}(\xi_0)$ независимо от величины ξ , которую выбирает природа (противник). Байесовская стратегия для $\xi = \xi_0$ называется минимаксной стратегией, а величина $\bar{C}(\xi_0)$ — минимаксным риском.

Пример 1.4. В условиях примера 1.1 положим H_0 : $m = 0$, H_1 : $m = 1$, $\sigma_n = 1$. Пусть кроме того, штрафы $C_0 = 1$; $C_1 = C$. Найдите величину порога и \bar{C} .

Решение. По (1.9) $\Lambda_0 = \pi_0/(C\pi_1)$, и из условия

$$\Lambda_2(x) = \frac{\pi_1 C_1 W_1(x)}{\pi_0 C_0 W_0(x)} = \frac{\pi_1 C W_1(x)}{\pi_0 W_0(x)} = 1$$

получим значение порога

$$x_0 = 0,5 + \ln[\pi_0/(C\pi_1)] = 0,5 + \ln \left[\frac{\xi}{C(1-\xi)} \right]. \quad (1.28)$$

При этом байесовский риск принимает вид

$$\bar{C}(\xi) = \xi Q_0(\xi) + C(1-\xi)Q_1(\xi), \quad (1.29)$$

где

$$Q_0(\xi) = P(D_1 | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0(\xi)}^{\infty} e^{-u^2/2} du;$$

$$Q_1(\xi) = P(D_0 | H_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0(\xi)} e^{-(u-1)^2/2} du.$$

График байесовского риска $\bar{C}(\xi)$ изображен на рис. 1.6 при $C = 2$ (кривая 2). В данном случае $\xi_0 = 0,6$ и минимаксный риск $\bar{C}(\xi_0) = \bar{C}(0,6) = 0,42$. Уравнение прямой (1.27) среднего (не минимального) риска принимает вид

$$\bar{C} = \bar{C}(\xi) = \xi P(D_1 | H_0, \xi_1) + C(1-\xi)P(D_0 | H_1, \xi_1). \quad (1.30)$$

График прямой изображен на рис. 1.6 штриховой линией при $C = 2$; $\xi_1 = 0,3$. Прямая касается кривой байесовского риска $\bar{C}(\xi)$ в точке $\xi = \xi_1 = 0,3$. Минимаксные потери обозначены на рис. 1.6 штрихпунктирной прямой параллельной оси абсцисс и касающейся кривой $\bar{C}(\xi)$ в точке $\xi = \xi_0 = 0,6$.

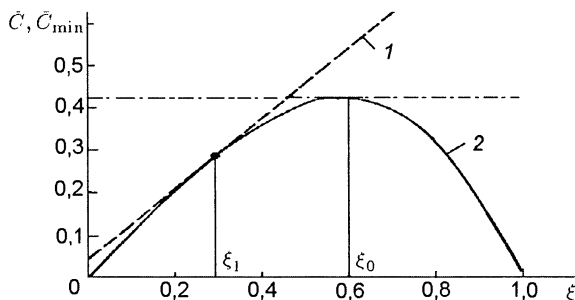


Рис. 1.6

Дифференцируя средний риск (1.4) по ξ и приравнявая производную нулю, получим $d\bar{C}(\xi)/d\xi = 0$, или

$$C_0 Q_0(x_0) = C_1 Q_1(x_0). \quad (1.31)$$

Таким образом, минимаксное решение есть байесовское решение, для которого риски, соответствующие двум гипотезам, равны.

По трансцендентному уравнению (1.31) может быть найдено значение порога x_0 при $\xi = \xi_0$, определяемое также по (1.28). Значения каждой части уравнения (1.31) при этом равно минимальному риску. Действительно, при $C_0 = 1$, $C_1 = C = 2$, $\xi_0 = 0,6$ по (1.28) находим $x_0 = 0,212$, отсюда $Q_0 = \operatorname{erfc} 0,212 = 0,5 - \psi(0,212) \approx 0,5 - 0,083 \approx 0,42 = \bar{C}(0,6)$.

Пример 1.5 [8]. $C_0 = 2$; $C_1 = 1$; $\xi = \xi_1 = 0,23$. На рис. 1.4 1 — точки байесовского решения; 2 — минимаксное решение; штрихпунктирная прямая — линия равных рисков.

Пример 1.6. Пусть $C_0 = C_1 = 1$. Априорные вероятности π_0 и π_1 неизвестны. Найти величину порога x_0 и вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$.

Решение. Согласно минимаксной стратегии по (1.31) находим $Q_0(x_0) = Q_1(x_0)$, или, если воспользоваться примером 1.1 при $a_0 = 0$; $a_1 = 1$; $\sigma_n = 1$, то получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_0}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} e^{-(u-1)^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0-1} e^{-u^2/2} du,$$

или

$$Q(x_0) = 1 - \psi(x_0) = \Phi(x_0 - 1) = Q(1 - x_0).$$

Отсюда находим $x_0 = 0,5$.

Однако при известных априорных вероятностях порог x_0 определяется по (1.28) и при $C = 1$ $x_0 = 0,5 + \ln(\pi_0/\pi_1)$. Таким образом, минимаксная стратегия соответствует выбору $\pi_0 = \pi_1 = 0,5$ и, следовательно, по (1.22)

$$P_{\text{ош}} = Q_0 = Q_1.$$

Следует отметить, что все примеры здесь рассмотрены при условии единичного (скалярного или одномерного) измерения. Однако основные понятия и положения проверки двухальтернативных гипотез остаются справедливыми и при векторных (многомерных) измерениях с учетом их специфики.

Проверка простых гипотез при многократных измерениях. Проверка гипотез при единичном измерении без труда переносится на случай многократных измерений, основное отличие которых в том, что аргументом функции теперь является выборка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где n — объем выборки или кратность измерения; ПРВ $W_0(\mathbf{x})$, $W_1(\mathbf{x})$,

и отношение правдоподобия $\Lambda(\mathbf{x})$ являются функциями n переменных. По-прежнему, вычисляется отношение правдоподобия $\Lambda(\mathbf{x}) = W_1(\mathbf{x})/W_0(\mathbf{x})$, которое сравнивается с порогом Λ_0 . Если выполняется неравенство

$$\Lambda(\mathbf{x}) > \Lambda_0, \quad (1.32)$$

принимается гипотеза H_1 , при

$$\Lambda(\mathbf{x}) < \Lambda_0$$

принимается гипотеза H_0 .

Замечание. Если отсчеты (x_1, x_2, \dots, x_n) независимы, то совместная ПРВ $W_k(\mathbf{x})$, $k = 0, 1$, равна произведению одномерных ПРВ $W_k(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, характеризующих единичные измерения.

Пример 1.7. Пусть отсчеты (x_1, x_2, \dots, x_n) независимы и имеют нормальное распределение с равными дисперсиями σ^2 . Среднее значение каждого отсчета равно a_0 при гипотезе H_0 и a_1 при гипотезе H_1 . Найти отношение правдоподобия и вероятности Q_0 и Q_1 .

Решение. В силу предыдущего замечания совместная ПРВ имеет вид

$$W_k(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp \left[-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a_k)^2}{2\sigma^2} \right], \quad k = 0, 1. \quad (1.33)$$

Отношение правдоподобия

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{W_1(\mathbf{x})}{W_0(\mathbf{x})} = \exp \left[\frac{a_1 - a_0}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n(a_1^2 - a_0^2)}{2\sigma^2} \right]. \quad (1.34)$$

Наблюдатель принимает гипотезу H_1 , если $\Lambda(\mathbf{x}) > \Lambda_0$, где Λ_0 определяется выбранным критерием решения.

Экспоненциальная функция является монотонной, поэтому решение на основе величины $\Lambda(\mathbf{x})$ может быть заменено решением на основе выборочного среднего значения:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.35)$$

которое должно сравниваться с порогом

$$x_0 = \frac{a_0 + a_1}{2} + \frac{\sigma^2 \ln \Lambda_0}{n(a_1 - a_0)}. \quad (1.36)$$

Принимается гипотеза H_1 , если $\bar{x} > x_0$. Поверхность решения определяется равенством $\bar{x} = x_0$ или

$$\sum_{i=1}^n x_i = nx_0. \quad (1.37)$$

Это равенство определяет плоскость.

Как известно, $E(\bar{x}) = a_k$, $k = 0, 1$, а дисперсия $E[(\bar{x} - a_k)^2] = \sigma^2/n$ в силу независимости отсчетов. Выборочное среднее как сумма гауссовских случайных величин имеет нормальное распределение $W_0(\bar{x})$ в случае гипотезы H_0 и $W_1(\bar{x})$ в случае гипотезы H_1 при равных дисперсиях $D = \sigma^2/n$. Поэтому ошибки Q_0 и Q_1 определяются соотношениями:

$$Q_0 = \int_{x_0}^{\infty} W_0(\bar{x}) d\bar{x}; \quad Q_1 = \int_{-\infty}^{x_0} W_1(\bar{x}) d\bar{x}.$$

Интегрируя, получаем, как и в примере 1.1,

$$Q_0 = Q\left(\frac{x_0 - a_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \operatorname{erfc} \frac{x_0 - a_0}{\sigma/\sqrt{n}}; \quad Q_d = Q\left(\frac{x_0 - a_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Задачи*

1.1. Найти критерий проверки гипотезы H_0 относительно гипотезы H_1 , обеспечивающий минимум ожидаемых потерь, если H_0 — гипотеза о том, что наблюдаемое действительное число x имеет равномерное распределение

$$W_0(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{при } 0 \leq x \leq 4; \\ 0 & \text{при других } x, \end{cases}$$

а H_1 — гипотеза о том, что x имеет распределение

$$W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Априорные вероятности $P(H_0) = 1/4$, $P(H_1) = 3/4$. Потери, связанные с ошибками обоих родов, одинаковы. Найти полную вероятность ошибки.

1.2. Определить оптимальный алгоритм распознавания двух пуассоновских случайных процессов с интенсивностями m_1 и m_2 , наблюдаемых в течение интервала T .

1.3. Пусть форма принимаемого сигнала описывается равенством

$$x(t) = s_i(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad i = 0, 1,$$

где $s_0(t) = \cos 3t$; $s_1(t) = \cos 2t$; $n(t) = x_1 \cos t + x_2 \sin t$; а x_1 и x_2 — независимые гауссовские случайные величины (СВ) с нулевыми средними значениями и дисперсиями σ^2 . Найти функцию $\psi(t)$, для которой с вероятностью, равной единице,

$$\int_0^{2\pi} \psi(t)x(t) dt = \begin{cases} a & \text{при } s_0(t); \\ b & \text{при } s_1(t), \end{cases} \quad a \neq b.$$

1.4. Вычислить амплитуду видеоимпульса $s(t)$, который при приеме на фоне гауссовского шума со спектральной плотностью

$$S_n(f) = \begin{cases} N_0 & \text{при } |f| \leq f_c, \\ 0 & \text{при } |f| > f_c, \end{cases}$$

обеспечит заданную вероятность ложной тревоги Q_0 и вероятность правильного обнаружения Q_d при использовании одного отсчета входного сигнала $x(t_K)$. Рассчитать необходимое отношение сигнал/шум при $Q_0 = 0,01$ и $Q_d = 0,9$.

* Решения задач 1.1–1.9 приводятся в [20].

1.5. Пусть имеется аддитивная смесь $x(t)$ сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$:

$$x(t) = s_i(t) + n(t),$$

где $s_0(t) = 0$, $s_1(t) = M$; $n(t)$ — гауссовский шум с дисперсией σ_n^2 .

Определить оптимальный алгоритм обнаружения сигнала при использовании одного отсчета, если

а) M — гауссовская СВ с математическим ожиданием $E(M) = m$ и дисперсией σ_M^2 ;

б) M — неизвестная детерминированная величина.

1.6. Найти необходимое число отсчетов входного колебания для использования критерия Неймана-Пирсона, которое обеспечивает заданные вероятности ложной тревоги Q_0 и обнаружения Q_d .

1.7. На вход приемника поступает аддитивная смесь сигнала и шума

$$x(t) = s_i(t) + n(t), \quad i = 0, 1,$$

где $s_0(t) = 0$; $s_1(t) = A$, $n(t)$ — гауссовский шум с нулевым средним значением и корреляционной функцией $R(\tau)$.

Требуется:

а) построить оптимальный алгоритм обнаружения сигнала при использовании двух отсчетов входной реализации через интервал времени Δt ;

б) нарисовать схему оптимального обнаружителя:

- при прямой реализации алгоритма;
- при использовании метода выбеливания,
- при использовании метода ортогональных преобразований.

1.8. Пусть имеется аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и узкополосного гауссовского шума $n(t)$ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $s(t) = A \cos(\omega_c t + \varphi)$, φ — СВ, равномерно распределенная в интервале $(0, 2\pi)$.

Определить оптимальное правило обнаружения сигнала, если наблюдается выборка огибающей колебания $x(t)$ $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$, где отсчеты огибающей можно считать независимыми.

1.9. Показать, что для условия задачи 1.8 вероятность ложной тревоги [7]

$$Q_0 = \int_r^\infty \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} e^{-z} dz,$$

а вероятность обнаружения

$$Q_d = \int_r^\infty \left(\frac{z}{k\gamma} \right)^{(k-1)/2} e^{-z-k\gamma} I_{k-1}(2\sqrt{k\gamma z}) dz,$$

где $\gamma = A^2/2\sigma^2$ — ОСШ, $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

1.10. Найти ОП, чтобы выбрать между гипотезами

$$H_1: W_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty;$$

$$H_0: W_0(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } -1 < x < 1; \\ 0 & \text{при других } x. \end{cases}$$

а) При пороге, равном единице, найти область решения.

б) Использовать критерий Неймана–Пирсона при $Q_0 = \alpha$. Какова при этом область решения.

1.11. Основываясь на одном измерении, использовать критерий минимакс, чтобы проверить гипотезы

$$H_0 : r(t) = n(t); \quad H_1 : r(t) = 1 + n(t).$$

Пусть $n(t)$ — гауссовский процесс с нулевым средним значением и средней мощностью σ^2 .

Принять следующие условия: $C_{00} = C_{11} = 0$; $C_{10} = C_{01} = 1$. Найти порог решения.

1.12. Использовать критерий Неймана–Пирсона для проверки гипотез

$$H_0 : \mu = 0; \quad H_1 : \mu = 1.$$

При единственном наблюдении $x[0] \approx N(\mu, 1)$ найти ошибки 1-го и 2-го родов (Q_0 и $Q_1 = 1 - Q_d$). Изобразить зависимость $Q_1 = f(Q_0)$.

1.13. Пусть требуется обнаружить постоянный сигнал в гауссовском белом шуме так, что ВЛТ $Q_0 = 10^{-4}$ и вероятность обнаружения $Q_d = 0,99$. При условии, что ОСШ $d^2 = 10 \lg(A^2/\sigma^2) = -30$ дБ, найти наблюдаемое число отсчетов N .

2 Обнаружение полностью известных сигналов (дискретные процессы)

Вначале рассмотрим обнаружение сигнала на основе наблюдаемой выборки конечной длины X_n . Исследуем обнаружение сигнала в гауссовском белом шуме (ГБШ).

2.1. Обнаружение сигнала в белом шуме

В процессе обнаружения рассматриваются две гипотезы

$$\begin{aligned} H_0 : \quad x[n] &= w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1; \\ H_1 : \quad x[n] &= s[n] + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где сигнал $s[n]$ предполагается известным; $w[n]$ — отсчеты ГБШ с дисперсией σ^2 и нулевым средним значением: $E(w[n]) = 0$. Отсчеты КФ ГБШ имеют вид

$$r_w[k] = E(w[n]w[n+k]) = \sigma^2 \delta[k], \quad (2.2)$$

где $\delta[k]$ — символ Кронекера.

Обнаружитель Неймана–Пирсона принимает гипотезу H_1 , если отношение правдоподобия (ОП) превышает заранее заданный порог, когда

$$L(\mathbf{X}_N) = \frac{W(\mathbf{X}_N | H_1)}{W(\mathbf{X}_N | H_0)} > \gamma, \quad (2.3)$$

где $\mathbf{X}_N = (x[0], x[1], \dots, x[N-1])^T$.

В (2.3)

$$\begin{aligned} W(\mathbf{X}_N | H_1) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n])^2 \right]; \\ W(\mathbf{X}_N | H_0) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \right]. \end{aligned}$$

В результате по (2.3) получим ОП

$$L(\mathbf{X}_N) = \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n])^2 - \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \right) \right] > \gamma.$$

Тогда ЛОП

$$\ln L(\mathbf{X}_N) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s[n])^2 - \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \right] > \ln \gamma.$$

Принимается гипотеза H_1 , если

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} s^2[n] > \ln \gamma.$$

Поскольку сигнал $s[n]$ известен полностью, то его энергию можно включить в величину порога. В результате получим статистику

$$T(\mathbf{X}_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] > \sigma^2 \ln \gamma + \frac{1}{2}\mathfrak{E},$$

где $\mathfrak{E} = \sum_{n=0}^{N-1} s^2[n]$ — энергия сигнала.

Вводя новую величину порога $\gamma' = \sigma^2 \ln \gamma + (1/2)\mathfrak{E}$, окончательно получим, что принимается гипотеза H_1 , если выполняется неравенство

$$T(\mathbf{X}_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] > \gamma'. \quad (2.4)$$

Таков обнаружитель Неймана–Пирсона, который включает в себя формирователь статистики $T(\mathbf{X}_N)$ и устройство сравнения с порогом γ' , причем величина порога должна удовлетворять заданной вероятности ложной тревоги (ВЛТ) $Q_0 = \alpha$.

Пример 2.1. Обнаружение сигнала постоянной величины. Пусть $s[n] = A = \text{const}$, где $A > 0$, тогда по (2.4) статистика $T(\mathbf{X}_N)$ имеет вид

$$T(\mathbf{X}_N) = A \sum_{n=0}^{N-1} x[n].$$

Введя новую статистику $T'(\mathbf{X}_N) = \frac{1}{NA}T(\mathbf{X}_N)$, находим, что принимается гипотеза H_1 , если

$$T'(\mathbf{X}_N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \bar{x} > \gamma'', \quad (2.5)$$

где $\gamma'' = \gamma'/NA$; \bar{x} — выборочное среднее.

Получили обнаружитель на основе выборочного среднего. При $A < 0$ принимается гипотеза H_1 , если $\bar{x} < \gamma''$.

Для того чтобы найти характеристики обнаружителя, необходимо определить характеристики статистики $T'(\mathbf{X}_N)$ для каждой из гипотез. В силу гауссовского характера выборочного среднего достаточно найти лишь среднее значение и дисперсию выборочного среднего.

При гипотезе H_0

$$E(T'(\mathbf{X}_N) | H_0) = E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E(w[n]) = 0.$$

Аналогично при гипотезе H_1

$$E(T'(\mathbf{X}_N) | H_1) = A.$$

Дисперсия статистики (выборочного среднего)

$$D_0 = \text{var}(T'(\mathbf{X}_N) | H_0) = \text{var}\left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \text{var}(w[n]) = \frac{\sigma^2}{N},$$

так как, по предположению СВ $w[n]$ являются независимыми (см. (2.2)).

Аналогично при гипотезе H_1 получим

$$D_1 = \text{var}(T'(\mathbf{X}_N) | H_1) = \sigma^2/N = D_0.$$

Таким образом, гауссова статистика $T'(\mathbf{X}_N)$ имеет параметры

$$T'(\mathbf{X}_N) \sim \begin{cases} N(0, \sigma^2/N) & \text{при } H_0; \\ N(A, \sigma^2/N) & \text{при } H_1. \end{cases} \quad (2.6)$$

Поэтому ВЛТ

$$Q_0 = P\{T'(\mathbf{X}_N) > \gamma'' | H_0\} = Q(\gamma''/D), \quad (2.7)$$

где $Q(z)$ — функция нормального распределения

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-u^2/2} du.$$

Поэтому

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_0}} \int_{\gamma''}^\infty e^{-u^2/2D_0} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma''/\sqrt{D_0}}^\infty e^{-z^2/2} dz = Q\left(\frac{\gamma''}{\sqrt{D_0}}\right).$$

Аналогично получим вероятность обнаружения

$$Q_d = P\{T'(\mathbf{X}_N) > \gamma'' | H_1\} = Q\left(\frac{\gamma'' - A}{\sqrt{D_0}}\right). \quad (2.8)$$

По (2.7) находим процентную точку нормального распределения

$$\gamma''/\sqrt{D_0} = Q^{-1}(Q_0).$$

Тогда вероятность обнаружения принимает вид

$$Q_d = Q(Q^{-1}(Q_0) - \sqrt{d^2}), \quad (2.9)$$

где $d^2 = A^2 N / \sigma^2$ — отношение сигнал/шум (ОСШ).

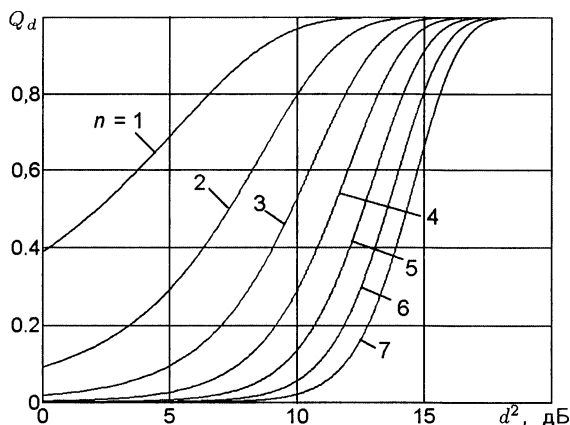


Рис. 2.1

Характеристики обнаружения данного обнаружителя изображены на рис. 2.1 при $Q_0 = 10^{-n}$, $n = \overline{1, 7}$, в зависимости от величины ОСШ $d^2_{\text{дБ}} = 10 \lg(NA^2/\sigma^2)$ от 0 до 20 дБ.

Иногда удобно характеристики обнаружения отображать в логарифмическом масштабе как функцию ОСШ d .

Задачу обнаружения постоянного сигнала можно обобщить и рассматривать задачу различения двух постоянных сигналов при наличии гауссовского шума. Эта проблема называется проблемой сдвига среднего (англ. термин: mean-shifted Gauss-Gauss). В этом случае вместо статистики (2.6) получим статистику T со свойствами

$$T \sim \begin{cases} N(\mu_0, \sigma^2) & \text{при } H_0; \\ N(\mu_1, \sigma^2) & \text{при } H_1, \end{cases}$$

где $\mu_1 > \mu_0$.

Принимается гипотеза H_1 , если $T > \gamma'$, и H_0 в противном случае. Таким образом, принимается та или иная гипотеза в зависимости от сдвига среднего значения статистики.

Для такого обнаружителя ОСШ d^2 обобщается и называется коэффициентом девиации

$$d^2 = \frac{[E(T | H_1) - E(T | H_0)]^2}{\text{var}(T | H_0)} = \frac{(\mu_1 - \mu_0)^2}{\sigma^2}. \quad (2.10)$$

При $\mu_0 = 0$ $d^2 = \mu_1^2/\sigma^2$ — ОСШ.

В данном случае ВЛТ

$$Q_0 = P\{T > \gamma' | H_0\} = Q\left(\frac{\gamma' - \mu_0}{\sigma}\right).$$

Вероятность обнаружения

$$\begin{aligned} Q_d &= P\{T > \gamma' \mid H_1\} = Q\left(\frac{\gamma' - \mu_1}{\sigma}\right) = \\ &= Q\left(\frac{\mu_0 + \sigma Q^{-1}(Q_0) - \mu_1}{\sigma}\right) = Q\left[Q^{-1}(Q_0) - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}\right], \end{aligned}$$

или, используя (2.10), получим

$$Q_d = Q[Q^{-1}(Q_0) - \sqrt{d^2}]. \quad (2.11)$$

В системах связи при передаче сигналов задача обнаружения (2.1) может быть рассмотрена как прием бинарных посылок, таких, что $s_0[n] = 0$; $s_1[n] = A$. Предполагая равными их априорные вероятности $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$, получим обнаружитель, минимизирующий вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$, так что принимается гипотеза H_1 , если

$$\frac{W(X_N \mid H_1)}{W(X_N \mid H_0)} > \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = 1.$$

Таким образом, принимается гипотеза H_1 , если выполняется неравенство (2.3) при $\gamma = 1$. И после логарифмирования в случае выполнения неравенства (при $s_n = A$)

$$-\frac{1}{2\sigma^2}(-2A \sum_{n=0}^{N-1} x[n] + NA^2) > 0. \quad (2.12)$$

Отсюда следует правило решения

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] > A/2. \quad (2.13)$$

как и ранее, решение принимается на основе статистики \bar{x} (выборочного среднего). Как было показано

$$\bar{x} \sim \begin{cases} N(0, D_0) & \text{при } H_0; \\ N(A, D_0) & \text{при } H_1, \end{cases}$$

где $D_0 = \sigma^2/N$.

Вероятность ошибки находится по формуле

$$P_{\text{ош}} = P(H_0 \mid H_1)P(H_1) + P(H_1 \mid H_0)P(H_0), \quad (2.14)$$

где $P(H_i \mid H_j)$ — условная вероятность принятия гипотезы H_i при условии, что истинной является гипотеза H_j .

При $P(H_1) = P(H_0) = 1/2$ получим вероятность ошибки

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2}[P(H_0 \mid H_1) + P(H_1 \mid H_0)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} [P\{\bar{x} < \frac{A}{2} \mid H_1\} + P\{\bar{x} > \frac{A}{2} \mid H_0\}] = \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(1 - Q\left(\frac{A/2 - A}{\sqrt{D_0}}\right) + Q\left(\frac{A/2}{\sqrt{D_0}}\right) \right) \right]; \quad D_0 = \frac{\sigma^2}{N}.
\end{aligned}$$

Учтем соотношение

$$Q(-x) = 1 - Q(x) = \Phi(x), \quad (2.15)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du.$$

В результате получим

$$P_{\text{ош}} = Q\left(\sqrt{\frac{NA^2}{4\sigma^2}}\right). \quad (2.16)$$

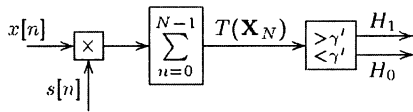


Рис. 2.2

Заметим, что в общем случае согласно алгоритму (2.4) статистика $T(\mathbf{X}_N)$ взвешивает наблюдаемые данные, весовые коэффициентами являются отсчеты сигнала $s[n]$. Такой обнаружитель функционирует как коррелятор (рис. 2.2), вычисляет взаимную КФ входного воздействия и сигнала.

Корреляционный эффект может быть также достигнут за счет применения цифрового согласованного фильтра (ЦСФ) на базе КИХ-фильтра [60], характеристики которого имеют конечное число отсчетов $h[n]$, не равных нулю при $n = 0, 1, \dots, N-1$. В совокупности отсчеты ИХ можно представить вектором $\mathbf{H}_N = (h[0], h[1], \dots, h[N-1])^T$. Отклик ЦФ в момент времени n имеет вид свертки [60]

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[n-k]x[k], \quad n \geq 0. \quad (2.17)$$

Введем обращенный вектор ИХ $\bar{\mathbf{H}}_N = (h[n], h[n-1], \dots, h[0])^T$, тогда (2.17) можно записать в векторной форме

$$y[n] = \bar{\mathbf{H}}_N^T \mathbf{X}_N, \quad (2.18)$$

где $\mathbf{X}_N = (x[0], x[1], \dots, x[n])^T$.

При $n < 0$ значение отклика равно нулю, так как предполагается, что отсчеты входного воздействия не равны нулю только в интервале $[0, N-1]$.

Известно [60], что для ЦСФ его ИХ $h[n]$ является «зеркальной» версией сигнала

$$h[n] = s[N-1-n]1[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.19)$$

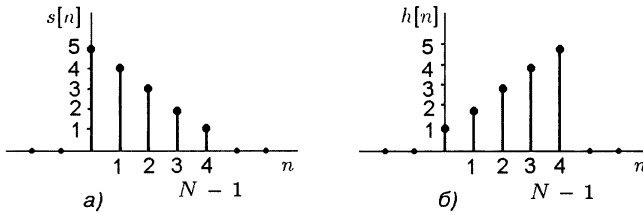
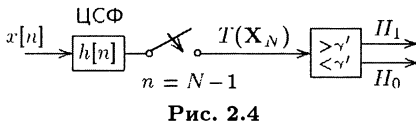


Рис. 2.3

где $1[n]$ — функция единичного сигнала (рис. 2.3,а); $N - 1$ — время последнего отсчета сигнала.

При сигнале рис. 2.3 ИХ ЦСФ представляет собой зеркальное отображение сигнала относительно оси ординат с последующим сдвигом вправо на $N - 1$ отсчетов. При этом отклик ЦСФ согласно (2.17) имеет вид

$$y[n] = \sum_{k=0}^n s[N - 1 - (n - k)]x[k]$$



и в конце действия сигнала при $k = N - 1$ получим

$$y[N - 1] = \sum_{k=0}^{N-1} s[k]x[k], \quad (2.20)$$

что совпадает со статистикой $T(\mathbf{X}_N)$ корреляционного обнаружителя (см. рис. 2.2).

Обнаружитель в форме ЦСФ изображен на рис. 2.4.

Для сигнала с неизменными значениями отсчетов (рис. 2.5,а) ИХ ЦСФ имеет вид рис. 2.5,б, и отклик ЦСФ изображен на рис. 2.6 (огibaющая отклика имеет вид треугольного импульса). Причем максимум отклика приходится на время последнего отсчета сигнала.

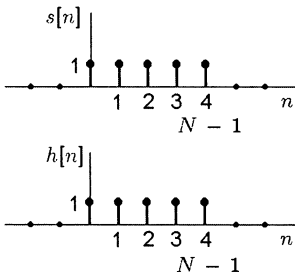


Рис. 2.5

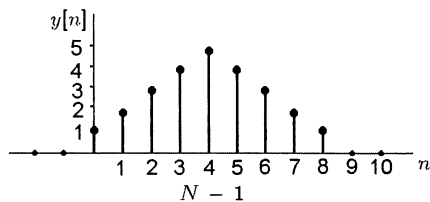


Рис. 2.6

Свертка (2.17) соответствует произведению Фурье-образов сомножителей, и тогда по теореме Парсеваля по (2.17) получим

$$y[n] = \int_{-1/2}^{1/2} H(f)X(f)e^{i2\pi fn} df, \quad (2.21)$$

где $H(f) = \mathfrak{F}_g(h[n])$; $X(f) = \mathfrak{F}_g(x[n])$, \mathfrak{F}_g — знак дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Используя (2.19), можно показать [60], что

$$H(f) = S^*(f)e^{-i2\pi f(N-1)}. \quad (2.22)$$

Здесь $S^*(f)$ — комплексно-сопряженная величина Фурье-образа сигнала.

По (2.21) с учетом (2.22) находим

$$y[n] = \int_{-1/2}^{1/2} S^*(f)X(f) \exp[i2\pi f(n - (N - 1))] df. \quad (2.23)$$

Отсюда при $n = N - 1$ получим

$$y[N - 1] = \int_{-1/2}^{1/2} S^*(f)X(f) df.$$

Основное свойство ЦСФ на основе КИХ-фильтра (нерекурсивного ЦФ) — максимизация ОСШ на выходе фильтра.

Определим ОСШ на выходе фильтра в момент последнего отсчета сигнала

$$q = \frac{E^2(y[N - 1] | H_1)}{\text{var}(y[N - 1] | H_1)},$$

причем согласно (2.17)

$$y[N - 1] = \sum_{k=0}^n h[N - 1 - k]x[k].$$

Тогда

$$E(y[N - 1] | H_1) = \sum_{k=0}^{N-1} h[N - 1 - k]E(x[k]) = \sum_{k=0}^{N-1} h[N - 1 - k]s[k] = m_y.$$

В знаменателе ОСШ q имеем

$$\begin{aligned} \text{var}(y[N - 1] | H_1) &= E[(y[N - 1] - m_y)^2] = \\ &= E \left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} h[N - 1 - k]w[k] \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Введем векторы

$$\mathbf{S}_N = (s[0], s[1], \dots, s[N-1])^T; \quad \mathbf{W}_n = (w[0], w[1], \dots, w[N-1])^T; \\ \bar{\mathbf{H}}_N = (h[N-1], h[N-2], \dots, h[0])^T.$$

Заметим, что $\bar{\mathbf{H}}_N$ — это обращенный вектор ИХ, когда $\mathbf{H}_N = (h[0], h[1], \dots, h[N-1])^T$. Тогда получим ОСШ в векторной форме

$$q = \frac{(\bar{\mathbf{H}}_N^T \mathbf{S}_N)^2}{E[(\bar{\mathbf{H}}_N^T \mathbf{W}_N)^2]} = \frac{(\bar{\mathbf{H}}_N^T \mathbf{S}_N)^2}{\bar{\mathbf{H}}_N^T E(\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^T) \bar{\mathbf{H}}_N} = \frac{(\bar{\mathbf{H}}_N^T \mathbf{S}_N)^2}{\bar{\mathbf{H}}_N^T \sigma^2 \mathbf{I} \bar{\mathbf{H}}_N} = \\ = \frac{1}{\sigma^2} \frac{(\bar{\mathbf{H}}_N^T \mathbf{S}_N)^2}{\bar{\mathbf{H}}_N^T \bar{\mathbf{H}}_N}. \quad (2.24)$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского

$$(\bar{\mathbf{H}}_N^T \mathbf{S}_N)^2 \leq (\bar{\mathbf{H}}_N^T \bar{\mathbf{H}}_N)(\mathbf{S}_N^T \mathbf{S}_N), \quad (2.25)$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, когда $\bar{\mathbf{H}}_N = c \mathbf{S}_N$, $c = \text{const}$. При $c = 1$ отсюда находим $\bar{\mathbf{H}}_N = \mathbf{S}_N$, или $(\mathbf{H}_N)_{\text{опт}} = \bar{\mathbf{S}}_N$, т.е. оптимальный вектор ИХ равен обращенному вектору сигнала, а это означает равенство (2.19) $h[n] = s[N-1-n]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, которое характеризует ЦСФ. При этом из (2.24) с учетом (2.25) получим

$$q \leq \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{S}_N^T \mathbf{S}_N.$$

Следовательно, максимум ОСШ

$$q = q_m = \mathbf{S}_N^T \mathbf{S}_N / \sigma^2 = \mathcal{E} / \sigma^2, \quad (2.26)$$

где \mathcal{E} — энергия сигнала.

Найдем характеристики обнаружения обнаружителя на основе ЦСФ.

Согласно (2.4) принимается гипотеза H_1 , причем статистика $T(\mathbf{X}_N)$ является гауссовской СВ. Найдем два первых момента этой статистики:

$$E(T | H_0) = E \left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n] s[n] \right) = 0;$$

$$E(T | H_1) = E \left(\sum_{n=0}^{N-1} (s[n] + w[n]) s[n] \right) = \mathcal{E};$$

$$\text{var}(T | H_0) = \text{var} \sum_{n=0}^{N-1} w[n] s[n] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \text{var}(w[n]) = \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} s^2[n] = \\ = \sigma^2 \mathcal{E}.$$

Аналогично получим $\text{var}(T | H_1) = \sigma^2 \Xi$.

Таким образом,

$$T \sim \begin{cases} N(0, \sigma^2 \Xi) & \text{при } H_0; \\ N(\Xi, \sigma^2 \Xi) & \text{при } H_1. \end{cases} \quad (2.27)$$

Согласно (2.4) ВЛТ

$$Q_0 = P\{T(\mathbf{X}_N) > \gamma' | H_0\} = Q(\gamma'/\sqrt{\sigma^2 \Xi}). \quad (2.28)$$

Вероятность обнаружения

$$Q_d = P\{T(\mathbf{X}_N) > \gamma' | H_1\} = Q[(\gamma' - \Xi)/\sqrt{\sigma^2 \Xi}]. \quad (2.29)$$

процентная точка нормального распределения

$$\frac{\gamma'}{\sqrt{\sigma^2 \Xi}} = Q^{-1}(Q_0),$$

подставляя ее в (2.28) получим

$$Q_d = Q\left(\frac{\sqrt{\sigma^2 \Xi} Q^{-1}(Q_0) - \sqrt{\Xi}}{\sqrt{\sigma^2 \Xi}}\right) = Q\left(Q^{-1}(Q_0) - \sqrt{\frac{\Xi}{\sigma^2}}\right). \quad (2.30)$$

Здесь, согласно (2.26) аргументом служит $q_m = \Xi/\sigma^2 = d^2$.

Характеристика обнаружения изображена на рис. 2.7 при $Q_0 = 10^{-n}$, $n = \overline{1, 7}$, в зависимости от ОСШ $d_{\text{дБ}} = 10 \lg(\Xi/\sigma^2)$.

По (2.30) замечаем, что форма сигнала не оказывает влияния на характеристики обнаружения. Однако, как будет показано, если шум $w[n]$ коррелирован, то форма сигнала оказывает влияние на характеристики обнаружения.

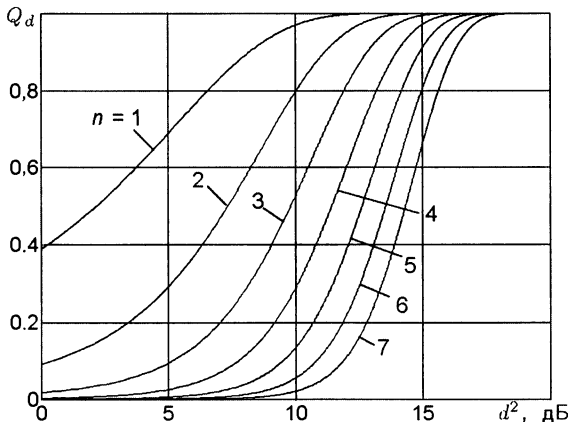


Рис. 2.7

2.2. Обобщенные согласованные фильтры

Согласованные фильтры подразумевают ГБШ на входе фильтра, но если в аддитивной смеси сигнала и шума (2.1) шум $w[n]$ является коррелированным, то его ПРВ — гауссовская с матрицей ковариации \mathbf{K} , причем $\mathbf{W}_N \sim N(0, \mathbf{K})$ [153]. Если шум стационарный в широком смысле с нулевым средним значением, тогда

$$(\mathbf{K})_{mn} = \text{cov}(w[m]w[n]) = E(w[m]w[n]) = r_w[m - n].$$

В данном случае при $E(\mathbf{W}_N) = 0$; $\mathbf{K} = \mathbf{R}$

$$W(\mathbf{X}_N | H_1) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det \mathbf{R}}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{X}_N - \mathbf{S}_N)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{X}_N - \mathbf{S}_N) \right];$$

$$W(\mathbf{X}_N | H_0) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det \mathbf{R}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}_N \right].$$

Заметим, что при H_0 $\mathbf{X}_N \sim N(0, \mathbf{R})$; при H_1 $\mathbf{X}_N \sim N(\mathbf{S}_N, \mathbf{R})$.

Принимается гипотеза H_1 , если

$$\ln \Lambda(\mathbf{X}_N) = \ln \frac{W(\mathbf{X}_N | H_1)}{W(\mathbf{X}_N | H_0)} > \ln \gamma.$$

Здесь ЛОП

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(\mathbf{X}_N) &= -\frac{1}{2} [(\mathbf{X}_N - \mathbf{S}_N)^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{X}_N - \mathbf{S}_N) - \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}_N] = \\ &= -\left[\frac{1}{2} \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}_N - 2 \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N + \mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N - \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}_N \right] = \\ &= \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N - \frac{1}{2} \mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Если на зависящее от наблюдаемых данных второе слагаемое включить в величину порога, то получим

$$T(\mathbf{X}_N) = \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N > \gamma'. \quad (2.32)$$

Обнаружитель, действующий по алгоритму (2.32), называется *обобщенным коррелятором* или *обобщенным согласованным фильтром*. Опорный сигнал в данном случае имеет вид $\mathbf{S}'_N = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N$. Тогда статистику можно записать в виде

$$T(\mathbf{X}_N) = \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N = \mathbf{X}_N^T \mathbf{S}'_N,$$

т.е. в этом случае входное воздействие коррелирует с преобразованным (искаженным) сигналом.

В частном случае ГБШ $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$, тогда по (2.32) получим

$$\frac{\mathbf{X}_N^T \mathbf{S}_N}{\sigma^2} > \gamma' \quad \text{или} \quad \mathbf{X}_N^T \mathbf{S}_N = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] > \gamma'',$$

как при согласованной фильтрации.

Пример 2.2. Некоррелированный шум с неравными дисперсиями.

В данном случае $w[n] \sim N(0, \sigma_n^2)$ и $w[n]$ — некоррелированная СВ, когда $\mathbf{R} = \text{diag}(\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_{N-1}^2)$, при этом $\mathbf{R}^{-1} = \text{diag}(1/\sigma_0^2, 1/\sigma_1^2, \dots, 1/\sigma_{N-1}^2)$.

Таким образом, согласно (2.32) принимается гипотеза H_1 , если

$$T(\mathbf{X}_N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x[n]s[n]}{\sigma_n^2} > \gamma'.$$

Запишем статистику $T(\mathbf{X}_N)$ в виде

$$T(\mathbf{X}_N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x[n] + s[n]}{\sigma_n} \frac{s[n]}{\sigma_n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(w'[n] + \frac{s[n]}{\sigma_n} \right) \frac{s[n]}{\sigma_n}.$$

Здесь отсчеты шума выровнены или обелены, так как $\mathbf{R}_{w'} = \mathbf{I}$. Таким образом, первой процедурой обобщенного СФ является обеление отсчетов шума; при этом сигнал искажается и становится равным $s'[n] = s[n]/\sigma_n$. В результате обеления шума обнаружитель осуществляет корреляцию с искаженным сигналом. Статистика обобщенного СФ выражается в виде

$$T(\mathbf{X}'_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x'[n]s'[n],$$

где $x'[n] = x[n]/\sigma_n$.

В случае, более общем, чем рассмотренный в примере 2.2, предположим, что матрица \mathbf{R} положительно определенная, тогда обратная ей матрица \mathbf{R}^{-1} существует и является также положительно определенной. Следовательно, она может быть факторизирована в виде

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{D}^T \mathbf{D},$$

где \mathbf{D} — несингулярная $N \times N$ -матрица. Для примера 2.2 $\mathbf{D} = \text{diag}(1/\sigma_0, 1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_{N-1})$.

В общем случае получим статистику

$$T(\mathbf{X}_N) = \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N = \mathbf{X}_N^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{S}_N = \mathbf{X}'_N{}^T \mathbf{S}'_N,$$

где $\mathbf{X}'_N = \mathbf{D} \mathbf{X}_N$; $\mathbf{S}'_N = \mathbf{D} \mathbf{S}_N$. Матрица \mathbf{D} называется обеляющей.

Обобщенный согласованный фильтр с предварительным обеливанием шума имеет схему, показанную на рис. 2.8.

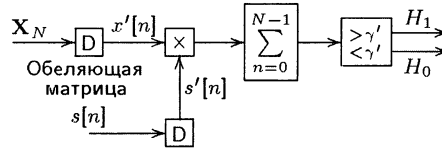


Рис. 2.8

Пусть $\mathbf{W}'_N = \mathbf{D}\mathbf{W}_N$, тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{W'} &= E(\mathbf{W}'_N \mathbf{W}'_N{}^T) = E(\mathbf{D}\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^T \mathbf{D}^T) = \mathbf{D}E(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)\mathbf{D}^T = \\ &= \mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{D}^T = \mathbf{D}(\mathbf{D}^T\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}^T = \mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}^{-T}\mathbf{D}^T = \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Если длина N вектора наблюдения велика и шум стационарный, то обобщенный СФ может быть аппроксимирован таким образом, что его статистика принимает вид

$$T(\mathbf{X}_N) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{X(f)S(f)}{S_W(f)} df, \quad (2.33)$$

где $S_W(f)$ — энергетический спектр шума.

Характеристики обнаружения обобщенного СФ. Статистика обобщенного СФ имеет вид (2.32) и является гауссовской СВ, при той и другой гипотезах, причем

$$\begin{aligned} E(T | H_0) &= E(\mathbf{W}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}_N) = 0; \\ E(T | H_1) &= E[(\mathbf{S}_N + \mathbf{W}_N)^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N] = \mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N; \\ \text{var}(T | H_0) &= E[(\mathbf{W}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N)^2] = E(\mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N) = \\ &= \mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} E(\mathbf{W}_N \mathbf{W}_N^T) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N = \mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N. \end{aligned} \quad (2.34)$$

В преобразовании использовалось свойство

$$(\mathbf{R}^{-1})^T = \mathbf{R}^{-T} = \mathbf{R}^{-1}.$$

Далее

$$\begin{aligned} \text{var}(T | H_1) &= E\{[\mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N - E(\mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N)]^2\} = \\ &= E\{[\mathbf{X}_N - E(\mathbf{X}_N)]^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N\} = E(\mathbf{W}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N)^2 = \text{var}(T | H_0). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Как и в случае БШ, используя свойства статистик (2.33), (2.34), можно показать, что вероятность обнаружения имеет вид

$$Q_d = Q(Q^{-1}(Q_0) - \sqrt{d^2}),$$

где d^2 — коэффициент девиации,

$$d^2 = \frac{[E(T | H_1) - E(T | H_0)]^2}{\text{var}(T | H_0)}. \quad (2.36)$$

Нетрудно показать, что здесь $d^2 = \mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N$, и таким образом

$$Q_d = Q[Q^{-1}(Q_0) - \sqrt{\mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N}]. \quad (2.37)$$

При $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$ отсюда следует соотношение (2.30). Однако, если при БШ на входе форма сигнала не имела значения, то в общем случае $\mathbf{R} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$ сигнал может быть выбран таким образом, чтобы максимизировать величину $\mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N$ и, следовательно, максимизировать вероятность обнаружения Q_d .

Осуществим максимизацию квадратичной формы $\mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N$ при условии (ограничении), что энергия сигнала конечна: $\mathbf{S}_N^T \mathbf{S}_N = \mathcal{E}$ или $\mathcal{E} - \mathbf{S}_N^T \mathbf{S}_N = 0$.

Составим функцию Лагранжа (шаг 1 [60])

$$L(\mathbf{S}_N, \lambda) = \mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N + \lambda(\mathcal{E} - \mathbf{S}_N^T \mathbf{S}_N).$$

Возьмем производную функции Лагранжа по $\mathbf{S}_N = \mathbf{S}$ и приравняем ее нулю (шаг 2 [60]).

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{S}} = 2\mathbf{R}^{-1} \mathbf{S} - 2\lambda \mathbf{S} = 0. \quad (2.38)$$

При этой операции использовалось равенство

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A} \mathbf{x} \quad \text{при } \mathbf{A} = \mathbf{I}; \quad \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x},$$

где \mathbf{A} — симметрическая матрица, как и \mathbf{R}^{-1} .

По (2.38) получим

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N = \lambda \mathbf{S}_N. \quad (2.39)$$

Следовательно, \mathbf{S}_N является собственным вектором матрицы \mathbf{R}^{-1} . Этот собственный вектор должен максимизировать квадратичную форму $\mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N$.

По (2.39) умножением слева на вектор \mathbf{S}_N^T находим

$$\mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N = \lambda \mathbf{S}_N^T \mathbf{S}_N = \lambda \mathcal{E}.$$

Таким образом, собственный вектор матрицы \mathbf{R}^{-1} должен соответствовать максимальному собственному числу $\lambda = \lambda_{\max}$.

Замечание. Собственные значения положительно определенной матрицы вещественны и положительны.

По (2.39) умножением слева на матрицу \mathbf{R} получим

$$\mathbf{S}_N = \lambda \mathbf{R} \mathbf{S}_N, \quad \text{или} \quad \mathbf{R} \mathbf{S}_N = \frac{1}{\lambda} \mathbf{S}_N.$$

Следовательно, искомый сигнал, максимизирующий квадратичную форму $\mathbf{S}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N$ представляет собой собственный вектор мат-

рицы \mathbf{R}^{-1} , который соответствует минимальному собственному значению этой матрицы. Если нормировать собственный вектор \mathbf{V} так, что $\|\mathbf{V}\| = 1$, то искомый сигнал удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{S}_N = \sqrt{\mathcal{E}}\mathbf{V}. \quad (2.40)$$

Пример 2.3. Пусть корреляционная матрица имеет вид [60, пример 24.2]

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix},$$

где ρ — коэффициент корреляции, такой что $|\rho| \leq 1$. Найти сигнальную форму, максимизирующую ОСШ.

Решение. Решая характеристическое уравнение [60] $(1-\lambda)^2 - \rho^2 = 0$, получим $\lambda_1 = 1 + \rho$; $\lambda_2 = 1 - \rho$.

Собственные векторы $\mathbf{V}_i (i = 1, 2)$ должны удовлетворять системе однородных уравнений

$$(\mathbf{R} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V} = 0,$$

или

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda_i & \rho \\ \rho & 1 - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{(1)} \\ V^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Решая эту систему уравнений и нормируя собственные векторы, получим [60, пример 24.2]

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Полагая $\rho > 0$, когда отсчеты шума коррелированы положительно, находим, что минимальному собственному значению $\lambda_2 = 1 - \rho$ соответствует вектор $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2$. Тогда оптимальный сигнал имеет вид

$$\mathbf{S}_2 = \sqrt{\mathcal{E}}\mathbf{V}_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

При этом статистика (2.32) приобретает форму

$$T(\mathbf{X}_2) = \mathbf{X}_2^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_2 = \mathbf{X}_2^T \mathbf{R}^{-1} \sqrt{\mathcal{E}} \mathbf{V}_2.$$

Поскольку

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}^{-1} \mathbf{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 - \rho^2} (1 + \rho) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

то получим

$$T(\mathbf{X}_2) = \frac{1}{1 - \rho} \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{2}} (x[0] \quad x[1]) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}/2}}{1 - \rho} (x[0] - x[1]).$$

За счет вычитания двух отсчетов, когда $x[0] - x[1] = s[0] - s[1] + w[0] - w[1]$, шум в силу положительной корреляции отсчетов сильно подавляется, при этом сигнальная составляющая по причине противофазности отсчетов (см. (2.41)) усиливается.

Преобразуем ОСШ:

$$d^2 = \mathbf{S}_2^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_2 = \mathcal{E} \mathbf{V}_2^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{V}_2.$$

Учитывая (2.42), получим

$$d^2 = \frac{\mathcal{E}}{1 - \rho} \mathbf{V}_2^T \mathbf{V}_2 = \frac{\mathcal{E}}{1 - \rho}.$$

При $\rho \rightarrow 0$ (когда шум полностью подавляется) $w[0] - w[1] \rightarrow 0$, $d^2 \rightarrow \infty$.

В случае достаточно большой длины вектора наблюдения стационарного шума справедлива статистика (2.33) и характеристика обнаружения Q_d (2.37), где ОСШ d^2 заменяется на величину

$$d^2 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|S(f)|^2}{S_w(f)} df. \quad (2.44)$$

Таким образом, чтобы максимизировать вероятность обнаружения, необходимо энергию сигнала $|S(f)|^2$ сосредоточить на частотах, где ЭС шума $S_w(f)$ минимален.

2.3. Применение алгоритмов обнаружения

Рассмотрим вначале бинарную задачу обнаружения (различения)

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & x[n] = s_0[n] + w[n]; \\ H_1 : \quad & x[n] = s_1[n] + w[n], \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.45)$$

где $s_0[n]$ и $s_1[n]$ — известные детерминированные сигналы, $w[n]$ — ГБШ с нулевым средним значением $E(w[n]) = 0$ и дисперсией σ^2 .

При равных априорных вероятностях передачи сигналов $s_0[n]$ и $s_1[n]$ $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$ принимается гипотеза H_1 , если выполняется неравенство

$$\frac{W(\mathbf{X}_N | H_1)}{W(\mathbf{X}_N | H_0)} > \gamma = \frac{P(H_0)}{P(H_1)} = 1.$$

Таким образом, в данном случае при обнаружении используется критерий наибольшего правдоподобия: выбирается та гипотеза, для которой условная ПРВ $W(\mathbf{X}_N | H_i)$ наибольшая, эта ПРВ имеет вид

$$W(\mathbf{X}_N | H_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s_i[n])^2 \right].$$

Следовательно, выбирается та гипотеза H_i , для которой минимальна величина

$$D_i^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - s_i[n])^2 = (\mathbf{X}_N - \mathbf{S}_{iN})^T (\mathbf{X}_N - \mathbf{S}_{iN}) = \|\mathbf{X}_N - \mathbf{S}_{iN}\|^2. \quad (2.46)$$

Обнаружитель, действующий по этому алгоритму, называется приемником минимальной дистанции (ПМД).

Согласно (2.46) принимается та гипотеза, чей сигнальный вектор ближе к вектору наблюдения \mathbf{X}_N .

Рассмотрим частный случай при $N = 2$. При этом следует определить, какой из сигналов \mathbf{S}_{02} или \mathbf{S}_{12} передан, если наблюдается вектор $\mathbf{X}_2 = (x[0]x[1])^T$. Геометрически эту ситуацию иллюстрирует рис. 2.9,а, где изображены на плоскости векторы \mathbf{X}_2 , \mathbf{S}_{02} и \mathbf{S}_{12} .

Необходимо принять гипотезу H_0 , если расстояние $\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{S}_{02}\|$ меньше, чем расстояние $\|\mathbf{X}_2 - \mathbf{S}_{12}\|$ и в противном случае принимается гипотеза H_1 . По изображению на рис. 2.9,а должна приниматься гипотеза H_0 .

В общем случае на плоскости строится граница решения, равноудаленная от точек \mathbf{S}_{02} и \mathbf{S}_{12} . Таким образом, принимается гипотеза H_0 , если точки \mathbf{X}_2 попадают в область R_0 и гипотеза H_1 , если точки \mathbf{X}_2 попадают в область R_1 (рис. 2.9,б).

Алгоритм приемника минимальной дистанции связан со статистикой $T_i(\mathbf{X}_N)$, $i = 1, 0$, поскольку

$$D_i^2 = \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] - 2 \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s_i[n] + \sum_{n=0}^{N-1} s_i^2[n].$$

Статистика $T_i(\mathbf{X}_N)$ (2.4) принимает вид

$$T_i(\mathbf{X}_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s_i[n] - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} s_i^2[n] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s_i[n] - \frac{\partial_i}{2}. \quad (2.47)$$

Таким образом, ПМД принимает гипотезу H_1 для которой статистика $T_i(\mathbf{X}_N)$ максимальна. Схема приемника минимальной дистанции изображена на рис. 2.10.

Вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ находится на основе теоремы о полной вероятности:

$$P_{\text{ош}} = P(H_1 | H_0)P(H_0) + P(H_0 | H_1)P(H_1),$$

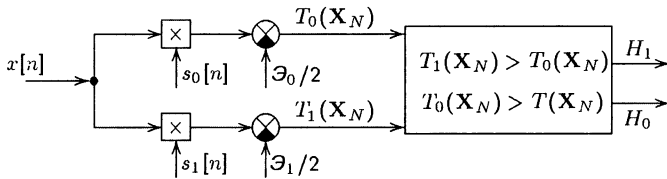


Рис. 2.10

где $P(H_i | H_j)$ — условная вероятность принять гипотезу H_i , если истинной является H_j .

В предположении равных априорных вероятностей $P(H_0) = P(H_1) = 1/2$ вероятность ошибки принимает вид

$$\begin{aligned} P_{\text{ош}} &= \frac{1}{2}[P(H_1 | H_0) + P(H_0 | H_1)] = \\ &= \frac{1}{2}[P\{T_1 > T_0 | H_0\} + P\{T_0 > T_1 | H_1\}] = \\ &= \frac{1}{2}[P\{T_1 - T_0 > 0 | H_0\} + P\{T_0 - T_1 > 0 | H_1\}]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Пусть $T(\mathbf{X}_N) = T_1(\mathbf{X}_N) - T_0(\mathbf{X}_N)$, тогда по (2.46) получим

$$T(\mathbf{X}_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n](s_1[n] - s_0[n]) - \frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_0). \quad (2.49)$$

Статистика $T(\mathbf{X}_N)$ является гауссовской как при H_0 , так и при H_1 . Найдем числовые характеристик этой статистики:

$$\begin{aligned} E(T | H_0) &= \sum_{n=0}^{N-1} s_0[n](s_1[n] - s_0[n]) - \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{2} = \\ &= \sum_{n=0}^N s_0[n]s_1[n] - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N s_0^2[n] - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N s_1^2[n] = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (s_1[n] - s_0[n])^2 = -\frac{1}{2} \|\mathbf{S}_{1N} - \mathbf{S}_{0N}\|^2 = m^{(0)}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Аналогично получаем

$$m^{(1)} = E(T | H_1) = \frac{1}{2} \|\mathbf{S}_{1N} - \mathbf{S}_{0N}\|^2 = -E(T | H_0).$$

Найдем дисперсию статистики:

$$\text{var}(T | H_0) = \text{var} \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n](s_1[n] - s_0[n]) | H_0 \right] =$$

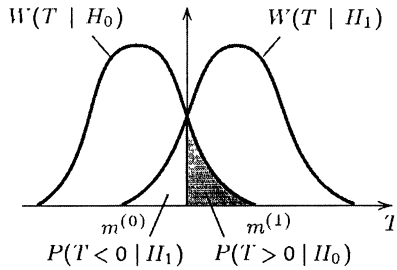


Рис. 2.11

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \text{var}(x[n])(s_1[n] - s_0[n])^2 = \sigma^2 \|\mathbf{S}_{1N} - \mathbf{S}_{0N}\|^2 = \mathbf{D}^{(0)}.$$

Аналогично находим

$$\mathbf{D}^{(1)} = \text{var}(T | H_1) = \sigma^2 \|\mathbf{S}_{1N} - \mathbf{S}_{0N}\|^2 = \text{var}(T | H_0) = \mathbf{D}^{(0)}. \quad (2.51)$$

Таким образом, условные ПРВ статистики $W(T | H_0)$ и $W(T | H_1)$ симметричны относительно оси ординат (рис. 2.11).

В силу симметрии условных ПРВ по (2.48) получим

$$P_{\text{ош}} = P\{T(\mathbf{X}_N) > 0 | H_0\}, \quad (2.52)$$

где согласно (2.50), (2.51) $T \sim N(m^{(0)}, \mathbf{D}^{(0)})$. Тогда по (2.52) вероятность ошибки может быть выражена через Q -функцию нормального распределения:

$$\begin{aligned} P_{\text{ош}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbf{D}^{(0)}}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2\mathbf{D}^{(0)}}(x - m^{(0)})^2\right] dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-m^{(0)}/\sqrt{\mathbf{D}^{(0)}}}^\infty e^{-u^2/2} du = Q\left(-\frac{m^{(0)}}{\sqrt{\mathbf{D}^{(0)}}}\right) = \\ &= Q\left[\frac{\frac{1}{2}\|\mathbf{S}_{1N} - \mathbf{S}_{0N}\|^2}{\sqrt{\sigma^2\|\mathbf{S}_{1N} - \mathbf{S}_{0N}\|^2}}\right]. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$P_{\text{ош}} = Q\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\|\mathbf{S}_{1N} - \mathbf{S}_{0N}\|^2}{\sigma^2}}\right). \quad (2.53)$$

Таким образом, с увеличением расстояния между сигналами $\|\mathbf{S}_{1N} - \mathbf{S}_{0N}\|$, вероятность ошибки уменьшается.

Зафиксируем среднюю энергию сигналов $\bar{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1)/2$, что предполагает равные априорные вероятности.

Выразим расстояние между сигналами через среднюю энергию $\bar{\mathcal{E}}$

и коэффициент корреляции сигналов ρ_s :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{S}_{1N} - \mathbf{S}_{0N}\|^2 &= \mathbf{S}_{1N}^T \mathbf{S}_{1N} - 2\mathbf{S}_{1N}^T \mathbf{S}_{0N} + \mathbf{S}_{0N}^T \mathbf{S}_{0N} = \\ &= 2\bar{\mathcal{E}} - 2\mathbf{S}_{1N}^T \mathbf{S}_{0N} = 2\bar{\mathcal{E}}(1 - \rho_s),\end{aligned}$$

где

$$\rho_s = \frac{\mathbf{S}_{1N}^T \mathbf{S}_{0N}}{\frac{1}{2}(\mathbf{S}_{1N}^T \mathbf{S}_{1N} + \mathbf{S}_{0N}^T \mathbf{S}_{0N})}, \quad (2.54)$$

причем $|\rho_s| \leq 1$. Например, если сигналы ортогональны, когда $\mathbf{S}_{1N}^T \mathbf{S}_{0N} = 0$, то $\rho_s = 0$.

По (2.52) получим

$$P_{\text{ош}} = Q\left(\sqrt{\frac{\bar{\mathcal{E}}(1 - \rho_s)}{2\sigma^2}}\right). \quad (2.55)$$

Для того чтобы минимизировать вероятность ошибки, необходимо выбрать такие сигналы, которые гарантируют условие $\rho_s = -1$.

Рассмотрим частные случаи.

Пример 2.4. Сигналы фазовой телеграфии (ФТ-сигналы, Phase Shift Keying, PSK).

В данном случае рассматривается когерентный ФТ-сигнал, так как предполагается, что сигнал известен полностью. Рассмотрим двоичный ФТ-сигнал (ДФТ-сигнал) (англ. binary PSK, BPSK)

$$\begin{aligned}s_0[n] &= A \cos 2\pi f_0 n; \\ s_1[n] &= A \cos(2\pi f_0 n + \pi) = -A \cos 2\pi f_0 n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{S}_{1N} = -\mathbf{S}_{0N}$.

При $N = 2$ и $f_0 = 0,25$ диаграмма сигналов изображена на рис. 2.12. Очевидно, здесь $\rho_s = -1$ (сигналы противофазны), так как вероятность ошибки минимизируется. Каждый сигнал несет одну и ту же энергию $\bar{\mathcal{E}} \approx NA^2/2$, так что $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$. Согласно (2.55)

$$P_{\text{ош}} = Q(\sqrt{\mathcal{E}/\sigma^2}), \quad (2.56)$$

здесь $d^2 = \mathcal{E}/\sigma^2$ — ОСШ.

График зависимости $P_{\text{ош}}(d^2)$, при $d_{\text{дБ}}^2 = 10 \lg(\mathcal{E}/\sigma^2)$ изображен на рис. 2.13.

Пример 2.5. Сигналы частотной телеграфии (ЧТ-сигналы) (Frequency Shift Keying, FSK).

Рассматриваются когерентные сигналы

$$\begin{aligned}s_0[n] &= A \cos \pi f_0 n; \\ s_1[n] &= A \cos 2\pi f_1 n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.\end{aligned}$$

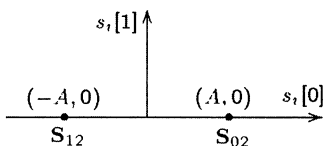


Рис. 2.12

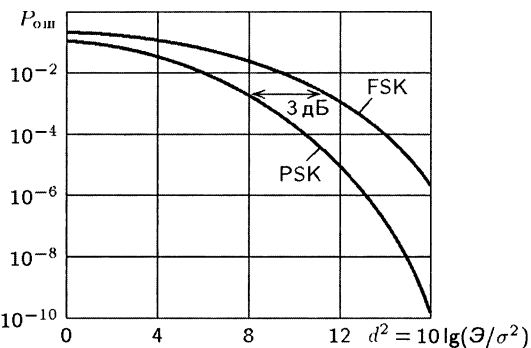


Рис. 2.13

Коэффициент ρ_s сигнальной корреляции зависит от величины частотного сдвига (девиации частоты). При $|f_1 - f_0| \gg 1/2N$ сигналы можно считать приблизительно ортогональными и имеющими приблизительно одну и ту же энергию $\mathcal{E} \approx NA^2/2$. Таким образом, по (2.55) находим

$$P_{\text{ош}} = Q(\sqrt{\mathcal{E}/2\sigma^2}). \quad (2.57)$$

Зависимость $P_{\text{ош}}(d^2)$ изображена на рис. 2.13. Сравнивая помехоустойчивость ДФТ и ЧТ по рис. 2.13, по (2.56) и (2.57) замечаем, что средняя энергия для ЧТ-сигнала должна быть в два раза больше чем для ДФТ-сигналов, чтобы обеспечить ту же вероятность ошибки.

Пример 2.6. Случай m -кратных сигналов. Если предстоит выбрать один из M сигналов $\{s_0[n], s_1[n], \dots, s_{M-1}[n]\}$ при равных их априорных вероятностях, тогда принимается гипотеза H_i , для которой $W(\mathbf{X}_N | H_i)$ максимальна.

Оптимальным приемником и в этом является приемник минимальной дистанции (ПМД). Таким образом, принимается гипотеза H_k , если среди всех статистик $\{T_0(\mathbf{X}_N), T_1(\mathbf{X}_N), \dots, T_{M-1}(\mathbf{X}_N)\}$, максимальной является статистика

$$T_k(\mathbf{X}_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s_k[n] - \frac{\mathcal{E}_k}{2}.$$

Схема оптимального приемника изображена на рис. 2.14.

Вычислить вероятность ошибки в общем случае весьма затруднительно, но в предположении ортогональности сигналов гауссовские СВ будут некоррелированы, а следовательно, и независимы. В результате по (2.57) можно получить условную ковариацию вида

$$\text{cov}(T_i, T_j | H_l) = E \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} w[m]s_i[m] \sum_{n=0}^{N-1} w[n]s_j[n] \right\} =$$

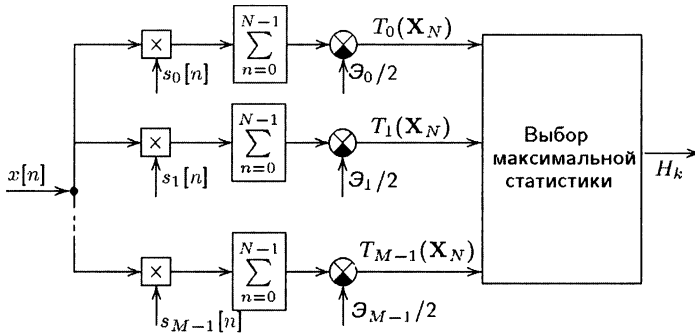


Рис. 2.14

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} E(w[m]w[n])s_i[m]s_j[n] = \sigma^2 \sum_{n=0}^{N-1} s_i[n]s_j[n] = 0,$$

при $i \neq j$.

В последнем случае использовалось условие ортогональности сигналов. В дальнейшем предположим равенство сигнальных энергий: $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}$. Ошибка возникает, если H_i является истинной, а статистика T_i при этом не максимальна. Следовательно, справедливо соотношение

$$P_{\text{ош}} = \sum_{i=0}^{M-1} P\{T_i < \max(T_0, \dots, T_{i-1}, T_{i+1}, \dots, T_{M-1} \mid H_i)\} P(H_i).$$

Используя симметрию всех условных ПРВ, как и в случае рис. 2.11 (при $M = 2$), получим

$$P_{\text{ош}} = P\{T_0 < \max(T_1, T_2, \dots, T_{M-1}) \mid H_0\}.$$

При условии гипотезы H_0

$$T_i(\mathbf{X}_N) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s_i[n] - \frac{\mathcal{E}}{2},$$

так что

$$T_i(\mathbf{X}_N) \sim \begin{cases} N(\mathcal{E}/2, \sigma^2 \mathcal{E}) & \text{при } i = 0; \\ N(-\mathcal{E}/2, \sigma^2 \mathcal{E}) & \text{при } i \neq 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P_{\text{ош}} &= 1 - P\{T_0 > \max(T_1, T_2, \dots, T_{M-1}) \mid H_0\} = \\ &= 1 - P\{T_1 < T_0, T_2 < T_0, \dots, T_{M-1} < T_0 \mid H_0\} = \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} P\{T_1 < t, T_2 < t, \dots, T_{M-1} < t \mid T_0 = t \mid H_0\} W_{T_0}(t) dt = \end{aligned}$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{M-1} P\{T_i < t \mid H_0\} W_{T_0}(t) dt.$$

Здесь учтена независимость статистик T_i . Учтем (2.58), тогда получим

$$P_{\text{ош}} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{M-1} \left(\frac{t + \mathcal{E}/2}{\sqrt{\sigma^2 \mathcal{E}}} \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 \mathcal{E}}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2 \mathcal{E}} \left(t - \frac{\mathcal{E}}{2} \right)^2 \right] dt,$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz$.

Делая подстановку $u = (t + \mathcal{E}/2)/\sqrt{\sigma^2 \mathcal{E}}$, окончательно получим

$$P_{\text{ош}} = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{M-1}(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(u - \sqrt{\frac{\mathcal{E}}{\sigma^2}} \right)^2 \right] du. \quad (2.59)$$

Таким образом, вероятность ошибки зависит от числа сигналов M и ОСШ $d^2 = \mathcal{E}/\sigma^2$.

Эта зависимость изображена на рис. 2.15 при $M = 2, 4, 8, 16$ в диапазоне $d_{\text{дБ}} = 10 \lg(\mathcal{E}/\sigma^2)$ от 0 до 16 дБ. Увеличение M ведет к увеличению вероятности ошибки. Это происходит по той причине, что приемник должен различать большое число сигналов, таких, у которых межсигнальное расстояние не увеличивается. Чтобы убедиться в этом, потребуем для M ортогональных сигналов условия $N \geq M$. В качестве примера рассмотрим два случая (рис. 2.16).

Дистанция между сигналами одна и та же при $M = 2$ и при $M = 3$, так что энергия сигналов не увеличивается с ростом N . На рис. 2.16 каждый сигнал имеет энергию $\mathcal{E} = 1$.

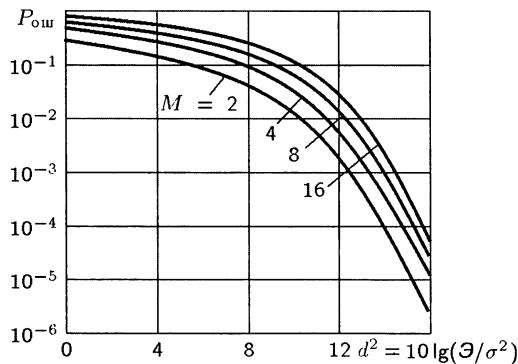


Рис. 2.15

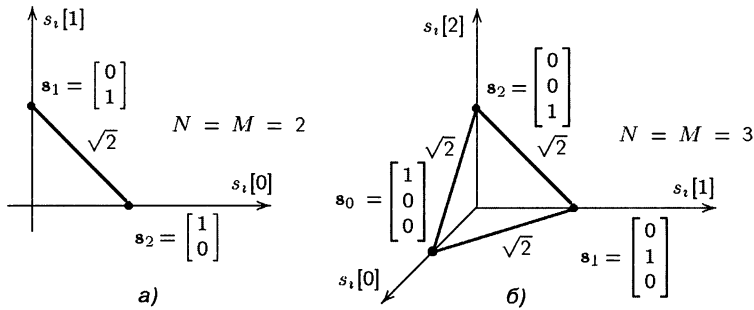


Рис. 2.16

2.4. Линейная модель сигнала

Уравнение наблюдения в данном случае имеет вид

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{W}_N,$$

где \mathbf{X}_N — $(N \times 1)$ -вектор, $\mathbf{X}_N = (x[0], x[1], \dots, x[N-1])^T$; \mathbf{W}_N — $(N \times 1)$ -вектор, $\mathbf{W}_N = (w[0], w[1], \dots, w[N-1])^T$; \mathbf{H} — $(N \times p)$ -матрица; $N > p$, $\boldsymbol{\theta}$ — $(p \times 1)$ -вектор параметров; $w[n]$ — гауссовские СВ с нулевым средним значением $E(W[n]) = 0$ и корреляционной матрицей \mathbf{R} , $\mathbf{W}_N \sim N(0, \mathbf{R})$.

Параметр $\boldsymbol{\theta}$ предполагается известным $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$, так что сигнал $\mathbf{S}_N = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}_1$ — детерминированный, известный полностью.

Таким образом, при гипотезе H_1 $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_1$, при гипотезе H_0 $\boldsymbol{\theta} = 0$. Простой пример такой модели — обнаружение постоянного сигнала, когда $\mathbf{H} = (1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$, $\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{A}$, $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$.

Задача обнаружения следующая:

$$\begin{aligned} H_0: \quad \mathbf{X}_N &= \mathbf{W}_N; \\ H_1: \quad \mathbf{X}_N &= \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}_1 + \mathbf{W}_N. \end{aligned}$$

Тогда, согласно (2.32), принимается гипотеза H_1 , если

$$T(\mathbf{X}_N) = \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}_N = \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}_1 > \gamma'. \quad (2.60)$$

Характеристики обнаружения определяются по (2.37) при соответствующем значении вектора \mathbf{S}_N .

Пример 2.7. Обнаружение гармонического сигнала.

Предположим, что требуется обнаружить гармонический сигнал $s[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \varphi)$ в ГБШ.

Предварительно запишем сигнал в виде

$$s[n] = A \cos \varphi \cos 2\pi f_0 n - A \sin \varphi \sin 2\pi f_0 n = a \cos 2\pi f_0 n + b \sin 2\pi f_0 n.$$

Задача обнаружения следующая:

$$\begin{aligned} H_0 : x[n] &= w[n]; \\ H_1 : x[n] &= a \cos 2\pi f_0 n + b \sin 2\pi f_0 n + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где $w[n]$ — ГБШ с дисперсией σ^2 .

Гипотезе H_1 соответствует линейная модель

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2\pi f_0 & \sin 2\pi f_0 \\ \vdots & \vdots \\ \cos 2\pi f_0(N-1) & \sin 2\pi f_0(N-1) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\theta}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I},$$

при этом $0 < f_0 < 1/2$.

Согласно статистике (2.60)

$$T(\mathbf{X}_N) = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}_N^T \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}_1.$$

Масштабируя, получаем новую статистику

$$T'(\mathbf{X}_N) = \frac{2}{N} \mathbf{X}_N^T \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}_1 = \frac{2}{N} (\mathbf{H}^T \mathbf{X}_N) \boldsymbol{\theta}_1,$$

где

$$\frac{2}{N} \mathbf{H}^T \mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos 2\pi f_0 n \\ \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin 2\pi f_0 n \end{bmatrix}.$$

Обозначим оценку $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{a} \quad \hat{b}]$ (см. задачу 2.27), получим

$$T'(\mathbf{X}_N) = \hat{a}a + \hat{b}b.$$

Таким образом, статистика представляет собой корреляционный момент истинного значения $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\theta}_1 = (a, b)^T$ с оценкой $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Очевидно, что если принимается гипотеза H_0 (H_0 — истинна), то $\hat{a} \approx E(\hat{a}) \approx 0$, $\hat{b} \approx E(\hat{b}) \approx 0$, так что $T'(\mathbf{X}_N) = 0$. Если истинна H_1 , то $\hat{a} \approx E(\hat{a}) \approx a$, $\hat{b} \approx E(\hat{b}) \approx b$, так что $T'(\mathbf{X}_N) = a^2 + b^2$ (если $f_0 = k/N$, при $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$, то тогда $E(\hat{a}) = a$ и $E(\hat{b}) = b$). Значение $T'(\mathbf{X}_N) = a^2 + b^2$ пропорционально мощности сигнала.

Для обобщения полученного результата необходимо воспользоваться формулой оценки [66, с. 97] $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}_N$. Используя (2.60), находим

$$\begin{aligned} T(\mathbf{X}_N) &= \mathbf{X}_N^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}_1 = [(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}_N]^T \boldsymbol{\theta}_1 = \\ &= [(\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \hat{\boldsymbol{\theta}}]^T \boldsymbol{\theta}_1 = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \boldsymbol{\theta}_1. \end{aligned}$$

Используем свойство корреляции оценки $\hat{\theta}$:

$$\mathbf{R}_{\hat{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1}.$$

Тогда получим, что принимается гипотеза H_1 , если

$$T(\mathbf{X}_N) = \hat{\theta}^T \mathbf{R}_{\hat{\theta}}^{-1} \theta_1 > \gamma'. \quad (2.61)$$

Сравнивая (2.61) и (2.32), находим, что полученная статистика аналогична статистике в задаче обнаружения известного сигнала \mathbf{S}_N в коррелированном шуме с коррелированной матрицей \mathbf{R} , если воспользоваться соответствиями

$$\mathbf{X}_N \rightarrow \hat{\theta}; \quad \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_{\hat{\theta}}; \quad \mathbf{S}_N \rightarrow \theta_1.$$

В заключение по (2.37) находим характеристики обнаружения

$$Q_d = Q(Q^{-1}(Q_0) - \sqrt{\theta_1^T \mathbf{R}_{\hat{\theta}}^{-1} \theta_1}). \quad (2.62)$$

Задачи

2.1. Пусть $s[n] = (-1)^n$ при $n = 0, 1, 2, 3$ и $s[n] = 0$ при других значения n . Найти ИХ ЦСФ и значение сигнала на его выходе.

2.2. Используя (2.23), показать, что сигнал на выходе ЦСФ максимизируется при $n = N - 1$.

2.3. Рассмотреть обнаружение сигнала $s[n] = A \cos 2\pi f_0 n$ при $0 < f_0 < 1/2$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, в присутствии ГБШ. Найти сигнал на выходе ЦСФ в точке $n = N-1$. Предполагать, что сигнал задерживается на время $n_0 > 0$, так что принимается его версия $s[n - n_0]$. Используя тот же ЦСФ, что и ранее найти сигнал на выходе ЦСФ при $n = N - 1$ как функцию n_0 . Предположить, что N достаточно велико так, что среднее значение синусоиды равно нулю, когда происходит усреднение за несколько периодов.

2.4. Пусть необходимо обнаружить неизвестный сигнал $s[n]$, не равный нулю только при $n = 0, 1, \dots, N-1$; аддитивный шум — ГБШ с дисперсией σ^2 . Считать, что интервал наблюдения бесконечен: $-\infty < n < \infty$. Пусть $h[n]$ — отсчеты ИХ линейного ЦФ. Тогда отклик ЦФ имеет вид свертки

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k].$$

Если отклик ЦФ отсчитывается в точке $n = N - 1$, тогда ОСШ может быть определено в виде

$$d^2 = \frac{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[N-1-k]s[k] \right)^2}{E \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[N-1-k]w[k] \right)^2 \right]}.$$

Показать, что ОСШ максимизируется выбором как в ЦСФ или $h[n] = s[N-1-n]$ для $n = 0, 1, \dots, N-1$ и $h[n] = 0$ при других значениях n . Таким образом,

использование шумовых отсчетов вне интервала существования сигнала не улучшает характеристику обнаружения (величину d^2), если отсчеты шума не коррелированы.

Указание: использовать предположение, что $s[k] = 0$ для k вне интервала $[0, N - 1]$.

2.5. В предыдущей задаче показано, что ЦСФ оптимален даже для бесконечного интервала наблюдения. В данной задаче показать, что был исследован не общий случай, когда шум коррелирован. Повторить решение задачи 2.4, но в предположении, что отсчеты шума $\{w[0], w[1], \dots, w[N - 1]\}$ представляет собой ГБШ, но вне интервала $[0, N - 1]$, шум — периодический процесс, когда $w[n] = w[n + N]$. Найти ОСШ на выходе ЦСФ, пользуясь выражениями в задаче 2.4, если ИХ ЦФ имеет вид

$$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, 1, \dots, N - 1; \\ -1 & \text{при } n = N, N + 1, \dots, 2N - 1; \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases}$$

Найти отклик ЦФ при $n = N - 1$. Объяснить результаты.

2.6. Найти алгоритм обнаружения известного сигнала $s[n] = Ar^n$ при $n = 0, 1, \dots, N - 1$ в аддитивном ГБШ с дисперсией σ^2 . Построить характеристики обнаружения. Объяснить, что получится при $N \rightarrow \infty$ и $0 < r < 1$; $r = 1$; $r > 1$.

2.7. Пусть передается сигнал $s[n] = A \cos 2\pi f_0 n$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Прием осуществляется в ГБШ с дисперсией $\sigma^2 = 1$. Обнаружитель должен быть рассчитан при ВЛТ $Q_0 = 10^{-8}$ при $f_0 = 0,25$ и $N = 25$. Найти зависимость вероятности обнаружения от амплитуды A .

2.8. Необходимо выбрать сигнал для лучшего обнаружения в ГБШ. Рассмотреть два сигнала $s_1[n] = A$ и $s_2[n] = A(-1)^n$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Определить, какой из сигналов обеспечивает лучшие характеристики обнаружения.

2.9. Рассмотреть обнаружение сигнала $s[n] = A \cos 2\pi f_0 n$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$, в ГБШ с дисперсией σ^2 . Определить ОСШ на входе в виде $d_1^2 = A^2/2\sigma^2$. Найти ОСШ на выходе ЦСФ. Затем найти ЧХ ЦСФ и найти зависимость АЧХ от N . Объяснить, почему ЦСФ улучшает обнаруживаемость синусоиды. Положить $0 < f_0 < 1/2$ и взять большое значение N .

Указание. Воспользоваться соотношением

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{ian} = e^{i(N-1)\alpha/2} \frac{\sin(N\alpha/2)}{\sin(\alpha/2)}.$$

2.10. Найти обеляющую матрицу \mathbf{D} при корреляционной матрице шума

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Указание. Использовать пример 2.3 и разложение $\mathbf{V}^T \mathbf{R} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}$, где $\mathbf{V} = [v_1, v_2]$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, и равенство $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$.

2.11. Рассмотреть обнаружение детерминированного сигнала в гауссовском шуме \mathbf{W} , когда $\mathbf{W} \sim N(0, \mathbf{R})$. Если $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}$, где \mathbf{D} — неособенная матрица, то можно получить эквивалентный обнаружитель, основанный на преобразовании вектора $\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{x}$. Найти обнаружитель Неймана-Пирсона, вычисляя ОП на основе вектора \mathbf{y} .

2.12. Известно, что собственные значения $N \times N$ симметрической теплицевой ковариационной матрицы \mathbf{K} для стационарного СП $w[n]$, имеющего ЭС $S_w(f)$, аппроксимируются при $N \rightarrow \infty$ величиной

$$\lambda_k = S_w(k/N), \quad k = 0, 1, \dots, N - 1,$$

и соответствующими собственными векторами

$$\mathbf{v}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} [1; e^{i2\pi k/N}; e^{i2\pi 2k/N}; \dots; e^{i2\pi (N-1)k/N}]^T, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Используя известные свойства собственных значений и собственных векторов, показать, что

$$\mathbf{X}_N^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}_N \approx \int_{-1/2}^{1/2} \frac{X(f)S^*(f)}{S_w(f)} df$$

при больших N . Здесь

$$S(f) = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]e^{-i2\pi fn}; \quad X(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-i2\pi fn}.$$

2.13. Используя ту же асимптотику, что и в задаче 2.12, показать, что при больших N справедливо соотношение

$$d^2 = \mathbf{S}_N^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}_N \approx \int_{-1/2}^{1/2} \frac{|S(f)|^2}{S_w(f)} df.$$

2.14. Найти оптимальный линейный фильтр обнаружителя известного сигнала при коррелированном стационарном гауссовском шуме при бесконечном интервале наблюдения, т.е. при использовании отсчетов шума в том числе и вне интервала существования сигнала. Задача обнаружения такова:

$$\begin{aligned} H_0: & \quad x[n] = w[n] \quad \text{при } -\infty < n < \infty; \\ H_1: & \quad x[n] = \begin{cases} s[n] + w[n] & \text{при } 0 \leq n \leq N-1; \\ w[n] & \text{при других } n, \end{cases} \end{aligned}$$

где $w[n]$ — гауссовский шум, имеющий ЭС $S(f)$.

На выходе фильтра ОСШ в момент $n = N-1$ имеет вид

$$d^2 = \frac{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]s[N-1-k] \right)^2}{E \left[\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]w[N-1-k] \right)^2 \right]}.$$

Следует заметить, что в силу того, что фильтрация осуществляется на бесконечном интервале времени ($-\infty < n < \infty$), то фильтр в общем случае будет физически неосуществимым.

Показать, что ОСШ d^2 может быть записано в частотной области в виде

$$d^2 = \frac{\left(\int_{-1/2}^{1/2} H(f)S(f)e^{i2\pi f(N-1)} df \right)^2}{\int_{-1/2}^{1/2} |H(f)|^2 S_w(f) df}.$$

Использовать неравенство Коши-Буняковского

$$\left| \int_{-1/2}^{1/2} g(f)h(f) df \right|^2 \leq \int_{-1/2}^{1/2} |g(f)|^2 df \int_{-1/2}^{1/2} |h(f)|^2 df.$$

Равенство обеспечивается тогда и только тогда, когда $g(f) = ch^*(f)$ при комплексной постоянной c . Показать при этом, что d^2 максимизируется при

$$H(f) = \frac{S^*(f)e^{-i2\pi f(N-1)}}{S_w(f)}.$$

2.15. Найти обнаружитель Неймана-Пирсона и его характеристики обнаружения при обнаружении известного сигнала $s[n] = A$ при $n = 0, 1, \dots, N-1$, где $A > 0$ в коррелированном гауссовском шуме. Шумовой $(N \times 1)$ -вектор характеризуется соотношением $W_n \sim N(0, \mathbf{R})$, где $\mathbf{R} = \sigma^2 \text{diag}(1, r, \dots, r^{N-1})$ и $r > 0$.

Что произойдет при $N \rightarrow \infty$?

2.16. В задаче 2.8 взять гауссовский шум с КФ $r_w[k] = P + \sigma^2 \delta[k]$, $P > 0$, так чтобы ковариационная матрица имела вид $\mathbf{K} = \sigma^2 \mathbf{I} + \mathbf{P}[1; 1]^T$.

Найти наилучший сигнал и определить ОСШ $d^2 = \mathbf{S}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{S}$.

2.17. Известный сигнал должен быть обнаружен в стационарном гауссовском авторегрессионном шуме со спектральной плотностью

$$S_w(f) = \frac{\sigma^2}{|1 + a \exp(-i2\pi f)|^2}.$$

Найти асимптотический обнаружитель Неймана-Пирсона со статистикой (2.33) и показать, что его статистика приближенно имеет вид

$$T(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] + ax[n-1])(s[n] + as[n-1]),$$

где, по предположению, $x[n]$ наблюдается при $n = 0, 1, \dots, N-1$. Объяснить действия статистики в терминах обеления и согласованной фильтрации.

Указание. Заметить, что шум обеляется ЦФ с системной функцией $A(z) = 1 + az^{-1}$.

2.18. Для приемника минимальной дистанции в случае бинарной передачи показать, что границей в пространстве R^N является перпендикулярная к линии, соединяющей \mathbf{S}_{0N} и \mathbf{S}_{1N} , граница, равноудаленная от \mathbf{S}_{0N} и \mathbf{S}_{1N} , при этом исходить из равенства $\|\mathbf{X}_N - \mathbf{S}_{0N}\| = \|\mathbf{X}_N - \mathbf{S}_{1N}\|$.

2.19. Для бинарной передачи при $N = 2$ использовать $\mathbf{S}_{02} = [1; -1]^T$ и $\mathbf{S}_{12} = [1; 1]^T$. Принимается сигнал в аддитивной смеси с ГБШ, имеющего дисперсию $\sigma^2 = 1$. Нарисовать решающую границу в R^2 , определяющую минимизацию вероятности ошибки, без предположения о равенстве априорных вероятностей. Объяснить результаты.

2.20. Доказать, что сигнальный коэффициент корреляции ρ_s по (2.54) удовлетворяет неравенству $|\rho_s| \leq 1$.

2.21. Показать, что сигналы $s_0[n] = A \cos 2\pi f_0 n$ и $s_1[n] = A \cos 2\pi f_1 n$ при $n = 0, 1, \dots, N-1$ приблизительно ортогональны, если $|f_1 - f_0| \gg 1/2N$ и $0 < f_0 < 1/2$, $0 < f_1 < 1/2$.

Указание. При достаточно большом N можно использовать результат

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos \alpha n = \frac{1}{N} \text{Re} \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\alpha n} \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \operatorname{Re} \left(\frac{\sin N\alpha/2}{\sin \alpha/2} e^{i(N-1)\alpha/2} \right) \approx \frac{\sin N\alpha}{2N \sin \alpha/2}.$$

2.22. Для когерентного ЧТ-сигнала найти разность частот, которая минимизирует вероятность ошибки. Предположить N достаточно большим. Сначала показать, что

$$\rho_s \approx \frac{\sin 2\pi(f_1 - f_0)N}{2N \sin \pi(f_1 - f_0)},$$

используя указания к задаче 2.21.

2.23. Для бинарной передачи используются сигналы $s_0[n] = 0$ и $s_1[n] = A \cos 2\pi f_1 n$ при $n = 0, 1, \dots, N-1$. Найти вероятность ошибки, если сигнал принимается на фоне ГБШ с дисперсией σ^2 . Сравнить данную бинарную (АТ) систему с когерентной ФТ и ЧТ при равной пиковой мощности и одной и той же амплитуде A . Предположить, что N достаточно велико.

2.24. При амплитудно-импульсной модуляции (АИМ) передается один из уровней, так что $s_i[n] = A_i$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $i = 0, 1, \dots, M-1$. Найти оптимальный приемник при ГБШ на входе с дисперсией σ^2 при условии минимизации вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$. Найти минимум $P_{\text{ош}}$ при $M = 2$. Если средняя энергия сигнала ограничена, то каким должны быть выбраны амплитуды A_0 и A_1 .

2.25. Показать, что (2.59) при $M = 2$ приводится к виду $P_{\text{ош}} = Q(\sqrt{\mathcal{E}/2\sigma^2})$, что соответствует (2.55) при $\rho_s = 0$ и $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$.

Указание. В полученном двойном интервале сделать замену переменной $v = u - \sqrt{\mathcal{E}/\sigma^2}$, а также использовать преобразование

$$\begin{bmatrix} t' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ v \end{bmatrix}.$$

Последнее преобразование соответствует повороту оси на $\pi/4$.

2.26. Показать, что в примере 2.7 вектор $(\hat{a}\hat{b})^T$ является оценкой вектора $(ab)^T$, определяя среднее значение оценки при условии, что гипотеза H_1 истинна. Предположить, что N достаточно велико.

2.27. Пусть требуется обнаружить прямую $s[n] = A + Bn$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, в ГБШ с дисперсией σ^2 . A и B известны. Показать, что данные могут быть записаны в форме линейной модели. Найти обнаружитель Неймана–Пирсона, его характеристики обнаружения.

3 Обнаружение полностью известных сигналов (непрерывные процессы)

3.1. Обнаружение сигнала при аддитивном шуме на входе

Пусть наблюдается аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad (3.1)$$

Положим, что сигнал $s(t)$ задан на интервале $t \in [0, \tau_n]$, где τ_n — длительность сигнала, $\tau_n \leq T$ (T — время наблюдения). Вне указанного интервала сигнал равен нулю. Шум $n(t)$ в аддитивной смеси представляет собой квазибелый шум с гауссовской ПРВ, имеющей равномерный двухсторонний энергетический спектр

$$S_n(f) = \begin{cases} N_0/2 & \text{при } |f| < f_n; \\ 0 & \text{при } |f| > f_n. \end{cases} \quad (3.2)$$

Наблюдатель принимает ту или иную гипотезу (H_0 или H_1) на основе отсчетов напряжения $r_k = r(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, предполагается, что в процессе измерения производится квантование по времени напряжения $r(t)$ из (3.1) с постоянным шагом (интервалом дискретизации), равным $\Delta t = 1/2B$. Отсчеты выбираются в точках $t_k = k\Delta t$, $1 \leq k \leq n$. Они описываются совместными ПРВ $W_0(\mathbf{r})$ и $W_1(\mathbf{r})$, соответствующими гипотезам H_0 и H_1 ; $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$. Наблюдатель (приемник) вычисляет отношение правдоподобия $\Lambda(\mathbf{x})$ и сравнивает его с порогом Λ_0 , величина которого зависит от принятого критерия решения (байесовского, минимаксного, Неймана-Пирсона и т.д.). Принимается гипотеза H_1 (сигнал обнаруживается), если $\Lambda(\mathbf{x}) > \Lambda_0$.

Обнаружитель сигнала (приемник) характеризуется вероятностью обнаружения $Q_d = 1 - Q_1$ и вероятностью ложной тревоги Q_0 , в плоскости которых (Q_0, Q_d) строятся рабочие характеристики приемника (РХП). Найдем эти величины.

Если интервал дискретизации $\Delta t > 1/2B$, то отсчеты можно считать независимыми и распределенными по нормальному закону. Среднее значение шума по условию (3.2) равно нулю. Дисперсия шума

$$\sigma_n^2 = \int_{-B}^B \frac{N_0}{2} df = N_0 B.$$

Тогда в случае гипотезы H_0 совместная ПРВ $W_0(\mathbf{x})$ имеет вид

$$W_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{n/2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{r_k^2}{2\sigma_n^2}\right). \quad (3.3)$$

При наличии сигнала отсчеты напряжения, обусловленные шумом, имеют вид разности $r_k - s_k$, где $s_k = s(t_k)$. Поэтому совместная ПРВ, соответствующая гипотезе H_1 , имеет вид

$$W_1(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi\sigma_n^2)^{n/2}} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{(r_k - s_k)^2}{2\sigma_n^2}\right).$$

Задача обнаружения сигнала, таким образом, сводится к проверке гипотез H_0 и H_1 по известному алгоритму при $a_0 = 0$ и $a_1 = s_k$ (см. пример 1.7).

Отношение правдоподобия $\Lambda(\mathbf{r})$ после преобразования принимает вид

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \exp\left[\sum_{k=1}^n \frac{2s_k r_k - s_k^2}{2\sigma_n^2}\right].$$

Наблюдатель принимает гипотезу H_1 (сигнал обнаруживается с вероятностью Q_d), если $\Lambda(\mathbf{x}) > \Lambda_0$. В силу монотонности экспоненциальной функции, как в примере 1.7, в этом случае получаем эквивалентное неравенство

$$\Delta t \sum_{k=1}^n s_k r_k > \frac{\Delta t}{2} \sum_{k=1}^n s_k^2 + \sigma_n^2 \Delta t \ln \Lambda_0. \quad (3.4)$$

Итак, наблюдатель свое решение основывает на значении

$$G_n = \Delta t \sum_{k=1}^n s_k r_k \quad (3.5)$$

и сравнении его с порогом G_0 , зависящим от принятого критерия обнаружения.

Заметим, что поверхность решения (при известных значениях s_k) представляет гиперплоскость

$$\sum_{k=1}^n s_k r_k = \text{const},$$

перпендикулярную направляющему вектору $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$.

С увеличением ширины полосы $2B$ шума $n(t)$ интервал дискретизации Δt может быть сделан малым по сравнению с интервалом наблюдения, таким, что $\Delta t \ll T$, тогда можно положить $n \rightarrow \infty$. При

этом, переходя к пределу, получим корреляционный интеграл по (3.5)

$$G = \int_0^T s(t)r(t) dt. \quad (3.6)$$

Величина G является случайной в силу случайности $r(t)$ из-за наличия шума $n(t)$. Подставляя $r(t)$ из (3.1) в (3.6), получим

$$G = \int_0^T s^2(t) dt + \int_0^T s(t)n(t) dt. \quad (3.7)$$

Найдем среднее значение $E(G)$ и дисперсию $D(G)$ случайной величины G .

При отсутствии сигнала, очевидно, $E(G) = 0$, при наличии сигнала в силу равенства $E[n(t)] = 0$

$$E(G) = \mathcal{E},$$

где $\mathcal{E} = \int_0^T s^2(t) dt$ — энергия сигнала.

Таким образом, имеем $E[G | H_0] = 0$, $E[G | H_1] = \mathcal{E}$. Дисперсия

$$D(G) = \int_0^T \int_0^T s(t_1)s(t_2)E[n(t_1)n(t_2)] dt_1 dt_2 \quad (3.8)$$

одинакова при той и другой гипотезе.

По предположению шум $n(t)$ белый, поэтому его корреляционная функция $R_n(t_1, t_2) = (N_0/2)\delta(t_1 - t_2) = R_n(\tau)$. Подставляя $R_n(\tau)$ в (3.8) и используя фильтрующее свойство дельта-функции, получим

$$D = D(G) = \frac{N_0\mathcal{E}}{2}. \quad (3.9)$$

В процедуре обнаружения сигнала величина G сравнивается с порогом G_0 , значение которого зависит от выбранного критерия обнаружения. Если $G > G_0$, то принимается гипотеза H_1 (сигнал обнаружен).

Очевидно, закон распределения случайной величины G нормальный, так как это распределение совпадает с законом распределения шума:

$$W_0(G) = \frac{1}{\sqrt{D}2\pi} \exp\left(\frac{-G^2}{2D}\right), \quad D = \frac{N_0\mathcal{E}}{2}, \quad (3.10)$$

$$W_1(G) = \frac{1}{\sqrt{D}2\pi} \exp\left(-\frac{(G - \mathcal{E})^2}{2D}\right). \quad (3.11)$$

Вероятность ложной тревоги Q_0 и обнаружения Q_d находятся по

формулам:

$$Q_0 = \int_{G_0}^{\infty} W_0(G) dG; \quad Q_d = \int_{G_0}^{\infty} W_1(G) dG. \quad (3.12)$$

Интегрируя с учетом (3.10) и (3.11), получим

$$Q_0 = \operatorname{erfc} x = Q(x), \quad Q_d = \operatorname{erfc}(x - d) = Q(x - d), \quad (3.13)$$

где $x = G_0 \sqrt{\frac{2}{N_0 \mathcal{E}}}$, $d = \sqrt{\frac{2 \mathcal{E}}{N_0}}$; $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du$.

Величина d называется отношением сигнал/шум (ОСШ) и характеризуется отношением энергии сигнала к двухсторонней спектральной плотности шума. Отношение сигнал/шум не зависит непосредственно от формы (вида) сигнала. Следовательно, характеристики обнаружителя Q_0 , Q_d , РХП при полностью известном сигнале не зависят от его формы. Для рассматриваемого случая полностью известного сигнала характеристики обнаружения $Q_d(d)$ при $Q_0 = \text{const}$ изображены на рис. 3.1 (здесь параметром служит $Q_0 = \text{const}$), РХП представлена на рис. 1.2.

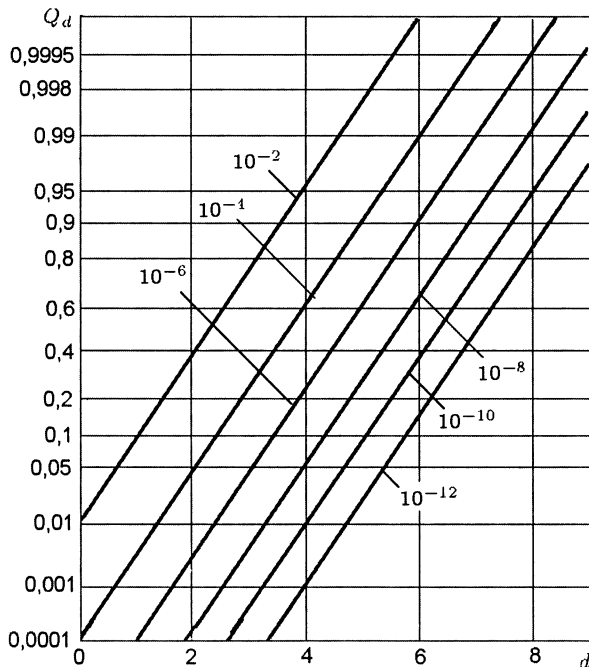


Рис. 3.1

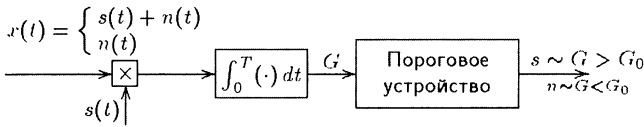


Рис. 3.2

Величина порога Λ_0 отношения правдоподобия $\Lambda(G) = \frac{W_1(G)}{W_0(G)}$ находится из условия $\Lambda_0 = \Lambda(G_0)$. После деления найдем

$$\Lambda(G) = \exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{N_0}\right) \exp\left(-\frac{2G}{N_0}\right), \quad (3.14)$$

где $G = G(r)$ рассчитывается по (3.6). Тогда $\Lambda_0 = \exp[(2G_0 - \mathcal{E})/N]$. Следовательно, порог $G_0 = \frac{\mathcal{E}}{2} + \frac{N_0}{2} \ln \Lambda_0$, где Λ_0 определяется выбранным критерием. Если использован критерий Неймана-Пирсона, то по формуле (3.13) при заданной величине Q_0 сразу найдем порог G_0 .

В результате придем к выводу, что оптимальный обнаружитель сигнала (приемник) должен формировать статистику G (3.6), сравнивать ее значение с порогом G_0 и выдавать решение о наличии сигнала, если $G > G_0$.

Из (3.6) следует, что статистика G является временной взаимной корреляционной функцией сигнала $s(t)$ и входного воздействия $r(t)$, поэтому устройство, формирующее величину G , называют коррелятором. Операция (3.6) может быть осуществлена линейным фильтром, который называется согласованным (СФ) [7, 60]. При известной форме сигнала $s(t)$ на интервале наблюдения $(0, T)$ согласованный фильтр имеет импульсную характеристику $h(t)$ (с точностью до постоянного множителя), равную

$$h(t) = \begin{cases} s(T-t) & \text{при } 0 < t < T; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases} \quad (3.15)$$

На выходе фильтра при входном воздействии $r(t)$ получим отклик

$$y(t) = \int_0^T h(\tau)r(t-\tau)d\tau = \int_0^T s(T-\tau)r(t-\tau)d\tau.$$

Сделаем подстановку $u = T - \tau$, тогда после преобразований будем иметь

$$y(t) = \int_0^T s(u)r(u+t-T)du. \quad (3.16)$$

В момент принятия решения $t = T$ найдем

$$y(T) = \int_0^T s(u)r(u)du = G.$$

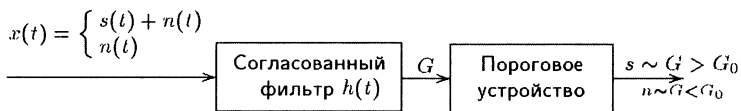


Рис. 3.3

В зависимости от формирования статистики G рассматривают два типа оптимальных обнаружителей: а) с использованием корреляционного приемника (рис. 3.2) и б) с использованием согласованного фильтра (рис. 3.3).

Различение двух полностью известных сигналов в аддитивном гауссовском шуме (векторное представление). Предположим, что наблюдаемое колебание $r(t)$ состоит из одного или другого известных сигналов $s_0(t)$ и $s_1(t)$ в аддитивной смеси с гауссовским шумом, имеющим нулевое среднее значение. Сигналы и шум ограничены по частоте $|f| \leq B$. Все колебания дискретизируются с частотой дискретизации $f_g = 2B = 1/\Delta t$ в интервале наблюдения $0 \leq t \leq T$, так что производится $T/\Delta t = 2BT$ отсчетов $r(t_k) = r_k$, $0 \leq k \leq n-1$. Таким образом формируется n -мерный вектор столбец $\mathbf{r} = (r_0, r_1, \dots, r_{n-1})^T$.

Рассмотрим следующие две гипотезы

$$\begin{aligned} H_0: \quad \mathbf{r} &= \mathbf{s}_0 + \mathbf{n}, \\ H_1: \quad \mathbf{r} &= \mathbf{s}_1 + \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $E(\mathbf{n}) = 0$; $E(\mathbf{r}/H_i) = \mathbf{s}_i$, $i = 0, 1$.

Для проверки гипотез воспользуемся следующим критерием:

Выбираем H_1 , если

$$\Lambda(\mathbf{r}) = W_1(\mathbf{r})/W_0(\mathbf{r}) > \Lambda_0, \quad (3.18)$$

где Λ_0 — некоторая постоянная, определяемая используемым критерием оптимальности.

Многомерная ПРВ для того или иного сигнала является гауссовской

$$W_i(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det \mathbf{C}_i}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_i)^T \mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_i) \right]. \quad (3.19)$$

Тогда отношение правдоподобия (ОП)

$$\Lambda(\mathbf{r}) = C \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_1)^T \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_1) + \frac{1}{2} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{C}_0^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_0) \right], \quad (3.20)$$

где $C = \sqrt{\frac{\det \mathbf{C}_0}{\det \mathbf{C}_1}}$ — несущественная константа.

Здесь \mathbf{C}_0 и \mathbf{C}_1 — ковариационные матрицы наблюдаемого коле-

бания \mathbf{r} , соответствующие каждой из гипотез:

$$\mathbf{C}_i = E(\mathbf{r}\mathbf{r}^T | H_i) - E[\mathbf{r} | H_i]E[\mathbf{r} | H_i]^T = (\mathbf{N} + \mathbf{s}_i\mathbf{s}_i^T) - \mathbf{s}_i\mathbf{s}_i^T = \mathbf{N},$$

где \mathbf{N} — ковариационная матрица шума $\mathbf{n}(t)$.

Возьмем логарифм отношения правдоподобия за вычетом $\ln C$, тогда по (3.20) получим

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}) &= \ln \Lambda(\mathbf{r}) - \ln C = \\ &= (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{r} > \ln \Lambda_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{s}_1^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{s}_0) = S_0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Вычислим вероятность ложной тревоги Q_0 и вероятность обнаружения Q_d . Предварительно установим, что распределение статистики S (3.21) является гауссовским, как линейная комбинация гауссовских СВ r_k , $0 \leq k \leq n-1$, при этом

$$E(S | H_i) = (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{N}^{-1} E(\mathbf{r} | H_i) = (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{s}_i. \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} D_S &= \sigma_S^2 = E\{[S - E(S | H_i)]^2 | H_i\} = \\ &= E\{[(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_i)][(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{r} - \mathbf{s}_i)]^T\} = \\ &= (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{N}^{-1} [E(\mathbf{r} - \mathbf{s}_i)(\mathbf{r} - \mathbf{s}_i)^T] \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) = \\ &= (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{N}^{-1} (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0) = (\Delta \mathbf{s})^T \mathbf{N}^{-1} (\Delta \mathbf{s}), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0$.

По (3.22), (3.23) находим

$$W(S | H_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_S^2}} \exp \left[-\frac{(S - \Delta \mathbf{s}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{s}_i)^2}{2\sigma_S^2} \right].$$

Тогда

$$Q_0 = P(S > S_0 | H_0) = \int_{S_0}^{\infty} W(S | H_0) dS = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_1}^{\infty} e^{-u^2/2} du;$$

$$A_1 = (S_0 - \Delta \mathbf{s}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{s}_0) / \sigma_S;$$

$$Q_d = P(S > S_0 | H_1) = \int_{S_0}^{\infty} W(S | H_1) dS = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{B_1}^{\infty} e^{-u^2/2} du;$$

$$B_1 = (S_0 - \Delta \mathbf{s}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{s}_1) / \sigma_S.$$

Введем обозначение

$$x = (S_0 - \Delta \mathbf{s}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{s}_0) / \sigma_S = A_1,$$

тогда

$$Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du = \operatorname{erfc} x = Q(x);$$

$$Q_d = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-d}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \operatorname{erfc}(x-d) = Q(x-d), \quad (3.24)$$

где

$$d = \frac{\Delta \mathbf{s}^T \mathbf{N}^{-1} \Delta \mathbf{s}}{\sigma_s} = \frac{\Delta \mathbf{s}^T \mathbf{N}^{-1} \Delta \mathbf{s}}{\sqrt{\Delta \mathbf{s}^T \mathbf{N}^{-1} \Delta \mathbf{s}}} = \sqrt{\Delta \mathbf{s}^T \mathbf{N}^{-1} \Delta \mathbf{s}}. \quad (3.25)$$

Рассмотрим частный случай, когда гауссовский шум с нулевым средним значением является белым (ГБШ) с постоянным ЭС в заданной полосе частот

$$S_n(f) = N_0/2, \quad |f| \leq B.$$

Для такого шума КФ имеет вид

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_n(f)] = \int_{-B}^B \frac{N_0}{2} e^{i2\pi f\tau} df = N_0 B \frac{\sin 2\pi B\tau}{2\pi B\tau}.$$

Если осуществлять дискретизацию, как и ранее с шагом $\Delta t = 1/2B$, то для коэффициента корреляции отсчетов шума $n(t_k) = n_k$ получим

$$E(n_j n_k) = R_n(|j-k|\Delta t) = N_0 B \delta_{jk},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

В этом случае вектор \mathbf{n} в (3.17) имеет нулевое среднее значение и корреляционную матрицу

$$\mathbf{N} = (N_0 B) \mathbf{I},$$

где \mathbf{I} — единичная $n \times n$ матрица, при этом отсчеты шума n_k имеют дисперсию $\sigma_n^2 = N_0 B$.

Правило решения (3.21) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} S(\mathbf{r}) &= (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0)^T \mathbf{r} / \sigma_n^2 = (\Delta \mathbf{s})^T \mathbf{r} / \sigma_n^2 > \ln l_0 + (\mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0^T \mathbf{s}_0) / 2\sigma_n^2 = \\ &= \ln l_0 + (\|\mathbf{s}_1\|^2 - \|\mathbf{s}_0\|^2) / 2\sigma_n^2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

По (3.25) ОСШ d упрощается:

$$d = \sqrt{\Delta \mathbf{s}^T \mathbf{N}^{-1} \Delta \mathbf{s}} = \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_0\| / \sigma_n. \quad (3.27)$$

В (3.26) и (3.27) положим $\sigma_n^2 = N_0 B = N_0 / 2\Delta t$, тогда получим

$$S(\mathbf{r}) = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{n-1} (s_{1k} - s_{0k}) r_k \Delta t > \ln l_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(s_{1k}^2 - s_{0k}^2) \Delta t}{N_0} = S_0; \quad (3.28)$$

$$d^2 = \frac{2}{N_0} \sum_{k=0}^{n-1} (s_{1k} - s_{0k})^2 \Delta t. \quad (3.29)$$

Пусть $\Delta t \rightarrow 0$ и в то же время остается неизменным интервал наблюдения $0 \leq t \leq T$, тогда $n = T/\Delta t \rightarrow \infty$. В пределе по (3.28) получим

$$S = \frac{2}{N_0} \int_0^T (s_1(t) - s_0(t))r(t) dt > \ln l_0 + \frac{1}{N_0} \int_0^T (s_1^2(t) - s_0^2(t)) dt = S_0. \quad (3.30)$$

Введем новую переменную

$$F = \frac{N_0}{2} S - \frac{1}{2} \int_0^T [s_1^2(t) - s_0^2(t)] dt > \frac{N_0}{2} \ln l_0 = F_0. \quad (3.31)$$

По (3.29) находим ОСШ

$$d^2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T (s_1(t) - s_0(t))^2 dt. \quad (3.32)$$

Преобразуем ОСШ d^2 :

$$d^2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T (s_1^2(t) - s_0^2(t)) dt - \frac{4}{N_0} \int_0^T s_0(t)s_1(t) dt = \frac{4\mathcal{E}}{N_0}(1 - \rho);$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^T [s_1^2(t) + s_0^2(t)] dt; \quad (3.33)$$

$$\rho = \frac{1}{\mathcal{E}} \int_0^T s_0(t)s_1(t) dt. \quad (3.34)$$

Здесь \mathcal{E} — суммарная энергия сигналов; ρ — взаимный временной коэффициент корреляции двух сигналов.

Величина ОСШ

$$d = \sqrt{4\mathcal{E}(1 - \rho)/N_0}. \quad (3.35)$$

При новой переменной F (3.31) нижний предел в интегралах (3.24) имеет вид

$$U = [F_0 - E_0(F)]/\sigma_F, \quad (3.36)$$

где

$$E_0(F) = \frac{N_0}{2} E_0(S) - \frac{1}{2} \int_0^T [s_1^2(t) - s_0^2(t)] dt = -\frac{1}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt =$$

$$= -\frac{N_0}{4} d^2 = -\mathcal{E}(1 - \rho).$$

Аналогично находим

$$E_1(F) = \mathcal{E}(1 - \rho).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\sigma_F^2 &= \left(\frac{N_0}{2}\right)^2 \sigma_S^2 = \left(\frac{N_0}{2\sigma_n}\right)^2 (\Delta s)^T (\Delta s) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{N_0}{2} \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)]^2 dt = N_0 \Xi(1 - \rho).\end{aligned}\quad (3.37)$$

Таким образом, приемник характеризуется вероятностями

$$\begin{aligned}Q_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du = \operatorname{erfc} x = Q(x); \\ Q_d &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-d}^\infty e^{-u^2/2} du = \operatorname{erfc}(x-d) = Q(x-d),\end{aligned}\quad (3.38)$$

где

$$x = \frac{F_0}{\sqrt{N_0 \Xi(1 - \rho)}} + \sqrt{\frac{\Xi(1 - \rho)}{N_0}}; \quad d = 2\sqrt{\frac{\Xi(1 - \rho)}{N_0}}. \quad (3.39)$$

Следовательно, характеристики когерентного приемника со статистикой F зависят только от энергии сигналов, их временного коэффициента корреляции и спектральной плотности шума. Вероятности Q_0 и Q_d не зависят от структуры сигналов. Коэффициент корреляции ρ заключен в пределах $|\rho| \leq 1$, так как

$$\begin{aligned}0 \leq \int_0^T [s_0(t) + s_1(t)]^2 dt &= \int_0^T [s_0^2(t) + s_1^2(t)] dt \pm 2 \int_0^T s_0(t) s_1(t) dt = \\ &= 2\Xi \pm 2\Xi\rho = 2\Xi(1 \pm \rho)\end{aligned}$$

При тех же условиях, что и при получении (3.28) ПРВ можно записать в виде

$$W(\mathbf{r}) = \left(\frac{\Delta t}{\pi N_0}\right)^{n/2} \exp \left[-\sum_{k=0}^n (r_k - \bar{r}_k)^2 \Delta t / N \right],$$

где $\bar{r}_k = E[r_k(t)]$.

При $B \rightarrow \infty$ $\Delta t \rightarrow 0$, и в результате получим функционал плотности вероятности

$$W(\mathbf{r}) = \alpha \exp \left\{ -\frac{1}{N_0} \int_0^T [r(t) - \bar{r}(t)]^2 dt \right\}, \quad (3.40)$$

где α — несущественная константа, так как она исчезает при вычислении отношения правдоподобия $l(r)$. Если $r(t) = s(t) + n(t)$,

$E[n(t)] = 0$, то $\bar{r}(t) = s(t)$, тогда

$$l(\mathbf{r}) = \ln \Lambda(\mathbf{r}) = \frac{1}{N_0} \left[2 \int_0^T s(t)r(t) dt - \int_0^T s^2(t) dt \right]. \quad (3.41)$$

Пример 3.1. Рассмотрим две гипотезы при полностью известных сигналах $s_0(t)$ и $s_1(t)$:

$$H_0: \quad r(t) = s_0(t) + n(t);$$

$$H_1: \quad r(t) = s_1(t) + n(t),$$

и пусть сигналы имеют вид

$$s_i(t) = A_i(t) \cos[\omega_c t + \varphi_i(t) + \theta_i], \quad i = 0, 1, \quad (3.42)$$

где параметры A_i , φ_i , θ_i и f_c — известные. По прежнему $E(n(t)) = 0$.

Найти отношение правдоподобия $l(r)$.

Решение. По (3.40) получим функционал

$$F_i(r) = W_i(r) = \alpha \exp \left[-\frac{1}{N_0} \int_0^T [r(t) - s_i(t)]^2 dt \right] \quad (3.43)$$

Пусть $s_0(t) = 0$, тогда по (3.41) находим

$$l(\mathbf{r}) = \ln \Lambda(\mathbf{r}) = \frac{2}{N_0} \int_0^T A(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t) + \theta] r(t) dt - \mathcal{E}/N_0,$$

где $\mathcal{E} = \int_0^T A^2(t) \cos^2[\omega_c t + \varphi(t) + \theta] dt \approx \frac{1}{2} \int_0^T A^2(t) dt$ — энергия сигнала.

Если $s_0(t) \neq 0$, то с использованием (3.40) получим

$$l(\mathbf{r}) = \ln \Lambda(\mathbf{r}(t)) = \frac{2}{N_0} \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)] r(t) dt - (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0)/N_0,$$

где \mathcal{E}_i — энергия сигналов $s_i(t)$, $i = 0, 1$.

3.2. Обнаружение сигнала при коррелированном шуме на входе

В данном случае используется ортогональное разложение (разложение Карунена–Лозва) не обязательно стационарного СП. Оно основано на возможности представления корреляционной функции $R(t, s)$ случайного процесса в виде равномерно сходящегося ряда

$$R(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(t) \varphi_k(s) \quad \text{при} \quad a \leq t \leq b, \quad a \leq s \leq b, \quad (3.44)$$

где $\{\varphi_k(t)\}$ — собственные функции; λ_k — собственные значения од-

нородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$\int_a^b R(t, s) \varphi(s) ds = \lambda \varphi(t). \quad (3.45)$$

Функция $R(t, s)$ называется ядром интегрального уравнения (3.45).

Справедливость разложения (3.44) устанавливается теоремой Мерсера [7], которая утверждает, что, если вещественная функция $R(t, s)$ симметрична, непрерывна и неотрицательна в прямоугольнике $a \leq t \leq b$, $a \leq s \leq b$, то она может быть разложена в ряд (3.44). Причем, если $R(t, s)$ вещественная функция, то и собственные функции $\varphi_n(t)$, и собственные значения λ_n также вещественны, причем, если $R(t, s)$ положительно определенная функция (как в случае корреляционной функции), то система функций $\{\varphi_n(t)\}$ ортогональна на (a, b) , т.е.

$$\int_a^b \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при } m = n; \\ 0 & \text{при } m \neq n, \end{cases} \quad (3.46)$$

где δ_{mn} — символ Кронекера.

Отсюда следует, что любой непрерывный в среднеквадратичном смысле случайный процесс $x(t)$ с автокорреляционной функцией $R(t, s)$ может быть представлен в среднеквадратичном смысле на $[a; b]$ ортогональным разложением

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n(t), \quad (3.47)$$

где

$$x_n = \int_a^b x(t) \varphi_n(t) dt. \quad (3.48)$$

По (3.48) находим

$$\begin{aligned} E\{x_m x_n\} &= E \left\{ \int_a^b x(t) \varphi_m(t) dt \int_a^b x(s) \varphi_n(s) ds \right\} = \\ &= \int_a^b \int_a^b R(t, s) \varphi_m(t) \varphi_n(s) dt ds. \end{aligned}$$

Используя условия (3.45) и (3.46), получим

$$E\{x_m x_n\} = \lambda_n \int_a^b \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = \lambda_n \delta_{mn}.$$

Таким образом, коэффициентами ряда (3.47) являются некоррелированные (ортогональные) случайные величины, имеющие второй

начальный момент

$$E\{x_n^2\} = \lambda_n. \quad (3.49)$$

Ряд (3.47) называется разложением Карунена–Лоэва, или каноническим разложением случайного процесса. Если записать ряд (3.47) в форме

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n x'_n \varphi_n(t), \quad (3.50)$$

тогда выполняется условие ортонормированности для случайных величин x'_n

$$E = \{x'_m x'_n\} = \delta_{mn},$$

причем $\sigma_n^2 = \lambda_n$.

Обратная к ядру $R(t, s)$ функция $R^{-1}(t, s)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^T R^{-1}(t, s) R(s, \tau) ds = \delta(t - \tau), \quad 0 \leq t, \tau \leq T, \quad (3.51)$$

и имеет разложение

$$R^{-1}(t, s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(t) \varphi_i(s), \quad (3.52)$$

причем при симметричном ядре $R(t, s)$ обратная функция также симметрична:

$$R^{-1}(t, s) = R^{-1}(s, t). \quad (3.53)$$

Пусть полностью известны сигналы $s_0(t)$ и $s_1(t)$, принимаемые в гауссовском коррелированном шуме $n(t)$ с нулевым средним значением, при этом шум необязательно стационарный.

Гипотезы H_0 и H_1 таковы, что

$$\begin{aligned} H_0 : \quad r(t) &= s_0(t) + n(t); \\ H_1 : \quad r(t) &= s_1(t) + n(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.54)$$

Используя (3.48) и уравнение для собственных функций (3.45) получим отсчеты

$$r_i = \int_0^T r(t) \varphi_i(t) dt. \quad (3.55)$$

Здесь r_i гауссовские переменные, поскольку они получаются посредством линейной операций над гауссовским СП. Кроме того, эти СВ независимы. Поэтому для решения проблемы обнаружения (различения) сигналов достаточно найти средние значения и дисперсии СВ

r_i . Сразу находим

$$E(r_i | H_0) = \int_0^T s_0(t) \varphi_i(t) dt = s_{0i};$$

$$E(r_i | H_1) = \int_0^T s_1(t) \varphi_i(t) dt = s_{1i}.$$

По (3.49) дисперсия отсчетов r_i равны собственным значениям λ_i . В результате при N отсчетах получим соответствующие ПРВ

$$W_0(r) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} \exp \left[-\frac{(r_i - s_{0i})^2}{2\lambda_i} \right]; \quad (3.56)$$

$$W_1(r) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i}} \exp \left[-\frac{(r_i - s_{1i})^2}{2\lambda_i} \right]; \quad (3.57)$$

В показателе экспоненты (3.56) и (3.57) после перемножения при $N \rightarrow \infty$ получим величину

$$A = - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\lambda_i} [r_i^2 - (2r_i - s_i)s_i]. \quad (3.58)$$

Преобразуем первое слагаемое с учетом (3.55):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_i^2}{\lambda_i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \left[\int_0^T r(t) \varphi_i(t) dt \right]^2 = \\ &= \int_0^T \int_0^T r(t) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t) \varphi_i(s)}{\lambda_i} r(s) dt ds = \int_0^T \int_0^T r(t) R^{-1}(t, s) r(s) dt ds, \end{aligned} \quad (3.59)$$

причем в последнем случае было использовано соотношение (3.52).

Рассмотрим второе слагаемое в (3.58):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2r_i - s_i)s_i}{\lambda_i} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{\lambda_i} \int_0^T \varphi_i(t) [2r(t) - s(t)] dt = \\ &= \int_0^T [2r(t) - s(t)] \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i \varphi_i(t)}{\lambda_i} dt = \int_0^T [2r(t) - s(t)] h(t) dt, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i \varphi_i(t)}{\lambda_i}. \quad (3.61)$$

Получим условие, которому должна удовлетворять функция $h(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^T R(t, s)h(s) ds &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{\lambda_i} \int_0^T R(t, s)\varphi_i(s) ds = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{\lambda_i} \lambda_i \varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i \varphi_i(t) = s(t). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Здесь использовалось уравнение Фредгольма (3.45) и разложение сигнала по собственным функциям $\{\varphi_i(t)\}$.

Можно выразить функцию $h(t)$ в явном виде, если использовать обратную функцию ядра $R^{-1}(t, s)$

$$\begin{aligned} \int_0^T R^{-1}(t, v)s(v) dv &= \int_0^T \int_0^T R^{-1}(t, v)R(v, u)h(u) dv du = \\ &= \int_0^T \delta(t - u)h(u) du = h(t), \end{aligned} \quad (3.63)$$

при этом использовано соотношение (3.51).

Используя (3.60), (3.62) и (3.63), а также свойство симметрии (3.53) функции $R^{-1}(t, s)$, получим ПРВ (3.56) и (3.57) в обобщенном виде:

$$W[r(t)] = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [r(t) - s(t)] R^{-1}(t, u) [r(u) - s(u)] dt du \right\}, \quad (3.64)$$

где постоянная C находится из условия нормировки.

Используя значения сигналов $s = s_0(t)$ и $s = s_1(t)$, получим статистику

$$\begin{aligned} G_1 &= \ln W_1[r(t)] - \ln W_0[r(t)] = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [r(t) - s_1(t)] R^{-1}(t, s) [r(s) - s_1(s)] dt ds + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T [r(t) - s_0(t)] R^{-1}(t, s) [r(s) - s_0(s)] dt ds. \end{aligned}$$

В результате правило решения в пользу H_1 принимает вид

$$G_1 = \int_0^T \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)] R^{-1}(t, s) r(s) dt ds - \frac{\Delta}{2} > G_p,$$

где

$$\Delta = \int_0^T \int_0^T s_1(t) R^{-1}(t, s) s_1(s) dt ds - \int_0^T \int_0^T s_0(t) R^{-1}(t, s) s_0(s) dt ds.$$

Поскольку величина Δ не зависит от наблюдений $r(t)$, то получе-

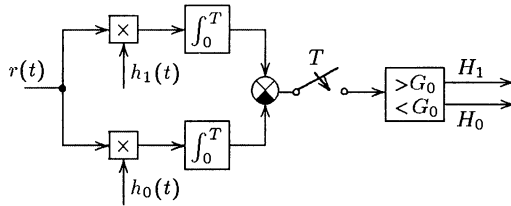


Рис. 3.4

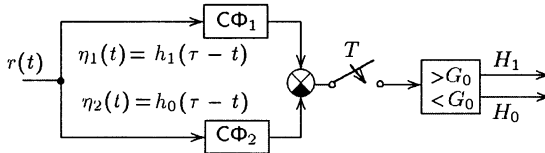


Рис. 3.5

ное правило можно записать в виде

$$G = \int_0^T \int_0^T [s_1(t) - s_0(t)] R^{-1}(t, s) r(s) dt ds > G_0, \quad (3.65)$$

где $G_0 = G_p + \Delta/2$.

Учтем соотношение (3.63). Тогда окончательно получим правило принятия гипотезы H_1

$$G = \int_0^T [h_1(t) - h_0(t)] r(t) dt > G_0. \quad (3.66)$$

Структурная схема приемника включает в себя либо коррелятор (рис. 3.4), либо обобщенный согласованный фильтр (рис. 3.5).

3.3. Характеристики обнаружения

Вначале рассмотрим обнаружение сигнала $s(t) = s_1(t)$ при $s_0(t) = 0$. При этом статистика G имеет вид

$$G = \int_0^T h(t) r(t) dt, \quad (3.67)$$

где $h(t)$ представляет собой решение интегрального уравнения (ИУ)

$$\int_0^T R_n(t, u) h(u) du = s(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.68)$$

причем $R_n(t, u) = R_n(t - u)$ — КФ аддитивного гауссовского шума, имеющего нулевое среднее значение.

Таблица 3.1

КФ	Вид решения ИУ (3.45)
Белый шум $(N_0/2)\delta(\tau)$	$(2/N_0)s(t)$
Низкочастотный шум	$\frac{\alpha}{2\sigma^2} \left[s(t) - \frac{1}{\alpha^2} s''(t) \right]$
$\sigma^2 \exp(-\alpha \tau)$	$\frac{1}{\sigma^2} \left[s_T - \frac{s'_T}{\alpha^2} \right] \delta(t - T)$
Узкополосный шум	$\frac{1}{2\sigma^2\alpha + 0\omega^2} [s^{IV}(t) - (2\omega^2 - \alpha_0^2)s''(t) + \omega_0^4 s(t)]$
$\sigma^2 \exp(-\alpha \tau) \times$ $\times \left[\cos \omega_1 \tau + \frac{\alpha}{\omega_1} \sin \omega_1 \tau \right],$ где $\omega_1 = \omega_0^2 - \alpha^2; \alpha = \alpha_0/2$	

Как и раньше, статистика G — гауссовская, причем

$$E(G | H_0) = 0; \quad E(G | H_1) = \int_0^T h(t)E[r(t)] dt = \int_0^T h(t)s(t) dt = d^2, \quad (3.69)$$

где d^2 называется отношением сигнал/шум (ОСШ) [8, 19], поскольку при ГБШ $R_n(t - u) = (N_0/2)\delta(t - u)$, когда $h(t) = (2/N_0)s(t)$, по формуле (3.69) находим

$$d^2 = \frac{2\mathfrak{E}}{N_0}, \quad \mathfrak{E} = \int_0^T s^2(t) dt. \quad (3.70)$$

Дисперсия статистики G при гипотезах H_0 и H_1 одна и та же:

$$\begin{aligned} D(G) &= \int_0^T \int_0^T h(t_1)h(t_2)E[n(t_1)n(t_2)] dt_1 dt_2 = \\ &= \int_0^T \int_0^T h(t_1)h(t_2)R_n(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \int_0^T h(t)s(t) dt = d^2, \end{aligned} \quad (3.71)$$

причем здесь в преобразованиях учтено соотношение (3.68).

При данных табл. 3.1 в [19] получено ОСШ d^2 при коррелированном шуме на входе.

В результате находим ПРВ статистики G

$$W_0(G) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2}} \exp\left(-\frac{G^2}{2d^2}\right); \quad W_1(G) = \frac{1}{\sqrt{2\pi d^2}} \exp\left[-\frac{(G - d)^2}{2d^2}\right].$$

При этом вероятности ложной тревоги и обнаружения выражаются формулами

$$Q_0 = \operatorname{erfc} x = Q(x); \quad Q_d = \operatorname{erfc}(x - d) = Q(x - d), \quad x = G_0/d. \quad (3.72)$$

Таким образом, можно воспользоваться графиками рис. 1.5, 3.1, 1.2, используя для ОСШ d новое определение (3.69).

Таблица 3.2

КФ	Вид решения ИУ (3.45)
Белый шум $(N_0/2)\delta(\tau)$	$(2/N_0)s(t)$
Низкочастотный шум	$\frac{\alpha}{2\sigma^2} \left[s(t) - \frac{s''(t)}{\alpha^2} \right] + \frac{1}{\sigma^2} \left[s_0 - \frac{s'_0}{\alpha^2} \right] \delta(t) +$
$\sigma^2 \exp(-\alpha \tau)$	$+ \frac{1}{\sigma^2} \left[s_T - \frac{s'_T}{\alpha} \right] \delta(t - T)$
Узкополосный шум	$\frac{1}{2\sigma^2\alpha_0 + \omega_0^2} \left[s^{IV}(t) + (2\omega_0^2 - \alpha_0^2)s''(t) + \omega_0^4 s(t) \right] +$
$\sigma^2 \exp(-\alpha \tau) \times$	$+ \frac{1}{\sigma^2\alpha_0 + \omega_0^2} \{ \delta(t)[s_0'' + (\omega^2 - \alpha_0^2)s'_0 + \alpha_0\omega_0^2 s_0] +$
$\times \left[\cos \omega_1 \tau + \frac{\alpha}{\omega_1} \sin \omega_1 \tau \right],$	$+ \delta(t - T)[-s_T''' - (\omega_0^2 - \alpha_0^2)s'_T + \alpha_0\omega_0^2 s_T] +$
где $\omega_1 = \omega_0^2 - \alpha^2; \alpha = \alpha_0/2$	$+ \delta'(t)[s_0'' - \alpha_0 s'_0 + \omega_0^2 s_0] +$
	$\delta'(t - T)[-s_T'' - \alpha_0^2 s'_T - \omega_0^2 s_T]$

В заключение в табл. 3.2 приводятся решения интегрального уравнения (3.45) при трех КФ шума [6; см. также 21, табл. 1.1]. При нулевых граничных условиях по табл. 3.2 получим решение, приведенное в табл. 3.1.

Можно показать, что в общем случае при гипотезах (3.54) ПРВ $W_i(x)$ при $x \equiv G_0$ имеют вид

$$W_{0,1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp \left[-\frac{x \pm \sigma_1^2/2}{2\sigma_1^2} \right],$$

где $\sigma_1^2 = \sigma_{G_1}^2$ — ОСШ.

Принимается гипотеза H_1 , если $G_1 > G_p$. Тогда

$$Q_0 = Q(z); \quad Q_d = Q(z - \sigma_1), \quad (3.73)$$

где $z = (G_p + \sigma_1^2/2)/\sigma_1$.

Рассмотрим задачу различения сигналов, эквивалентную (3.54)

$$\begin{aligned} H_0: & \quad r_t = n_t; \\ H_1: & \quad r_t = n_t + s_t, \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.74)$$

где $s_t = s(t) - s_0(t)$; $\{n_t; t \in [0, T]\}$ — гауссовский СП с нулевым средним значением и КФ $R_n(t, u)$, $(t, u) \in [0, T]^2$.

Запишем сигнал s_t в виде

$$s_t = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \varphi_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.75)$$

где $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность ортонормированных функций, соответствующих ядру $R_n(t, u)$, отсчеты s_k определяются соотноше-

нием

$$s_k = \int_0^T s_t \varphi_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.76)$$

Используя (3.75) и разложение Карунена-Лоева СП $\{n_t; t \in (0, T)\}$, запишем проблему различения (3.74) в виде

$$\begin{aligned} H_0 : \quad r_t &= \sum_{k=1}^{\infty} n_k \varphi_k(t); \\ H_1 : \quad r_t &= \sum_{k=1}^{\infty} (n_k + s_k) \varphi_k(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.77)$$

где

$$n_k = \int_0^T n_t \varphi_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.78)$$

В результате наблюдаемый СП можно записать обобщенно

$$r_t = \sum_{k=1}^{\infty} z_k \varphi_k(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.79)$$

где

$$z_k = \int_0^T r_t \varphi_k(t) dt = \begin{cases} n_k & \text{при } H_0; \\ n_k + s_k & \text{при } H_1. \end{cases} \quad (3.80)$$

Тогда согласно (3.74)

$$\begin{aligned} H_0 : \quad z_k &= n_k; \\ H_1 : \quad z_k &= n_k + s_k, \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.81)$$

Как было отмечено ранее, $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — это последовательность независимых СВ, таких, что $n_k \sim N(0, \lambda_k)$, где $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность собственных значений интегрального уравнения с ядром $R_n(t, u)$.

Следовательно, ОП при конечных значениях $k = \overline{1, n}$ записывается в виде

$$\Lambda(z_n) = \exp \left[\sum_{k=1}^n \frac{s_k z_k}{\lambda_k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{s_k^2}{\lambda_k} \right]. \quad (3.82)$$

Сходимость $\Lambda(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda(z_n)$ исследуется отдельно.

Определим ОСШ

$$d^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k^2}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k s_k; \quad (3.83)$$

$$q_k = s_k / \lambda_k. \quad (3.84)$$

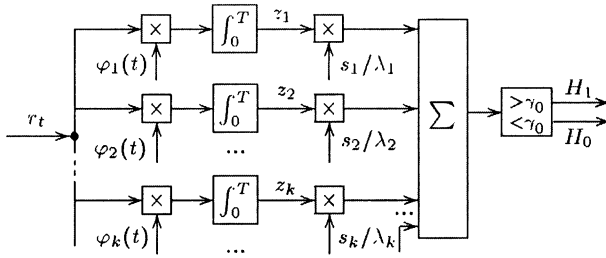


Рис. 3.6

Коэффициенты q_k определяют разложение

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k(t). \quad (3.85)$$

Тогда принимается гипотеза H_1 если $\Lambda(z) > \gamma$ или

$$T(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k z_k}{\lambda_k} > \ln \gamma + \frac{d^2}{2} = \gamma_0. \quad (3.86)$$

Структура оптимального обнаружения когерентного сигнала изображена на рис. 3.6.

Статистике $T(z)$ можно придать другую форму:

$$T(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k z_k}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z_k = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \int_0^T \varphi_k(t) r(t) dt = \int_0^T q(t) r(t) dt. \quad (3.87)$$

Снова получим условие, которому должна удовлетворять функция $q(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^T R_n(t, u) q(u) du &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \int_0^T R_n(t, u) \varphi_k(u) du = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k q_k \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \varphi_k(t) = s(t). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $q(t)$ должна удовлетворять неоднородному интегральному уравнению

$$\int_0^T R_n(t, u) q(u) du = s(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3.88)$$

Сравнивая (3.87) и (3.83), получим

$$d^2 = \int_0^T s(t) q(t) dt. \quad (3.89)$$

Докажем справедливость соотношения (3.84).

С учетом (3.88) имеем

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k \varphi_k(t) = \int_0^T R_n(t, u) \sum_{k=1}^{\infty} q_k \varphi_k(u) du = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k T \int_0^T R_n(t, u) \varphi_k(u) du = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \lambda_k \varphi_k(t). \end{aligned}$$

Отсюда $\sum_{k=1}^{\infty} (s_k - \lambda q_k) \varphi_k(t) = 0$, что приводит к (3.84).

Статистика $T(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k z_k}{\lambda_k}$ является гауссовской в силу гауссовского характера СВ $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$.

При гипотезе H_0 $z_k \sim N(0, \lambda_k)$, поэтому в этом случае

$$T(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k z_k}{\lambda_k} \sim N(0, d^2).$$

При гипотезе H_1 $z_k \sim N(s_k, \lambda_k)$, тогда

$$T(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k z_k}{\lambda_k} \sim N(d^2, d^2).$$

При этом ВЛТ

$$\begin{aligned} Q_0 &= P\{T(z) > \gamma_0\} = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-y^2/2d^2} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_1}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \\ &= Q(\gamma_1) = 1 - \Phi(\gamma_1), \end{aligned}$$

где $\gamma_1 = \frac{1}{d} \ln \gamma_0 + \frac{d}{2}$.

Вероятность обнаружения

$$\begin{aligned} Q_d &= P\{T(z) > \gamma_0\} = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_0}^{\infty} e^{-(y-d)^2/2d^2} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_2}^{\infty} e^{-u^2/2} du = Q(\gamma_2) = 1 - \Phi(\gamma_2), \end{aligned}$$

где $\gamma_2 = \frac{\gamma_0 - d^2}{d} = \frac{\gamma_0}{d} - d = \frac{1}{d} \ln \gamma - \frac{d}{2} = \gamma_1 - d$.

Таким образом, характеристики обнаружения принимают вид

$$Q_0 = Q(\gamma_1) = 1 - \Phi(\gamma_1); \quad Q_d = Q(\gamma_1 - d) = 1 - \Phi(\gamma_1 - d). \quad (3.90)$$

Пусть $Q_0 = \alpha$, тогда $\gamma_1 = Q^{-1}(\alpha)$. Следовательно,

$$Q_d = Q[Q^{-1}(\alpha) - d].$$

Запишем аналогичные соотношения через функции $\Phi(x)$. По (3.90)

$$\Phi(\gamma_1) = 1 - \alpha; \quad \gamma_1 = \Phi^{-1}(1 - \alpha); \quad Q_d = 1 - \Phi[\Phi^{-1}(1 - \alpha) - d]. \quad (3.91)$$

По (3.91) $\Phi[\Phi^{-1}(1 - \alpha) - d] = 1 - Q_d = Q_1 = \beta$. Отсюда

$$\Phi^{-1}(1 - \alpha) - d = \Phi^{-1}(\beta),$$

или

$$d = \Phi^{-1}(1 - \alpha) - \Phi^{-1}(\beta). \quad (3.92)$$

Соотношение (3.92) позволяет найти порог по ОСШ, которое при заданных значениях ВЛТ Q_0 и вероятности обнаружения Q_d определяет минимально обнаруживаемый сигнал.

Например, при $Q_0 = 10^{-6}$, $Q_d = 0,99$ ($\beta = 0,01$) получим $d = d = \Phi^{-1}(1 - 10^{-6}) - \Phi^{-1}(0,01)$.

Согласно [38] справедливо соотношение

$$\Phi^{-1}(p) + \Phi^{-1}(1 - p) = 0. \quad (3.93)$$

Тогда $d = \Phi^{-1}(1 - 10^{-6}) + \Phi^{-1}(0,99)$.

По [38] находим $\Phi^{-1}(1 - 10^{-6}) = 4,7534$, $\Phi^{-1}(0,99) = 2,3263$.

Следовательно, $d = 7,0797$, или $d^2 = 50,122$ и $(d^2)_{\text{дБ}} = 10 \lg 50,122 \approx 17$ дБ.

По (3.82) запишем ОП

$$\Lambda(z) = \exp \left[\sum_{k=1}^n \frac{s_k z_k}{\lambda_k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{s_k^2}{\lambda_k} \right] = \exp \left(T(z) - \frac{d^2}{2} \right),$$

или

$$\Lambda(z) = \exp \left[\int_0^T q(t)r(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T s(t)q(t) dt \right]. \quad (3.94)$$

Если шум $n(t)$ — белый с односторонним ЭС N_0 , то

$$R_n(t, u) = \frac{N_0}{2} \delta(t - u).$$

Тогда по (3.88)

$$q(t) = \frac{2}{N_0} s(t) \quad (3.95)$$

и по (3.94) ОП

$$\Lambda(z) = \Lambda[r(t)] = \exp \left[\frac{2}{N_0} \int_0^T s(t)r(t) dt - \frac{1}{N_0} \int_0^T [s(t)]^2 dt \right]. \quad (3.96)$$

Статистика T принимает вид

$$T[r(t)] = \int_0^T s(t)r(t) dt,$$

причем здесь множитель $2/N_0$ отнесен к порогу.

Величина d^2 находится по (3.89)

$$d^2 = \frac{2}{N_0} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{2\mathcal{E}}{N_0}, \quad (3.97)$$

где $\mathcal{E} = \int_0^T s^2(t) dt$ — энергия сигнала.

Задачи

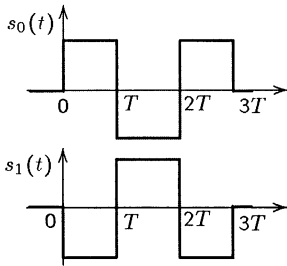


Рис. 3.7

3.1. Различить сигналы при двух гипотезах

$$H_0: r(t) = s_0(t) + n(t);$$

$$H_1: r(t) = s_1(t) + n(t).$$

Использовать в качестве критерия минимум вероятности ошибки. Сигналы $s_0(t)$ и $s_1(t)$ показаны на рис. 3.7.

Аддитивный шум, гауссовский белый со спектральной плотностью $N_0/2$. Предположить равными априорные вероятности. Найти вероятность ошибки при $\mathcal{E}/N_0 = 2$

3.2. В системе передачи ЧТ сигналов

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \sin \omega_0 t; \\ s_1(t) &= \sin \omega_1 t, \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T,$$

аддитивный шум — ГБШ. Обозначить $\omega_d = \omega_1 - \omega_0$. Показать, что вероятность ошибки минимизируется, когда разность частот, выбирается так, что $\omega_d/2\pi \approx 0,7/T$.

Предположить, что $(\omega_1 + \omega_0)T = k\pi$, где k — целое число и $\omega_1 + \omega_0 \gg 0$.

3.3. Пусть имеется четырехфазная система ФТ:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= A \sin \omega_0 t; \\ s_1(t) &= A \sin(\omega_0 t + \pi/2); \\ s_2(t) &= A \sin(\omega_0 t + \pi); \\ s_3(t) &= A \sin(\omega_0 t + 3\pi/2), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Аддитивный шум — ГБШ со спектральной плотностью $N_0/2$. Пусть априорные вероятности равны, так же как и стоимости ошибок.

а) Найти структуру оптимального приемника. Определить, сколько требуется корреляторов.

б) Показать, что вероятность правильного решения

$$P_k = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{-u^2/2} du \right]^2, \quad d = \sqrt{\mathcal{E}/N_0}.$$

в) Сравнить с вероятностью правильного решения для бинарного случая когерентного сигнала.

3.4. Рассмотреть троичный сигнал

$$H_0 : s_0(t) = 0;$$

$$H_1 : s_1(t) = A \sin \omega_0 t;$$

$$H_2 : s_2(t) = -A \sin \omega_0 t.$$

Аддитивный шум — гауссовский со спектральной плотностью $N_0/2$.

а) Найти ОП, чтобы минимизировать вероятность ошибки.

б) Показать, что

$$P(D_1 | H_1) = P(D_2 | H_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-u^2/2} du,$$

где $d_1 = \sqrt{\mathcal{E}/2N}$. Следовательно, вероятность правильного решения

$$P_k = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{d_1} e^{-u^2/2} du + \frac{1}{2} \right].$$

в) Сравнить характеристики системы с троичным сигналом и системы с бинарным ЧТ-сигналом и четырехфазной системы задачи 3.3.

3.5. Составить ОП приемника, осуществляющего проверку гипотез

$$H_0 : r(t) = B \cos(\omega_2 t + \varphi) + n(t);$$

$$H_1 : r(t) = A \cos \omega_1 t + B \cos(\omega_2 t + \varphi) + n(t),$$

где A , B , ω_1 , ω_2 и φ — известные постоянные. Шум $n(t)$ — ГБШ со спектральной плотностью $N_0/2$. Как влияет на характеристики приемника сигнал $B \cos(\omega_2 t + \varphi)$?

3.6. Рассмотреть согласованный фильтр (СФ) для сигнала

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

при ГБШ на входе.

а) Каково максимальное значение ОСШ на выходе?

б) Рассмотреть вместо СФ фильтр, имеющий ИХ

$$h(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ 0 & \text{при других } t. \end{cases}$$

Найти максимальное значение ОСШ на выходе фильтра. Существует ли оптимальное значение параметра α ?

в) Пусть используется фильтр с ИХ $h(t) = e^{-\alpha t}$, $t \geq 0$. Найти максимальное значение ОСШ на выходе фильтра. Показать, что ОСШ в этом случае меньше или равно ОСШ, полученного в случае (б).

3.7. Для предыдущей задачи рассмотреть гауссовский фильтр

$$h(\tau) = \frac{1}{\alpha} \exp \left(-\frac{(\tau - \tau_0)^2}{2\alpha^2} \right), \quad -\infty < \tau < \infty, \quad \tau_0 > 0.$$

а) В какой момент времени ОСШ на выходе фильтра будет максимальным.

б) Найти выражение для ОСШ.

3.8. Пусть сигнал имеет вид

$$s(t) = 1 - \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi/\omega_0,$$

и ЭС шума

$$S_n(\omega) = \frac{\omega_1^2}{\omega^2 + \omega_1^2}.$$

а) Найти обобщенный СФ для этой задачи, решая уравнение

$$\int_0^{T_0} h(v) R_n(v, u) dv = s(u), \quad 0 \leq u \leq T_0, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (3.98)$$

Ответ должен быть следующим:

$$h(t) = 1 - \frac{\omega_0^2 + \omega_1^2}{\omega_1^2} \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

б) Найти результирующее максимальное ОСШ.

3.9. Решить интегральное уравнение (3.98) для обобщенного СФ при сигнале

$$s(t) = \sin \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi/\omega_0 = T_0,$$

и КФ шума

$$R_n(\tau) = \frac{\omega_1}{2} e^{-\omega_1 |\tau|}.$$

а) Показать, что ИХ фильтра

$$h(t) = s(T-t) - \frac{1}{\omega_1^2} \frac{d^2}{dt^2} s(T-t)$$

не идентично решению интегрального уравнения.

б) Пусть к ИХ добавляется линейная комбинация дельта-функции $a\delta(t) + b\delta(t-T)$. Удовлетворяется ли для этой суммы интегральное уравнение и какие при этом должны быть a и b ?

3.10. В предыдущей задаче:

а) найти максимум ОСШ;

б) при тех же сигнале и шуме как в предыдущей задаче, предположить, что ИХ фильтра имеет вид

$$h(t) = -\frac{\omega_1^2 + \omega_0^2}{\omega_1^2} \sin \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_0} = T,$$

и фильтр используется вместо оптимального.

Найти ОСШ для данного фильтра. Сравнить оптимальный фильтр с квазиоптимальным при $\omega_0 = \omega_1$.

3.11. Найти верхнюю и нижнюю треугольную матрицы, произведение которых определяется марковской корреляционной матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \\ \rho & 1 & \rho \\ \rho^2 & \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

3.12. Пусть λ_k — k -е собственное значение интегрального уравнения

$$\lambda f(t) = \int_0^T R(t, s) f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Доказать, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \int_0^T R(t, t) dt; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 = \int_0^T \int_0^T R(t, u) R(u, t) du dt.$$

Указание. Воспользоваться разложением КФ $R(t, s)$ в ряд Фурье (формулой Мерсера)

$$R(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(t) f_k(s).$$

3.13. Стационарный гауссовский СП $x(t)$ имеет нулевое среднее значение и КФ $R(\tau)$. Дисперсия СП может быть оценена временным средним

$$z = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t)]^2 dt.$$

Найти среднее значение величины z и показать, что

$$\text{var } z = \frac{4}{T^2} \int_0^T (T-s)[R(s)]^2 ds.$$

Указание. Использовать соотношение [60, ф-ла 6.15]

$$E(x_1 x_2 x_3 x_4) = E(x_1 x_2) E(x_3 x_4) + E(x_1 x_3) E(x_2 x_4) + E(x_1 x_4) E(x_2 x_3).$$

3.14. Пусть известен обнаружитель сигнала $s(t)$ в ГБШ, но сигнал, который воздействует на вход обнаружителя изменился на $s_1(t)$ вместо $s(t)$. Вычислить вероятность обнаружения сигнала $s_1(t)$ и показать, как эта вероятность зависит от величины интеграла

$$\rho_s = \int_0^T s(t) s_1(t) dt.$$

3.15. Сигнал $s(t) = A[1 - e^{-\alpha t}]$ должен быть обнаружен на фоне ГБШ, с односторонней спектральной плотностью равной N . Интервал наблюдения $0 \leq t \leq T$. Найти ИХ соответствующего СФ и отклик СФ как функцию времени. Положить $s(t) = 0$ при $t > T$.

3.16. Приемник должен быть спроектирован, чтобы решить, какой из двух сигналов $s_0(t)$ или $s_1(t)$ принимается в присутствии ГБШ с односторонней спектральной плотностью N . Показать, что приемник может основывать свое решение на корреляции входа с разностью сигналов. Найти ОП и сравнить его с порогом.

3.17. В предыдущей задаче найти вероятности Q_0 и Q_1 каждой из двух родов ошибок. Показать, что при фиксированной ВЛТ Q_0 , вероятность пропуска $Q_1 = 1 - Q_d$ зависит от эффективного ОСШ

$$d^2 = 2(\Xi_1 + \Xi_0 - 2\rho_s)/N,$$

где \mathcal{E}_0 и \mathcal{E}_1 — энергия каждого из двух сигналов;

$$\rho_s = \int_0^T s_0(t)s_1(t) dt.$$

3.18. Сигнал

$$s(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) + B \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

должен быть обнаружен в гауссовском шуме с КФ

$$R(t, s) = \alpha \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}s\right) + \beta \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T}s\right);$$

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

путем наблюдения входного колебания $r(t) = s(t) + n(t)$ на интервал наблюдения $(0, T)$.

При гипотезах

$$H_0: r(t) = n(t);$$

$$H_1: r(t) = s(t) + n(t)$$

описать обнаружитель Неймана–Пирсона, вычислить вероятность обнаружения Q_d и показать, как она зависит от ВЛТ Q_0 .

3.19. Сигнал

$$s(t) = A \cos \omega t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \omega = 2\pi/T,$$

должен быть обнаружен в гауссовском шуме с КФ

$$R(t, u) = \sum_{k=1}^n \mu_k \cos k\omega t \cos k\omega u, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

где все μ_k положительны.

Входное колебание $r(t)$ наблюдается в интервале $(0, T)$. Найти оптимальный обнаружитель Неймана–Пирсона и вычислить ВЛТ Q_0 и вероятность обнаружения Q_d . Выразить Q_d через энергию сигнала $s(t)$ и другие параметры обнаружителя.

3.20. Сигнал $s(t) = Ate^{-bt}1(t)$ принимается в аддитивной смеси с шумом, имеющим КФ $R(\tau) = R_0e^{-\mu|\tau|}$. Показать, как должно быть обработано входное колебание $r(t)$ обобщенным согласованным фильтром, чтобы решить, присутствует ли сигнал. Вычислить ОСШ d^2 и установить, как от него зависит вероятность обнаружения.

3.21. Сигнал $s(t)$ должен быть обнаружен в смеси с белым шумом с односторонним ЭС, равным N и коррелированным шумом с КФ

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\mu|\tau|}.$$

Показать, как вычисляется ИХ обнаружителя. В качестве примера рассмотреть сигнал $s(t) = A$ и найти ИХ фильтра и ОСШ d^2 .

3.22. Шум на входе приемника стационарный и гауссовский и состоит из суммы БШ с односторонним ЭС равным N и шума с КФ $R(\tau)$ как в предыдущей задаче. Приемник должен обнаружить сигнал

$$s(t) = Ae^{-a|t|}, \quad -\infty < t < \infty.$$

Найти статистику оптимального обнаружителя Неймана–Пирсона и вычислить вероятность обнаружения при фиксированной ВЛТ Q_0 .

3.23. (а) Прямоугольный сигнал длительностью T_1

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq t \leq T_1; \\ 0 & \text{при } t \leq 0; t \geq T_1, \end{cases}$$

должен быть обнаружен в присутствии гауссовского шума, состоящего из двух компонент: белого шума и стационарного шума, имеющего Лоренцеву спектральную плотность

$$S(\omega) = \frac{2\mu\sigma^2}{\omega^2 + \mu^2}.$$

Входное колебание приемника наблюдается в интервале $(-T, T)$, который намного больше, чем длительность сигнала и ширина μ^{-1} КФ небелой компоненты шума.

Найти ИХ оптимального фильтра для обнаружителя сигнала с максимальной вероятностью обнаружения Q_d при фиксированной ВЛТ Q_0 .

(б) Показать как оптимальный приемник в (а) может быть подразделен на обеляющий фильтр и следующий за ним второй линейный фильтр. Привести передаточную функцию и импульсную характеристику обеляющего фильтра для сигнала и шума и вычислить сигнал $s_1(t)$ на выходе обеляющего фильтра при прямоугольном сигнале на входе. Найти ИХ второго фильтра.

(в) Вычислить максимальную вероятность обнаружения Q_d , достигаемую оптимальным приемником части (а), при фиксированной ВЛТ Q_0 и соответствующем ОСШ d_∞^2 и вычислить это ОСШ.

3.24. Необходимо обнаружить сигнал с ограниченным спектром

$$S(\omega) = \begin{cases} A & \text{при } |\omega| < \pi W; \\ 0 & \text{при } |\omega| \geq \pi W. \end{cases}$$

Аддитивный шум стационарный гауссовский с КФ

$$R(\tau) = \frac{\sigma^2 a^2}{a^2 + \tau^2}.$$

Допускается наблюдение на бесконечном интервале времени. Вычислить максимально возможную вероятность обнаружения Q_d при фиксированном ВЛТ Q_0 .

3.25. Сигнал $Af(t)$ известной формы и амплитуды должен быть обнаружен в аддитивной смеси с ГБШ при его одностороннем ЭС N_0 . При фиксированной матрице потерь C и априорных вероятностей π_0 и π_1 гипотез H_0 и H_1 показать, что ВЛТ Q_0 и вероятность обнаружения Q_d определяются формулами:

$$Q_0 = Q(x); \quad Q_d = Q(x - d); \quad Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du$$

при $x = (1/d) \ln \Lambda_0 + d/2$; $d = \sqrt{2\mathcal{E}/N}$, когда Λ_0 определяется соотношением

$$\Lambda_0 = \frac{\pi_0(C_{10} - C_{00})}{\pi_1(C_{01} - C_{11})}.$$

Найти минимальные байесовские потери $\bar{C}(d)$ в виде функции ОСШ d и показать, что при $d \rightarrow 0$ разность $\bar{C}(0) - \bar{C}(d)$ (при $d \ll 1$) пропорциональна величине

$$d^3 \exp\left(-\frac{\ln^2 \Lambda_0}{2d^2}\right).$$

Следовательно, разность $\bar{C}(0) - \bar{C}(d)$ стремится к нулю быстрее, чем ОСШ при $d \rightarrow 0$.

Указание. Воспользоваться асимптотикой [65]

$$Q(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \left(1 - \frac{1}{x^2} + \dots\right), \quad x \gg 1.$$

3.26. Решить интегральное уравнение

$$\cos \omega t = \sigma^2 \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|t-s|}{a}\right) q(s) ds, \quad -T \leq t \leq T,$$

при $a > 2T$.

Указание. Дифференцируя треугольное ядро $R(t-s)$ дважды, показать, что оно удовлетворяет ДУ

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = F(t),$$

где $F(t)$ содержит дельта-функции. Определить $F(t)$.

3.27. Трехпозиционная система связи передает один из трех сигналов $f(t)$, 0 , $-f(t)$ каждые T секунд. Эти сигналы принимаются с энергией \mathcal{E} или 0 в присутствии ГБШ с односторонним ЭС N . В конце каждого интервала $(0, T)$ выход фильтра, согласованного с функцией $f(t)$, измеряется и сравнивается с порогами $+a$ и $-a$. Если $x > a$, то принимается решение, что передан сигнал $+f(t)$, если $x < -a$, то передан $-f(t)$. И если $-a < x < a$, то принимается решение, что передана нулевая посылка. Какова вероятность $Q_k = 1 - P_{\text{ош}}$ правильного решения как функция a , \mathcal{E} и N , когда все три сигнала посылаются одинаково часто? Какова максимально возможная вероятность Q_k и при какой величине порога a она достигается?

3.28. Четырехпозиционная система связи передает каждые T секунд один из четырех сигналов.

$$s_1(t) = Af_1(t), \quad s_2(t) = -Af_1(t), \quad s_3(t) = Af_2(t), \quad s_4(t) = -Af_2(t).$$

Функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ ортогональны, сигналы принимаются с равными энергиями в аддитивной смеси с ГБШ. Приемник имеет фильтры, согласованные с $f_1(t)$ и $f_2(t)$, причем на их выходе наблюдаются величины y_1 и y_2 в конце каждого интервала $(0, T)$. Построить стратегию минимизации вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ в виде функции ОСШ.

3.29. Каждые T секунд четырехпозиционная система связи передает один из четырех сигналов:

$$A = a_1 f(t), \quad B = a_2 f(t), \quad C = -a_2 f(t), \quad D = -a_1 f(t), \quad 0 < a_2 < a_1.$$

Сигналы следуют с одинаковой относительной частотой. Эти сигналы затем принимаются при общем затухании μ в присутствии ГБШ с ЭС N . Это значит, что если послан сигнал A , то принят сигнал $\mu a_1 f(t)$, и т.д. В конце каждого интервала $(0, T)$ выход фильтра, согласованного с $f(t)$ сравнивается с тремя решающими уровнями b , 0 и $-b$, и решение о переданных сигналах принимается на основе схемы

$$y > b \rightarrow A, \quad 0 < y < b \rightarrow B, \quad -b < y \leq 0 \rightarrow C, \quad y \leq -b \rightarrow D.$$

Найти среднюю вероятность ошибки при приеме указанных четырех сигналов и выбрать порог b , который минимизирует эту вероятность. Показать, как определяются амплитуды a_1 и a_2 , чтобы сделать минимальную ошибку как можно меньше при ограничении на среднюю передаваемую мощность сигнала.

3.30. Пусть λ_k — собственное значение интегрального уравнения с ядром $R_m(\tau)$, где $R_m(t_1, t_2) = E[m(t_1)m(t_2)]$. Показать, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_0^T R_m(t_1, t_1) dt_1 &= \sum_k \lambda_k; \\ \text{б) } \int_0^T \int_0^T R_m^2(t_1, t_1) dt_1 dt_2 &= \sum_k \lambda_k^2. \end{aligned}$$

3.31. Пусть дана аддитивная смесь

$$r(t) = m(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $m(t)$ — коррелированный гауссовский СП с нулевым средним значением, имеющий КФ $R_m(\tau)$, $n(t)$ — ГБШ с нулевым средним значением и КФ $R_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$.

а) Имеется разложение

$$r(t) = \sum_{k=0}^K r_k \psi_k(t) = \sum_{k=0}^K (m_k + n_k) \psi_k(t),$$

где $r_k = \int_0^T r(t) \psi_k(t) dt$, аналогичные представления справедливы для m_k и n_k .

Показать, что коэффициенты r_k будут статистически независимы, если $\{\psi_k(t)\}$ являются собственными функциями интегрального уравнения при ядре $R_m(\tau)$.

б) Найти ковариацию коэффициентов.

в) Используя отрезок ряда для коэффициентов, найти функцию правдоподобия для $r(t)$.

3.32. Рассмотреть проблему обнаружения

$$\begin{aligned} H_0: \quad r(t) &= n(t); \\ H_1: \quad r(t) &= m(t) + n(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $m(t)$ и $n(t)$ те же, что и в задаче 3.31.

а) Показать, что можно использовать в качестве статистики величину

$$\gamma_\tau = \sum_{k=1}^K \frac{\lambda_k r_k^2}{2\lambda_k + N_0},$$

где λ_k — собственное значение интегрального уравнения при ядре $R_m(\tau)$.

б) Найти среднее значение и дисперсию статистики γ_τ для каждой из гипотез.

3.33. В предыдущей задаче, пренебрегая условиями сходимости, при $K \rightarrow \infty$ рассмотреть

$$\gamma_\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k r_k^2}{2\lambda_k + N_0}.$$

Показать, что статистику γ_τ можно представить в интегральной форме

$$\gamma_\tau = \int_0^T \int_0^T r(t)r(v)h(t,v) dt dv,$$

где $h(t,v)$ — решение интегрального уравнения

$$h(t,v) + \frac{2}{N_0} \int_0^T R_m(v-u)h(t,u) du = \frac{1}{N_0} R_m(t,v), \quad 0 \leq v, t \leq T.$$

3.34. Рассмотреть обнаружение сигнала в аддитивной смеси с коррелированным и белым шумами

$$\begin{aligned} H_0: \quad r(t) &= m(t) + n(t), \\ H_1: \quad r(t) &= s(t) + m(t) + n(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $m(t)$ и $n(t)$ описаны в задаче 3.31.

Показать, что можно использовать статистику

$$T(r) = \int_0^T [r(t) - s(t)]h(t) dt,$$

где $h(t)$ — решение интегрального уравнения

$$h(t) + \frac{2}{N_0} \int_0^T h(\tau) R_m(t - \tau) d\tau = \frac{1}{N_0} s(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

3.35. Рассмотреть обнаружение известного сигнала в коррелированном шуме

$$\begin{aligned} H_0: \quad r(t) &= n(t); \\ H_1: \quad r(t) &= s(t) + n(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Пусть $R_n(\tau)$ — КФ шума, используя критерий Неймана–Пирсона, найти форму сигнала, который максимизирует вероятность обнаружения.

3.36. Пусть дано интегральное уравнение

$$\int_0^T h(\tau) R_n(t - \tau) d\tau = g(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $R_n(\tau)$ и $g(t)$ — известные функции.

Принять $S_n(\omega) = \omega_1^2/(\omega^2 + \omega_1^2)$ или $R_n(\tau) = (\omega_1/2)e^{-\omega_1|\tau|}$.

Показать, что

$$h(t) = g(t) - \frac{1}{\omega_1^2} \frac{d^2}{dt^2} g(t)$$

является решением интегрального уравнения, если только

$$\frac{g'(0)}{\omega_1} - g(0) = 0, \quad \frac{g'(T)}{\omega_1} - g(T) = 0,$$

где $g'(0)$ и $g'(T)$ — производные функции $g(t)$ при $t = 0$ и $t = T$ соответственно.

3.37. Найти решение интегрального уравнения в предыдущей задаче, если приведенные там граничные условия не выполняются.

3.38. Пусть ядром интегрального уравнения Фредгольма первого рода является функция

$$R_n(\tau) = \alpha \delta(\tau) + \frac{1}{2} \beta \omega_1 e^{-\omega_1 |\tau|}.$$

а) Какое дифференциальное уравнение при этом необходимо решать?

б) Какова форма решения однородного уравнения?

в) Если $g(t) = 1 - \cos \omega_0 t$, то какова форма частного решения.

3.39. Пусть задано ядро интегрального уравнения

$$R_n(t) = \begin{cases} 1 - |\tau|/L & \text{при } |\tau| \leq L, \\ 0 & \text{при других } \tau. \end{cases}$$

Найти дифференциальное уравнение, определяющие собственные функции интегрального уравнения

$$\int_0^T f(\tau) R_n(t - \tau) d\tau = \lambda f(t), \quad 0 \leq t \leq T < L.$$

4 Обнаружение сигналов при наличии случайных (неизмеряемых) параметров

4.1. Методы обнаружения

В общем случае полезный сигнал может зависеть не только от параметра λ , называемого существенным, но и от ряда несущественных (неизмеряемых) случайных параметров $\mathbf{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)^T$. При этих условиях и функционал плотности вероятности $F[x(t) - s(t, \mathbf{\lambda})]$ оказывается зависящим от несущественных случайных параметров и для определения функционала правдоподобия $F[x(t) | \mathbf{\lambda}]$ требуется его усреднение по несущественным (неизмеряемым) параметрам:

$$\begin{aligned} F[x(t) | \mathbf{\lambda}] &= F(\mathbf{\lambda}) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} F[x(t) - s(t, \mathbf{\lambda})] W_k(\mathbf{\lambda}) d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_k. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $W(\mathbf{\lambda}) = W_k(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ — совместная плотность вероятности несущественных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Пусть входное воздействие имеет вид

$$x(t) = s(t, \mathbf{\lambda}) + n(t), \quad (4.2)$$

где $\mathbf{\lambda} = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}^T$ — случайные неизмеряемые параметры, характеризующие совместной ПРВ $W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = W(\mathbf{\lambda})$. При этом ПРВ $W_1(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, зависит от параметров $\mathbf{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)^T$, т.е. $W_1(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}, \mathbf{\lambda}) = W(\mathbf{\lambda})W(x | \mathbf{\lambda})$.

Введем отношение правдоподобия (ОП)

$$\Lambda(\mathbf{x} | \mathbf{\lambda}) = W_1(\mathbf{x} | \mathbf{\lambda}) / W_0(\mathbf{x})$$

(отношение правдоподобия для сигнала с полностью известными параметрами). Согласно [26]

$$\Lambda(\mathbf{x} | \mathbf{\lambda}) = \exp \left(-\frac{\mathcal{E}(\mathbf{\lambda})}{N_0} \right) \exp \left[\frac{2}{N_0} G(\mathbf{x} | \mathbf{\lambda}) \right], \quad (4.3)$$

где $\mathcal{E}(\mathbf{\lambda}) = \int_0^T s^2(t, \mathbf{\lambda}) dt$; $G(\mathbf{x} | \mathbf{\lambda}) = \int_0^T s(t, \mathbf{\lambda}) x(t) dt$.

При наличии случайных неизмеряемых параметров отношение правдоподобия $\Lambda(\mathbf{x}) = E[\Lambda(\mathbf{x} | \mathbf{\lambda})]$, где $E[\cdot]$ — усреднение по слу-

чайным параметрам, имеющих совместную ПРВ $W(\lambda)$,

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \int_{D(\lambda)} W(\lambda) \Lambda(\mathbf{x} | \lambda) d\lambda. \quad (4.4)$$

Используя (4.2), окончательно найдем

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \int_{D(\lambda)} W(\lambda) e^{-\lambda/N_0} e^{\frac{2}{N_0} G(\mathbf{x}(t)|\lambda)} d\lambda. \quad (4.5)$$

Пример 4.1. Оптимальное обнаружение сигнала со случайной начальной фазой.

Пусть в смеси $x(t) = s(t) + n(t)$ сигнал $s(t)$ имеет случайную начальную фазу, равную λ , тогда

$$s(t, \lambda) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t) + \lambda]. \quad (4.6)$$

Здесь λ — скалярный параметр, поэтому сигнал зависит от одного параметра, что является частным случаем.

Начальную фазу λ полагаем равномерно распределенной в интервале $(0; 2\pi)$, т.е.

$$W(\lambda) = \begin{cases} 1/2\pi & \text{при } \lambda \in (0; 2\pi); \\ 0 & \text{при } \lambda \notin (0; 2\pi). \end{cases} \quad (4.7)$$

Найдем корреляционный интеграл (статистику) $G = G(x)$. Представим сигнал (4.6) в виде суммы

$$s(t, \lambda) = s_1 \cos \lambda + s_2 \sin \lambda,$$

где

$$s_1 = s_1(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]; \quad s_2 = s_2(t) = -A(t) \sin[\omega_0 t + \varphi(t)].$$

Рассмотрим статистику

$$G = \frac{2}{N_0} G(x | \lambda) = \frac{2}{N_0} \int_0^T s(t, \lambda) x(t) dt = G_1 \cos \lambda + G_2 \sin \lambda, \quad (4.8)$$

где

$$G_1 = \frac{2\bar{G}_1}{N_0} = \frac{2}{N_0} \int_0^T s_1(t) x(t) dt; \quad G_2 = \frac{2\bar{G}_2}{N_0} = \frac{2}{N_0} \int_0^T s_2(t) x(t) dt.$$

Введем величины R и ψ , определяемые соотношениями

$$R = \sqrt{G_1^2 + G_2^2} = \frac{2}{N_0} \sqrt{\bar{G}_1^2 + \bar{G}_2^2}; \quad \cos \psi = \frac{G_1}{R}; \quad \sin \psi = \frac{G_2}{R}. \quad (4.9)$$

Тогда статистика G примет вид

$$G = R(\cos \lambda \cos \psi + \sin \lambda \sin \psi) = R \cos(\lambda - \psi).$$

Найдем отношение правдоподобия по формуле (4.5):

$$\Lambda(x) = e^{-\mathcal{E}(\lambda)/N_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{R \cos(\lambda - \psi)} d\lambda.$$

Известна формула [59]

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{R \cos(\lambda - \psi)} d\lambda = I_0(R), \quad (4.10)$$

где $I_0(R)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Таким образом, для сигнала со случайной начальной фазой отношение правдоподобия

$$\Lambda(x) = e^{-\mathcal{E}(\lambda)/N_0} I_0(R). \quad (4.11)$$

Заметим, что если амплитуда $A(t)$ и фаза $\varphi(t)$ сигнала меняются незначительно за период колебаний $T_0 = 2\pi/\omega_0$, что эквивалентно предположению об узкополосности сигнала $s(t, \lambda)$, то энергия сигнала практически не зависит от начальной фазы:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\lambda) &= \int_0^T s^2(t, \lambda) dt = \int_0^T A^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \varphi(t) + \lambda] dt \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \int_0^T A^2(t) dt = \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В результате окончательно получим

$$\Lambda(x) = e^{-d^2/2} I_0(R), \quad (4.13)$$

где $d^2 = 2\mathcal{E}/N_0$ — отношение сигнал-шум (ОСШ).

При отсутствии сигнала статистики G_1 и G_2 имеют нулевые средние значения $E(G_1) = E(G_2) = 0$ и равные дисперсии:

$$\begin{aligned} D(G_1) &= D(G_2) = \\ &= \left(\frac{2}{N_0} \right)^2 D(\bar{G}_1) = \left(\frac{2}{N_0} \right)^2 D(\bar{G}_2) = \left(\frac{2}{N_0} \right)^2 \left(\frac{N_0 \mathcal{E}}{2} \right) = d^2, \end{aligned}$$

Можно показать, что статистики G_1 и G_2 независимы, поэтому их совместное распределение (при $x = G_1$, $y = G_2$) имеет вид (в случае гипотезы H_0)

$$W_0(x, y) = \frac{1}{2\pi d^2} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2d^2} \right).$$

Распределение $W_0(R)$ устанавливается без труда: оно представляет собой распределение Релея, т.е. распределение длины вектора со

случайными координатами x и y , которые независимы:

$$W_0(R) = \frac{R}{d^2} \exp\left(-\frac{R^2}{2d^2}\right). \quad (4.14)$$

Вероятность ложной тревоги

$$Q_0 = \int_{R_0}^{\infty} W_0(R) dR = \exp\left(-\frac{R_0^2}{2d^2}\right). \quad (4.15)$$

При наличии сигнала статистики $G_1 = x$ и $G_2 = y$ имеют одинаковые дисперсии $D(G_1) = D(G_2) = \sigma^2$ и средние значения $m_x = E(G_1)$ и $m_y = E(G_2)$. Эти статистики также независимы. В результате

$$W_1(x, y, \lambda) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Воспользуемся соотношением (4.9)

$$x = R \cos \psi; \quad y = R \sin \psi,$$

и значением якобиана преобразования J при переходе от переменных x, y к новым переменным R, ψ ($J = R$). В новых переменных получим

$$W_1(R, \psi, \lambda) = \frac{R}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{R^2 - 2R(m_x \cos \psi + m_y \sin \psi) + m^2}{2\sigma^2}\right], \quad (4.16)$$

где $m^2 = m_x^2 + m_y^2$.

Полагая

$$m_x \cos \psi + m_y \sin \psi = m \cos(\psi - \theta)$$

($\tan \theta = m_y/m_x$) и интегрируя по ψ в интервале $(0; 2\pi)$, с учетом (4.10) окончательно найдем

$$W_1(R) = \frac{R}{\sigma^2} e^{-(R^2 + m^2)/2\sigma^2} I_0\left(\frac{mR}{\sigma^2}\right). \quad (4.17)$$

Это распределение называется распределением Райса.

В рассматриваемом случае $D(G_1) = D(G_2) = d^2$ (т.е. $\sigma^2 = d^2$); $m_x = E(G_1) = d^2 \cos \lambda$; $m_y = E(G_2) = d^2 \sin \lambda$; $m = d^2$. Тогда по (4.16)

$$W_1(R) = \frac{R}{d^2} e^{-\frac{(R^2/d^2 + d^2)}{2}} I_0(R). \quad (4.18)$$

Вероятность обнаружения

$$Q_d = \int_{R_0}^{\infty} W_1(R) dR.$$

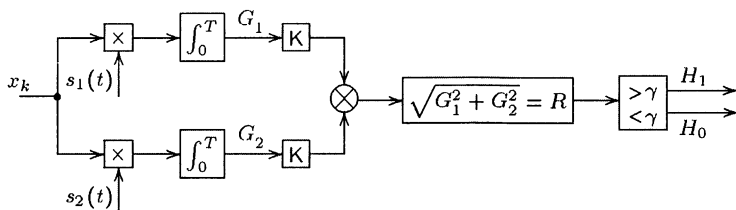


Рис. 4.1

Проведем подстановку $R/d = x$, $\alpha = d$, $R_0/d = \beta$ и получим

$$Q_d = \int_{\beta}^{\infty} x e^{-(x^2 + \alpha^2)/2} I_0(\alpha x) dx = Q(\alpha, \beta), \quad (4.19)$$

где $Q(\alpha, \beta)$ — так называемая Q -функция Маркума, которая табулирована [18, 70].

Схема некогерентного обнаружения изображена на рис. 4.1, где K — квадратор.

Кривые обнаружения сигнала со случайной фазой изображены на рис. 4.2 штриховыми линиями, здесь же сплошными линиями представлены кривые обнаружения полностью известного сигнала, параметром служат значения ВЛТ Q_0 . РХП для сигнала со случайной фазой изображены на рис. 4.3.

Сравнение кривых на рис. 4.2 показывает, что отношение сигнал/шум d , требуемое для получения заданной вероятности обнаружения при одинаковой вероятности ложной тревоги, когда фаза сигнала

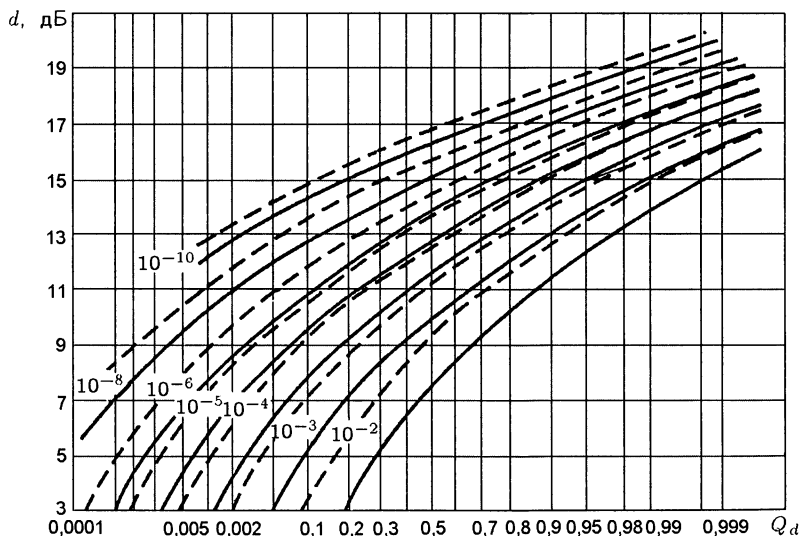


Рис. 4.2

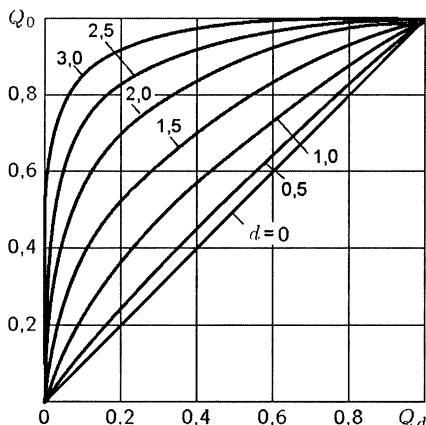


Рис. 4.3

d_0^2 — ОСШ при полностью известном сигнале; d_1^2 — ОСШ при случайной фазе, которые обеспечивают одну и ту же надежность (Q_0, Q_1) . По рис. 4.4 замечаем, что практически во всем диапазоне d_0 и Q_0 потери не превышают 1 дБ.

Пример 4.2. Рассмотрим проблему обнаружения

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad x_k = w_k \\ H_1 : & \quad x_k = w_k + s_k(\theta), \quad k = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

где w_k — ГБШ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 , $s_k(\theta)$ — известная функция аргумента θ .

Найти характеристики обнаружения.

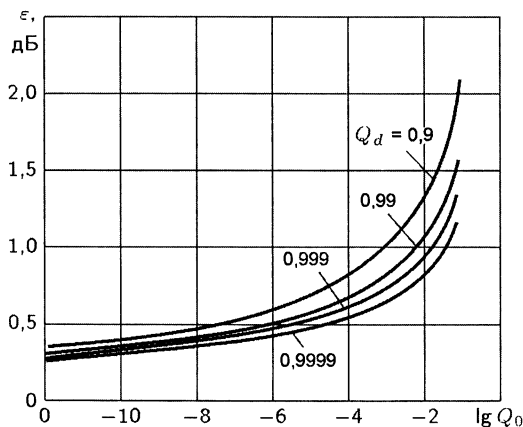


Рис. 4.4

ла неизвестна, несколько больше, чем в случае полностью известного сигнала. Например [8], при $Q_0 = 10^{-10}$, $Q_d = 0,9$, $d = 8$ для сигналов с неизвестной фазой и $d = 7,6$, когда фаза известна. Это увеличение d на 0,4 грубо выполняется для большинства кривых.

Потери ϵ ОСШ изображены на рис. 4.4 [22], где параметром служит вероятность обнаружения Q_d , а потери определяются величиной $\epsilon = 10 \lg(d_1^2/d_0^2)$, где

Решение. Согласно (2.3) получим ОП

$$L(\mathbf{X}_n, \theta) = \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{k=1}^n [x_k - s_k(\theta)]^2 - \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \right],$$

или

$$L(\mathbf{X}_n, \theta) = \exp \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k s_k(\theta) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n s_k^2(\theta) \right) \right], \quad (4.20)$$

где $\mathbf{X}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Пусть θ — СВ, равномерно распределенная в интервале $(0, 2\pi)$. Тогда усреднением по (4.4) получим

$$L(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k s_k(\theta) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n s_k^2(\theta) \right) \right] d\theta. \quad (4.21)$$

Пусть сигнал $s_k(\theta)$ имеет вид гармонического колебания

$$s_k(\theta) = a_k \sin[(k-1)\omega_c T + \theta], \quad k = \overline{1, n},$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — известная последовательность амплитуд $a_k = a(k-1)T$; θ — СВ, не зависящая от шума; ω_c — известная несущая; T — интервал дискретизации, причем выполняется равенство $n\omega_c T = m2\pi$ при целом m . Рассматривается интервал $(0, nT)$, причем предполагается, что отношение n/m значительно больше единицы.

Преобразуем сумму произведений $x_k s_k(\theta)$, используя соотношение $\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$. Тогда получим

$$\sum_{k=1}^n x_k s_k(\theta) = X_c \sin \theta + X_s \cos \theta,$$

где

$$X_c = \sum_{k=1}^n a_k x_k \cos[(k-1)\bar{\omega}_c]; \quad X_s = \sum_{k=1}^n a_k x_k \sin[(k-1)\bar{\omega}_c], \quad \bar{\omega}_c = \omega_c T. \quad (4.22)$$

Используя равенство $\sin^2 a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a$, преобразуем сумму квадратов:

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n s_k^2(\theta) = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n a_k^2 \cos[(2k-1)\bar{\omega}_c + 2\theta]. \quad (4.23)$$

В большинстве практических случаев второе слагаемое в (4.23) равно нулю при всех значениях θ . Например, когда отсчеты a_k постоянны или когда $a_k = A\{1 - \cos[(k-1)2\pi/(n-1)]\}$ при $k = \overline{1, n}$.

В других случаях на практике отсчеты a_1^2, \dots, a_n^2 обычно медленно

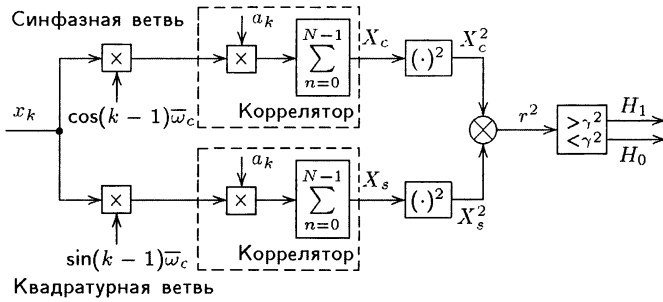


Рис. 4.5

изменяется по сравнению с $\cos(2k-1)\bar{\omega}_c$, и эти слагаемые фильтруются фильтром низкой частоты. Пренебрегая вторым слагаемым в (4.23), по (4.21) получим аналог формулы (4.3) для ОП:

$$L(\mathbf{X}_n) = e^{-n\bar{a}^2/4\sigma^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left[\frac{1}{\sigma^2} (X_c \sin \theta + X_s \cos \theta) \right] d\theta, \quad (4.24)$$

где $\bar{a}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k^2$.

Сравнивая статистику $G = X_c \sin \theta + X_s \cos \theta$ со статистикой (4.8), после усреднения получим ОП

$$L(\mathbf{X}_n) = e^{-n\bar{a}^2/4\sigma^2} I_0(r), \quad (4.25)$$

где $r = \sqrt{X_c^2 + X_s^2}$.

Структура оптимального обнаружителя при некогерентном приеме модулированного гармонического колебания изображена на рис. 4.5.

Пример 4.3. Различение радиосигналов со случайными начальными фазами.

Рассматриваются два сигнала в аддитивной смеси с ГБШ

$$s_{jk}(\theta) = a_{jk} \sin[(k-1)\bar{\omega}_c + \theta], \quad k = \overline{1, n}, j = 0, 1. \quad (4.26)$$

В данном случае с учетом (4.25) получим ОП

$$L(\mathbf{X}_n) = \frac{e^{-n\bar{a}_1^2/4\sigma^2} I_0(r_1/\sigma^2)}{e^{-n\bar{a}_0^2/4\sigma^2} I_0(r_0/\sigma^2)}, \quad (4.27)$$

где

$$\bar{a}_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_{jk}^2; \quad r_j = \sqrt{x_{cj}^2 + x_{sj}^2};$$

$$x_{cj} = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \cos[(k-1)\bar{\omega}_c]; \quad x_{sj} = \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k \sin[(k-1)\bar{\omega}_c].$$

Можно показать, что при условиях

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} a_{lk} = 0 \text{ при } j \neq l; \quad \sum_{k=1}^n a_{jk} a_{lk} \sin[(k-1)\bar{\omega}_c + \theta] = 0$$

вероятность ошибки имеет вид

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} e^{-b^2/4}, \quad (4.28)$$

где $b^2 = na_1^2/2\sigma^2 = na_0^2/2\sigma^2$.

При непрерывных сигналах [26]

$$s_i(t) = \theta_i(t) \cos(\omega_i t + \psi_i(t) + \theta_i), \quad i = 1, 2, \quad (4.29)$$

где $\omega_i/2\pi = f_i$ — несущая частота; $a_i(t)$ и $\psi_i(t)$ — функции, отражающие законы амплитудной и фазовой (частотной) модуляции; θ_i — начальные фазы, представляющие собой независимые СВ, равномерно распределенные на интервале $(0, 2\pi)$.

Предполагается, что ширина спектров сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ много меньше их несущих частот и кроме того $|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_i$.

В данном случае ОП имеет вид

$$\Lambda(\mathbf{X}_n) = e^{(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/N} \frac{I_0(2X_1/N)}{I_0(2X_2/N)} \geq 1, \quad (4.30)$$

где N — односторонняя спектральная плотность ГБШ; \mathcal{E}_i — энергия сигнала, $\mathcal{E}_i = \int_0^T s_i^2(t) dt$; $X_i = \sqrt{X_{ic}^2 + X_{is}^2}$;

$$X_{ic} = \int_0^T x(t) a_i(t) \cos[\omega_i t + \psi_i(t)] dt;$$

$$X_{is} = \int_0^T x(t) a_i(t) \sin[\omega_i t + \psi_i(t)] dt.$$

Принимается гипотеза H_1 , если

$$\ln I_0(A_1) - \ln I_0(A_2) > \gamma, \quad A_i = 2X_i/N. \quad (4.31)$$

Вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$ имеет вид [26]

$$P_{\text{ош}} = Q(a, b) - 0,5e^{-d^2/4} I_0(\rho d^2/4), \quad (4.32)$$

где $Q(a, b)$ — Q -функция Маркума; $d^2 = 2\mathcal{E}/N$ — ОСШ;

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{d^2(1 - \sqrt{1 - \rho^2})}; \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{d^2(1 + \sqrt{1 - \rho^2})};$$

$$\rho = \frac{1}{2\vartheta} \sqrt{b_c^2 + b_s^2}, \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$b_c = \int_0^T a_1(t) a_2(t) \cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \psi_2(t) - \psi_1(t)] dt;$$

$$b_s = \int_0^T a_1(t) a_2(t) \sin[(\omega_2 - \omega_1)t + \psi_2(t) - \psi_1(t)] dt.$$

При $\rho = 0$, используя свойство $Q(o, u) = e^{-u^2/2}$ по (4.32) получим формулу, аналогичную (4.28):

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} e^{-d^2/4}. \quad (4.33)$$

4.2. Характеристики обнаружения

Чтобы найти характеристики обнаружения (Q_0 , Q_d), необходимо определить моменты статистик X_c и X_s . Очевидно, что при гипотезе H_0

$$E(X_c | H_0) = \sum_{k=1}^n a_k E(w_k) \cos[(k-1)\bar{\omega}_c] = 0.$$

Аналогично, получим

$$\begin{aligned} E(X_s | H_0) &= 0; \\ \text{var}(X_c | H_0) &= E(X_c^2 | H_0) = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_k a_l E\{(w_k w_l) \cos[(k-1)\bar{\omega}_c] \cos[(l-1)\bar{\omega}_c]\} = \\ &= \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 \cos^2[(k-1)\bar{\omega}_c] \approx \frac{n\sigma^2 \bar{a}^2}{2} = \alpha \sigma^2, \quad \alpha = \frac{n\bar{a}^2}{2}. \end{aligned}$$

Причем здесь учтено, что $E(w_k w_l) = \sigma^2 \delta_{kl}$ и равенство нулю суммы от вторых гармоник, аналогично сумме (4.23). Нетрудно показать, что $\text{var}(X_s | H_0) = \text{var}(X_c | H_0)$.

Найдем корреляционный момент

$$\begin{aligned} E(X_c X_s | H_0) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_k a_l E(w_k w_l) \cos[(k-1)\bar{\omega}_c] \sin[(l-1)\bar{\omega}_c] = \\ &= \sigma^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 \cos[(k-1)\bar{\omega}_c] \sin[(k-1)\bar{\omega}_c] = \\ &= \frac{\sigma^2}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 \sin[2(k-1)\bar{\omega}_c] \approx 0. \end{aligned}$$

Таким образом, при гипотезе H_0 СВ X_c и X_1 некоррелирова-

ны, а в силу их гауссовского распределения и независимы. Каждая из этих СВ подчиняется нормальному распределению $N(0, n\sigma^2\bar{a}^2/2)$. Тогда ВЛТ Q_0 находится из соотношения

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int \int_{X_c^2 + X_s^2 \geq \gamma^2} \frac{1}{\pi n \sigma^2 \bar{a}^2} e^{-(X_c^2 + X_s^2)/(n\sigma^2\bar{a}^2)} dx_c dx_s = \\ &= \frac{1}{\pi n \sigma^2 \bar{a}^2} \int_0^{2\pi} \int_{\gamma} r e^{-r^2/(n\sigma^2\bar{a}^2)} dr d\theta = e^{-\gamma^2/n\sigma^2\bar{a}^2}. \end{aligned}$$

Здесь использован переход к полярной системе координат (r, θ) . Таким образом, ВЛТ

$$Q_0 = e^{-\gamma^2/(n\sigma^2\bar{a}^2)} = e^{-\gamma^2/(2\alpha\sigma^2)}. \quad (4.34)$$

Для того чтобы найти вероятность обнаружения Q_d , необходимо определить моменты статистик X_c и X_s при гипотезе H_1 . Найдем условное среднее значение при $\Theta = \theta$:

$$\begin{aligned} E\{X_c \mid H_1, \Theta = \theta\} &= \sum_{k=1}^n a_k E\{x_k \mid H_1, \Theta = \theta\} \cos[(k-1)\bar{\omega}_c] = \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \sin[(k-1)\bar{\omega}_c + \theta] \cos[(k-1)\bar{\omega}_c] = \frac{n\bar{a}^2}{2} \sin \theta = \alpha \sin \theta \end{aligned}$$

Аналогично получим условное среднее значение $E\{X_s \mid H_1, \Theta = \theta\} = (n\bar{a}^2/2) \cos \theta = \alpha \cos \theta$.

При фиксированном θ дисперсия и корреляционный момент СВ X_c и X_s при гипотезе H_1 те же, что и для X_c и X_s при гипотезе H_0 .

Очевидно, совместная ПРВ $W(X_s, X_c, \theta \mid H_1)$ имеет вид (4.16) при $x = X_s$; $y = X_c$; $m_x = \alpha \cos \theta$; $m_y = \alpha \sin \theta$; $\sigma^2 \equiv \sigma_0^2 = n\sigma^2\bar{a}^2/2 = \alpha\sigma^2$

$$W(x, y \mid H_1, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp \left[-\frac{(x - m_x)^2 + (y - m_y)^2}{2\sigma_0^2} \right].$$

Переходя к полярным координатам (r, θ) , когда $x = r \cos \theta$; $y = r \sin \theta$, получим аналог (4.17)

$$\begin{aligned} W(r, \theta \mid H_1, \theta) &= \frac{r}{2\pi\sigma_0^2} \exp \left[-\frac{r^2 - 2r(m_x \cos \theta + m_y \sin \theta) + \alpha^2}{2\sigma_0^2} \right] = \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma_0^2} \exp \left[-\frac{r^2 + \alpha^2 - 2r\alpha \cos(\theta - \psi)}{2\sigma_0^2} \right]. \end{aligned}$$

Интегрируя по θ с учетом (4.10), находим

$$W(r) = \frac{r}{\sigma_0^2} e^{-(r^2 + \alpha^2)/2\sigma_0^2} I_0\left(\frac{r\alpha}{\sigma_0^2}\right).$$

Тогда вероятность обнаружения принимает вид

$$\begin{aligned} Q_d &= \int_{\gamma}^{\infty} W(r) dr = \int_{\gamma}^{\infty} \frac{r}{\sigma_0^2} e^{-(r^2 + \alpha^2)/2\sigma_0^2} I_0\left(\frac{r\alpha}{\sigma_0^2}\right) dr = \\ &= \int_{\gamma_0}^{\infty} x e^{-(x^2 + b^2)/2} I_0(bx) dx = Q(b, \gamma_0), \end{aligned} \quad (4.35)$$

где $Q(b, \gamma_0)$ — Q -функция Маркума; $x = r/\sigma^2 b$; $\gamma_0 = \gamma/\sigma^2 b$; $b^2 = \alpha^2/\sigma_0^2 = \alpha/\sigma^2$.

По (4.28) находим

$$\ln(1/Q_0) = \gamma^2/n\sigma^2\bar{a}^2 = \gamma^2/2\alpha\sigma^2 = \gamma_0^2/2.$$

Отсюда $\gamma_0 = \sqrt{2\ln(1/Q_0)}$. Тогда по (4.35) получим

$$Q_d = Q\{b, \sqrt{2\ln(1/Q_0)}\}. \quad (4.36)$$

Найдем среднее значение энергии сигнала

$$E\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k^2(\theta)\right] = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n a_k^2 \sin^2[(k-1)\bar{\omega}_c + \theta] d\theta = \frac{\bar{a}^2}{2}.$$

Таким образом, $b^2 = n\bar{a}^2/2\sigma^2$, что эквивалентно ОСШ d^2 при когерентном обнаружении.

Если (при известном θ) сигнал обнаруживается когерентно, то ОСШ d^2 имеет вид

$$d^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n s_k^2(\theta) = \frac{n\bar{a}^2}{2\sigma^2} = b^2. \quad (4.37)$$

Однако характеристики обнаружения различны для случая известного θ и для случая неизвестного θ . Потери при этом отображаются на рис. 4.4. При равных в том и другом случае Q_0 и Q_d решение уравнения

$$Q\{b, \sqrt{2\ln(1/Q_0)}\} = 1 - \Phi[\Phi^{-1}(1 - Q_0) - d] \quad (4.38)$$

приводит к приближенному соотношению $b \approx d + 0,4$. Это же было отмечено в примере 4.1.

В примерах 4.1 и 4.2 рассматривалась статистика $z^2 = x^2 + y^2$, где $x \sim N(0, \sigma^2)$; $y \sim N(0, \sigma^2)$ при гипотезе H_0 и $x \sim N(m_x, \sigma^2)$; $y \sim N(m_y, \sigma^2)$ при гипотезе H_1 .

Рассмотрим нормированную статистику $\rho = z^2/\sigma^2$, такую что $\rho =$

$= x_1^2 + y_1^2$, где $x_1 \sim N(0, 1)$; $y_1 \sim N(0, 1)$ при гипотезе H_0 и $x_1 \sim N(m'_x, 1)$; $y_1 \sim N(m'_y, 1)$ при гипотезе H_1 .

Таким образом, статистика ρ подчиняется распределению χ_2^2 при гипотезе H_0 и нецентральному распределению $\chi_2'^2(\lambda)$ при гипотезе H_1 , где показатель нецентральности

$$\lambda = (m'_x)^2 + (m'_y)^2 = \left(\frac{m_x}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{m_y}{\sigma}\right)^2.$$

В примере 4.1 $\sigma = d$; $m_x = d^2 \cos \theta$; $m_y = d^2 \sin \theta$, поэтому здесь показатель нецентральности

$$\lambda = d^2 \cos^2 \theta + d^2 \sin^2 \theta = d^2.$$

В (4.35) $\sigma_0^2 = \alpha \sigma^2$; $m_x = \alpha \cos \theta$; $m_y = \alpha \sin \theta$, тогда

$$\lambda = \left(\frac{\alpha}{\sigma_0}\right)^2 \cos^2 \theta + \left(\frac{\alpha}{\sigma_0}\right)^2 \sin^2 \theta = \frac{\alpha \alpha^2}{\sigma_0^2} = \frac{\alpha \alpha^2}{\alpha \sigma^2} = \frac{\alpha}{\sigma^2} = b^2.$$

Найдем характеристики обнаружения:

$$\begin{aligned} Q_0 &= P\{r > R_0\} = P\{r/\sigma > R_0/\sigma\} = P\{\rho > R_0^2/\sigma^2\} = \\ &= Q_{\chi_2^2}(R_0^2/\sigma^2) = \frac{1}{2} \int_{R_0^2/\sigma^2}^{\infty} e^{-u/2} du = \int_{\gamma}^{\infty} e^{-z} dz = e^{-\gamma}, \quad \gamma = \frac{R_0^2}{2\sigma^2}. \end{aligned}$$

Это значение ВЛТ Q_0 при $\sigma^2 = d^2$ совпадает с (4.15), а при $\sigma_0^2 = \alpha \sigma^2$, $R_0 = \gamma$ ВЛТ Q_0 совпадает с (4.34).

Вероятность обнаружения

$$\begin{aligned} Q_d &= P\{\rho > R_0^2/\sigma^2\} = Q_{\chi_2'^2(\lambda)}(R_0^2/\sigma^2) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{R_0^2/\sigma^2}^{\infty} e^{-(x+\lambda)/2} I_0(\sqrt{\lambda x}) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{R_0^2/d^2}^{\infty} e^{-(x+d^2)/2} I_0(d\sqrt{x}) dx = \int_{\beta}^{\infty} z e^{-(z^2+d^2)/2} I_0(dz) dz. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q_d = Q(d, \beta), \quad \beta = R_0/d. \quad (4.39)$$

Это совпадает с (4.19), а при $\lambda = b^2$, $\gamma_0 = \gamma/\sigma_0$ — с (4.35).

Пример 4.4. Оптимальное обнаружение сигнала со случайными амплитудой и фазой.

Пусть радиосигнал имеет вид

$$s(t, \lambda, A) = A a_0(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t) + \lambda] \quad (4.40)$$

и случайной является не только фаза λ с распределением (4.7), но и амплитудный множитель A , причем ПРВ $W(A)$ имеет вид закона

Релея:

$$W(A) = \frac{A}{\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_1^2}\right), \quad A \geq 0.$$

В данном случае энергия $\mathcal{E}(\lambda, A)$ зависит от случайного множителя A :

$$\mathcal{E}(\lambda, A) = A^2 \mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_1 = \frac{1}{2} \int_0^T a_0^2(t) dt. \quad (4.41)$$

Ее среднее значение

$$\bar{\mathcal{E}} = \int_0^\infty dA \int_0^{2\pi} \mathcal{E}(\alpha, A) W(\lambda, A) d\lambda,$$

где $W(\lambda, A) = \frac{1}{2\pi} W(A)$, поэтому

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E}}{\sigma_1^2} \int_0^\infty A^3 e^{-\frac{A^2}{2\sigma_1^2}} dA = 2\sigma_1^2 \mathcal{E}_1.$$

Используя формулы (4.4) и (4.5), получим отношение правдоподобия

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi\sigma_1^2} \int_0^\infty dA \int_0^{2\pi} A e^{-A^2/(2\sigma_1^2)} e^{-A^2 d^2/2} e^{AR \cos(\alpha-\theta)} d\alpha,$$

где $d^2 = 2\mathcal{E}_1/N_0$.

Интегрируя с учетом формулы (4.10), получим

$$\Lambda = \frac{1}{\sigma_1^2} \int_0^\infty I_0(AR) e^{-A^2(d^2+1/\sigma_1^2)/2} A dA.$$

Используя табличный интеграл [59]

$$\int_0^\infty I_0(\mu x) e^{-\nu x^2} x dx = \frac{1}{2\nu} e^{\mu^2/4\nu}, \quad (4.42)$$

найдем окончательно (при $\mu = R$, $x = A$, $\nu = (d^2 + 1/\sigma_1^2)/2$)

$$\Lambda = \frac{1}{\sigma_1^2 d^2 + 1} e^{R^2/(2d^2+2/\sigma_1^2)}. \quad (4.43)$$

Функция ПРВ $W_0(R)$ остается той же, что и в (4.14). Для нахождения $W_1(R)$ необходимо усреднить (4.16) по амплитуде A : $W_1(R) = E[W_1(R)]$. В результате (при $m = Ad^2$, $\sigma^2 = d^2$)

$$\begin{aligned} W_1(R) &= \int_0^\infty \frac{R}{d^2} e^{-R^2/2d^2} e^{-A^2 d^2/2} \frac{A}{\sigma_1^2} e^{-A^2/2\sigma_1^2} I_0(AR) dA = \\ &= \frac{R}{d^2 \sigma_1^2} e^{-R^2/2d^2} \int_0^\infty A e^{-A^2(d^2+1/\sigma_1^2)/2} I_0(AR) dA = \end{aligned}$$

$$= \frac{R}{d^2} e^{-R^2/2d^2} \Lambda. \quad (4.44)$$

Теперь можно построить РХП $Q_d(Q_0)$ и кривые обнаружения при

$$Q_0 = \int_{R_0}^{\infty} W_0(R) dR; \quad Q_d = \int_{R_0}^{\infty} W_1(R) dR.$$

Вероятность ложной тревоги определяется по (4.15). Вероятность обнаружения находится с учетом (4.44) и (4.43):

$$Q_d = \frac{1}{d^2(1 + d^2\sigma_1^2)} \int_{R_0}^{\infty} R e^{-R^2/2d^2} e^{R^2/(2d^2+2/\sigma_1^2)} dR.$$

Запишем Q_d в виде

$$Q_d = \int_{R_0}^{\infty} e^{-\alpha^2 R^2} d(\alpha^2 R^2) = \int_{h_0}^{\infty} e^{-y} dy = e^{-h_0}, \quad (4.45)$$

где $y = \alpha^2 R^2$; $\alpha^2 = [2d^2(1 + d^2\sigma_1^2)]^{-1}$; $h_0 = \alpha^2 R_0^2$.

Радиосигнал (4.40) может быть назван федингирующим из-за случайного характера амплитудного множителя. РХП $Q_d(Q_0)$ федингирующего сигнала определяется соотношениями (4.15), (4.45). Для сравнения со случаем нефедингирующего сигнала необходимо задаться равенством средней энергии $\bar{\Xi}$ федингирующего сигнала и энергии нефедингирующего сигнала. Это равенство обеспечивается при $\sigma_1^2 = 1/2$. В этом случае по (4.45)

$$-h_0 = -\frac{1}{1 + d^2/2} \frac{R_0^2}{2d^2} = \frac{1}{1 + d^2/2} \ln Q_0 = \ln Q_0^{1/(1+d^2/2)}.$$

Отсюда получим

$$Q_d = Q_0^{1/(1+d^2/2)}. \quad (4.46)$$

Кривые обнаружения федингирующего сигнала изображены на рис. 4.6 сплошными линиями; штриховыми линиями обозначены характеристики обнаружения сигнала со случайной фазой (ср. с рис. 4.2) (параметром служит значение ВЛТ Q_0).

По формуле (4.46) могут быть построены и РХП $Q_d(Q_0)$, например, при $d = 0$ имеем прямую линию $Q_d = Q_0$, при $d = \sqrt{2}$ — дугу параболы $Q_d = \sqrt{Q_0}$.

Рассмотрим проблему обнаружения узкополосных сигналов, используя комплексные огибающие вещественных сигналов.

Сформулируем проблему обнаружения (различения)

$$\begin{aligned} H_0 : \quad r(t) &= s_0(t) + n(t); \\ H_1 : \quad r(t) &= s_1(t) + n(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.47)$$

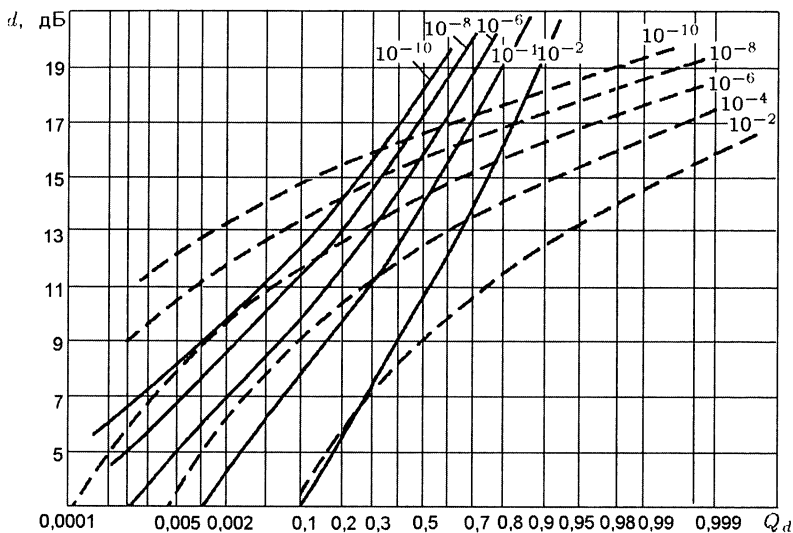


Рис. 4.6

где $n(t)$ — ГБШ, его КФ $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$;

$$s_{0,1}(t) = A_{0,1}(t) \cos[\omega_c t + \varphi_{0,1}(t) + \theta_{0,1}]. \quad (4.48)$$

Сигнал $s(t)$ записывается в виде

$$s(t) = \text{Re}\{\tilde{s}(t)e^{i\omega_c t}\}, \quad (4.49)$$

где $\tilde{s}(t)$ — комплексная огибающая,

$$\tilde{s}(t) = [s(t) + i\check{s}(t)]e^{-i\omega_c t}, \quad (4.50)$$

а $\check{s}(t)$ — преобразование Гильберта от $s(t)$.

В случае сигнала (4.48)

$$\tilde{s}(t) = A(t)e^{i[\varphi(t)+\theta]}. \quad (4.51)$$

Вместо проблемы (4.47) будем рассматривать следующую проблему обнаружения (различения)

$$\begin{aligned} H_0 : \quad \tilde{r}(t) &= A_0(t)e^{i[\varphi_0(t)+\theta]} + \tilde{n}(t); \\ H_1 : \quad \tilde{r}(t) &= A_1(t)e^{i[\varphi_1(t)+\theta]} + \tilde{n}(t). \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.52)$$

Здесь

$$\tilde{n}(t) = n_c(t) + in_k(t) = [n(t) + in(t)]e^{-i\omega_c t};$$

$n_c(t)$ и $n_k(t)$ — соответственно синфазная и квадратурная составляю-

щие шума. Можно показать [23], что ПРВ сигналов \tilde{r} и ОП имеют вид:

$$W_{0,1}[\tilde{r}(t)] = \alpha \exp \left[- \int_0^T \frac{|\tilde{r}(t) - \tilde{s}_{0,1}(t)|^2}{2N_0} dt \right]; \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} \ln \Lambda[\tilde{r}(t)] &= \frac{1}{N_0} \operatorname{Re} \int_0^T [\tilde{s}_1(t) - \tilde{s}_0(t)]^* \tilde{r}(t) dt - \\ &- \frac{1}{2N_0} \left[\int_0^T |\tilde{s}_1(t)|^2 dt - \int_0^T |\tilde{s}_2(t)|^2 dt \right]. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Заметим, что последнее соотношение является комплексным аналогом соотношения (3.20), записанным через огибающие сигнала и входного воздействия.

Полагая фазовые углы $\theta_{0,1}$ в (4.48) случайными, запишем усредненное ОП в виде

$$\Lambda[\tilde{r}(t)] = E[W(\tilde{r} \mid \theta_1)]/E[W(\tilde{r} \mid \theta_2)]. \quad (4.55)$$

Используя (4.53) для числителя и знаменателя (4.55), получим

$$E\{W[\tilde{r}(t) \mid \theta]\} = \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[- \int_0^T \frac{|\tilde{r}(t) - \tilde{s}(t)|^2}{2N_0} dt \right] d\theta. \quad (4.56)$$

В целях дальнейших преобразований запишем комплексную огибающую сигнала в виде

$$\tilde{s}(t) = Aa(t) \exp\{i[\varphi(t) + \theta]\}, \quad (4.57)$$

причем при условии нормализации вещественной огибающей $a(t)$

$$\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt = 1. \quad (4.58)$$

Раскроем в (4.56) квадрат модуля

$$\begin{aligned} |\tilde{r}(t) - \tilde{s}(t)|^2 &= |\tilde{r}(t)|^2 - |\tilde{s}(t)|^2 - 2 \operatorname{Re} \tilde{s}^*(t) \tilde{r}(t) = \\ &= |\tilde{r}(t)|^2 + A^2 a^2(t) - 2Aa(t) \operatorname{Re} \tilde{r}(t) e^{-i\varphi(t)} e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

Далее запишем интеграл

$$\begin{aligned} - \int_0^T \frac{|\tilde{r}(t) - \tilde{s}(t)|^2}{2N_0} dt &= - \int_0^T \frac{|\tilde{r}(t)|^2 + A^2 a^2(t)}{2N_0} dt + \\ &+ \frac{A}{N_0} \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} \int_0^T a(t) \tilde{r}(t) e^{-i\varphi(t)} dt \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Введем условие

$$\int_0^T a(t)\tilde{r}(t)e^{-i\varphi(t)} dt = 2qe^{i\beta}, \quad (4.60)$$

где величины q и β подлежат определению в дальнейшем. Например,

$$q = \frac{1}{2} \left| \int_0^T a(t)\tilde{r}(t)e^{-i\varphi(t)} dt \right|. \quad (4.61)$$

Тогда с учетом (4.60) получим

$$\frac{A}{N_0} \operatorname{Re} \left[e^{-i\theta} \int_0^T a(t)\tilde{r}(t)e^{-i\varphi(t)} dt \right] = \frac{2Aq}{N_0} \operatorname{Re} e^{-i(\theta-\beta)} = \frac{2Aq}{N_0} \cos(\theta-\beta).$$

В результате по (4.56) следует

$$\begin{aligned} E\{W[\tilde{r}(t) | \theta]\} &= \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \exp \left[- \int_0^T \frac{|\tilde{r}(t)|^2 + Aa^2(t)}{2N_0} dt \right] \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left[\frac{2Aq}{N_0} \cos(\theta - \beta) \right] d\beta. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Согласно (4.10)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp[\gamma \cos(\theta - \beta)] d\theta = 2\pi I_0(\gamma), \quad \gamma = \frac{2Aq}{N_0}. \quad (4.63)$$

Окончательно по (4.62) находим

$$E\{W[\tilde{r}(t) | \theta]\} = \alpha I_0 \left(\frac{2Aq}{N_0} \right) \exp \left[- \frac{1}{2N_0} \int_0^T (|\tilde{r}(t)|^2 + Aa^2(t)) dt \right]. \quad (4.64)$$

Поэтому ОП (4.55) принимает вид

$$\Lambda[\tilde{r}(t)] = \frac{I_0(2A_1q_1/N_0)}{I_0(2A_0q_0/N_0)} \exp \left[- \frac{1}{2N_0} \int_0^T (A_1^2 a_1^2(t) - A_0^2 a_0^2(t)) dt \right]. \quad (4.65)$$

В случае простого обнаружения, когда $s_0(t) = 0$ по (4.65) следует

$$\Lambda[\tilde{r}(t)] = I_0(2Aq/N_0)e^{-A^2T/2N_0}, \quad (4.66)$$

если учесть условие нормировки (4.58) и равенство $I_0(0) = 1$.

Энергия сигнала

$$\mathfrak{E} = \int_0^T s^2(t) dt \approx \frac{A^2}{2} \int_0^T a^2(t) dt = \frac{A^2T}{2}.$$

С учетом (4.66) принимается гипотеза H_1 , если

$$I_0(2Aq/N_0) > \gamma_n, \quad (4.67)$$

причем в порог γ_n входит величина $\exp(A^2T/2N_0)$.

В силу монотонности функции $I_0(x)$ решению (4.67) соответствует неравенство

$$q^2 > q_n^2. \quad (4.68)$$

Условие (4.68) соответствует квадратурному приемнику, решающему проблему обнаружения (4.52) при $s_0(t) = 0$.

Необходимо заметить, что статистика q^2 в (4.68) не зависит от величины сигнальной амплитуды A . Следовательно, данный критерий является равномерно наиболее мощный (РНМ) по отношению к амплитуде A .

Преобразуем статистику q (4.61), когда

$$q^2 = \frac{1}{4} \left| \int_0^T a(t) \tilde{r}(t) e^{-i\varphi(t)} dt \right|^2. \quad (4.69)$$

С учетом (П1.63), (П1.64) можно записать

$$\tilde{r}(t) = 2[r(t)e^{-i\omega_c t}]_{\text{НЧ}}, \quad (4.70)$$

где индекс «НЧ» указывает на низкочастотную часть процесса в квадратных скобках за счет прохождения его через НЧ фильтр.

Учитывая, что операция интегрирования в (4.69) эквивалентна НЧ фильтрации, запишем статистику q^2 с учетом (4.70)

$$q^2 = \frac{1}{4} \left| \int_0^T a(t) r(t) \exp\{-i[\omega_c t + \varphi(t)]\} dt \right|^2 > q_n^2. \quad (4.71)$$

Здесь произведение $a(t)r(t)$ является вещественной функцией, поэтому (4.71) эквивалентно записи

$$\begin{aligned} q^2 = & \left(\int_0^T a(t) r(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)] dt \right)^2 + \\ & + \left(\int_0^T a(t) r(t) \sin[\omega_c t + \varphi(t)] dt \right)^2, \end{aligned} \quad (4.72)$$

где первое слагаемое определяет синфазную ветвь приемника, а второе — квадратурную ветвь.

Структурная схема некогерентного обнаружителя изображена на рис. 4.7. Она аналогична схеме рис. 4.1. Эта схема квадратурного приемника эквивалентна схеме с использованием СФ (рис. 4.8). На

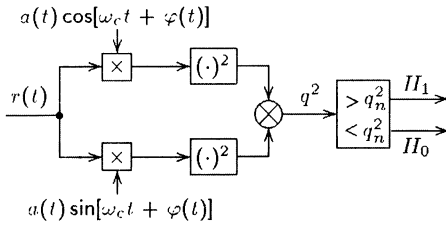


Рис. 4.7

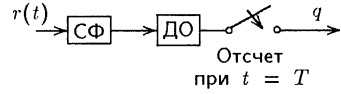


Рис. 4.8

рис. 4.8 ДО — детектор огибающей; СФ — согласованный фильтр с ИХ;

$$h(t) = a(T - t) \cos[\omega_c t - \varphi(T - t)], \quad 0 \leq t \leq T,$$

4.3. Характеристики обнаружителя

Запишем статистику q (4.61) в форме

$$q = |g| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (4.73)$$

где

$$g = \frac{1}{2} \int_0^T a(t) \tilde{r}(t) e^{-i\varphi(t)} dt = x + iy; \quad \tilde{r}(t) = [r(t) - i\check{r}(t)] e^{-i\omega_c t}, \quad (4.74)$$

причем $\check{r}(t)$ — преобразование Гилберта от $r(t)$ (см. Приложение 1).

В силу гауссовского характера $r(t)$ СП $\check{r}(t)$ также является гауссовским и, следовательно, гауссовскими являются и СВ x и y .

Таким образом, для вычисления характеристик обнаружения ВЛТ Q_0 и вероятности обнаружения Q_d необходимо найти лишь средние значения и дисперсии СВ x и y при их некоррелированности, а следовательно, и независимости, причем последнее нетрудно установить.

Очевидно, что при гипотезе H_0

$$E(x | H_0) = E(y | H_0) = 0,$$

так как процесс $n(t)$ имеет нулевое среднее значение.

При гипотезе H_1 по (4.74) находим

$$\begin{aligned} E(x | H_1, \theta) &= \frac{1}{2} \int_0^T a(t) \operatorname{Re} E[\tilde{r}(t) | H_1] e^{-i\varphi(t)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T a(t) \operatorname{Re}[\tilde{s}(t) e^{-i\varphi(t)}] dt = \frac{A}{2} \int_0^T a^2(t) \cos \theta dt = \frac{AT}{2} \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Здесь учтено выражение (4.57) для $\tilde{s}(t)$.

Аналогично получим

$$E(y | H_1, \theta) = (AT/2) \sin \theta. \quad (4.76)$$

Можно показать, что дисперсия СВ x и y при H_0 и H_1 имеет вид [23]

$$\sigma^2 = N_0 T / 4. \quad (4.77)$$

Введем статистику

$$\rho = \frac{q^2}{\sigma^2} = \left(\frac{x}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sigma}\right)^2 = x_1^2 + y_1^2,$$

причем здесь при гипотезе H_0 $x_1 \sim N(0, 1)$, $y_1 \sim N(0, 1)$, следовательно, статистика ρ имеет χ_2^2 -распределение. Таким образом, ВЛТ

$$\begin{aligned} Q_0 &= P\{q^2 > q_n^2\} = P\left\{\rho > \frac{q_n^2}{\sigma^2}\right\} = Q_{\chi_2^2}\left[\left(\frac{q_n}{\sigma}\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{(q_n/\sigma)^2}^{\infty} e^{-u/2} du = e^{-q_n^2/2\sigma^2}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

где

$$q_n/\sigma = \sqrt{-2 \ln Q_0}. \quad (4.79)$$

При гипотезе H_1 $x_1 \sim N(m_x, 1)$, $y_1 \sim N(m_y, 1)$, где $m_x = \frac{AT}{2\sigma} \cos \theta$, $m_y = \frac{AT}{2\sigma} \sin \theta$.

Таким образом, здесь статистика ρ подчиняется нецентральному распределению $\chi_2'^2(\lambda)$ с показателем нецентральности

$$\lambda = m_x^2 + m_y^2 = \frac{(AT)^2}{4\sigma^2} = \frac{(AT)^2}{N_0 T} = \frac{A^2 T}{N_0} = \frac{2\mathfrak{E}}{N_0} = d^2, \quad (4.80)$$

$$\text{где } \mathfrak{E} = \frac{1}{2} \int_0^T s^2(t) dt = \frac{A^2}{2} \int_0^T a^2(t) dt = \frac{A^2}{2}.$$

Вероятность обнаружения

$$\begin{aligned} Q_d &= P\{\rho > q_n^2/\sigma^2\} = \frac{1}{2} \int_{q_n^2/\sigma^2}^{\infty} e^{-(x+\lambda)/2} I_0(\sqrt{\lambda x}) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{q_n^2/\sigma^2}^{\infty} e^{-(x+d^2)/2} I_0(d\sqrt{x}) dx = \int_{\beta}^{\infty} z e^{-(z^2+d^2)/2} I_0(dz) dz, \end{aligned}$$

где $\beta = q_n^2/\sigma^2$.

Таким образом,

$$Q_d = Q(d, \beta), \quad (4.81)$$

где $Q(d, \beta)$ — Q -функция Маркума.

Соотношение (4.81), как и следовало ожидать, совпадает с (4.19) и (4.39).

Рассмотрим случай флуктуирующей амплитуды сигнала при отсутствии фазовой модуляции ($\varphi(t) = 0$).

Таким образом, рассматривается проблема обнаружения

$$\begin{aligned} H_0 : r(t) &= n(t); \\ H_1 : r(t) &= A \cos(\omega_c t + \theta) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (4.82)$$

где A — СВ, θ — СВ, равномерно распределенная в интервале $(0, 2\pi)$.

Пусть СВ A имеет ПРВ Релея

$$W(A) = (A/A_0^2) \exp(-A^2/2A_0^2), \quad A \geq 0; \quad A_0^2 = E(A^2)/2. \quad (4.83)$$

Гипотеза H_1 принимается, если $q > q_n$, причем статистика q определяется по (4.61) при $a(t) = 1$; $\varphi(t) = 0$, или соответственно по (4.71).

Как уже было отмечено, статистика q не зависит от амплитуды A , и критерий $q > q_n$ равномерно наиболее мощный по параметру A . Однако характеристики обнаружения зависят от A , т.е. $Q_d = Q_d(A)$.

Как и ранее, для вычисления вероятности обнаружения произведем усреднение $Q_d(A)$ (4.81) по амплитуде согласно (4.4), т.е. вычислим среднее значение

$$Q_d = E[Q_d(A)] = \int_0^\infty Q(d, \beta) W(A) dA. \quad (4.84)$$

Подставив сюда ПРВ $W(A)$ (4.83), получим

$$\begin{aligned} Q_d &= \int_0^\infty \frac{A}{A_0^2} e^{-A^2/2A_0^2} \int_\beta^\infty z \exp\left(-\frac{z^2 + d^2}{2}\right) I_0(dz) dz dA = \\ &= \int_0^\infty \frac{A}{A_0^2} e^{-A^2/2A_0^2} \int_\beta^\infty z \exp\left(-\frac{z^2 + A^2 T/N_0}{2}\right) I_0\left(zA\sqrt{\frac{T}{N_0}}\right) dz dA. \end{aligned}$$

Снова используем интеграл (4.42) при $\mu = z\sqrt{T/N_0}$:

$$\nu = \frac{1}{2A_0^2} + \frac{T}{2N_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_0^2} + \frac{T}{N_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{N_0 + A_0^2 T}{N_0 A_0^2}.$$

Тогда получим

$$\int_0^\infty A e^{-\nu A^2} I_0(\mu A) dA = \frac{1}{2\nu} e^{\mu^2/4\nu} = \frac{N_0 A_0^2}{N_0 + A_0^2 T} \exp\left(\frac{z^2}{2} \frac{A_0^2 T}{N_0 + A_0^2 T}\right).$$

В результате находим вероятность обнаружения

$$\begin{aligned} Q_d &= \frac{1}{1 + A_0^2 T/N_0} \int_\beta^\infty z \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{z^2}{1 + A_0^2 T/N_0}\right) dz = \\ &= \int_{\beta^2/2c}^\infty e^{-u} du = e^{-\beta^2/2c} = \exp\left[-\frac{2q_n^2}{T(A_0^2 T + N_0)}\right], \end{aligned}$$

так как $\beta = q_n/\sigma$, $c = 1 + A_0^2 T/N_0$, $\sigma^2 = N_0 T/4$.

Таким образом, при флуктуирующей амплитуде и случайной фазе

$$Q_d = \exp[-2q_n^2/T(A_0^2T + N_0)]. \quad (4.85)$$

По аналогии с ОСШ (4.80) в данном случае введем ОСШ в виде

$$d_{cp} = E(d) = \frac{T}{N_0} E(A^2) = \frac{2TA_0^2}{N_0}, \quad (4.86)$$

где согласно (4.83) $E(A^2) = 2A_0^2$.

Для проблемы обнаружения (4.82) средняя энергия сигнала

$$\mathcal{E}_{cp} = E(A^2) \int_0^T \cos^2(\omega_c t + \theta) dt \approx \frac{T}{2} E(A^2) = A_0^2 T.$$

Тогда с учетом (4.86) получим

$$d_{cp}^2 = 2\mathcal{E}_{cp}/N_0, \quad (d_{cp}^2)_{дБ} = 10 \lg(2\mathcal{E}_{cp}/N_0). \quad (4.87)$$

По (4.79) с учетом равенства (4.77) находим

$$q_n^2 = -(N_0 T/2) \ln Q_0.$$

Подставляя это значение q_n^2 в (4.85), получим РХП

$$Q_d = Q_0^{1/(1+d_{cp}/2)} = Q_0^{1/(1+\mathcal{E}_{cp}/N_0)}. \quad (4.88)$$

Зависимость вероятности обнаружения от ОСШ $(d_{cp})_{дБ}$ изображена на рис. 4.6 сплошными линиями, здесь же штриховыми линиями обозначена аналитическая зависимость $Q_d(d_{cp})$ для сигнала со случайной фазой.

4.4. Учет коррелированности входного шума

При коррелированном шуме на входе вместе с гармоническим сигналом проблема обнаружения остается прежней (4.52) при сигнале $s(t)$, определяемом по (4.49), и шуме

$$n(t) = \text{Re}[\tilde{n}(t)e^{i\omega_c t}], \quad (4.89)$$

где комплексная огибающая шума имеет в общем случае комплексную КФ

$$\tilde{\varphi}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} E[\tilde{n}(t_1)\tilde{n}^*(t_2)]. \quad (4.90)$$

Отсчеты \tilde{r}_k комплексной огибающей $\tilde{r}(t)$ определяются соотношением

$$\tilde{r}_k = \int_0^T f_k^*(t)\tilde{r}(t)dt,$$

где $f_k(t)$ — собственные функции интегрального уравнения

$$\lambda_k f_k(t) = \int_0^T \tilde{\varphi}(t, u) f_k(u) du.$$

Гипотезе H_0 соответствует ПРВ

$$W_0(r) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_k} \exp \left[-\frac{|r_k|^2}{2\lambda_k} \right]. \quad (4.91)$$

Среднее значение координат \tilde{r}_k при гипотезе H_1

$$E(\tilde{r}_k | H_1) = \tilde{s}_k = \int_0^T f_k^*(t) \tilde{s}(t) dt,$$

где $\tilde{s}(t)$ — комплексная огибающая сигнала. Тогда ПРВ $W_1(r)$, соответствующая гипотезе H_1 , имеет вид

$$W_1(r) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{2\pi\lambda_k} \exp \left[-\frac{|\tilde{v}_k - \tilde{s}_k|^2}{2\lambda_k} \right]. \quad (4.92)$$

Отношение правдоподобия

$$\begin{aligned} \Lambda_n(\tilde{r}) &= \frac{W_1(\tilde{r})}{W_0(\tilde{r})} = \prod_{k=1}^n \exp \left[\frac{|\tilde{v}_k|^2 - |\tilde{v}_k - \tilde{s}_k|^2}{2\lambda_k} \right] = \\ &= \exp \left[\operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{\tilde{s}_k^* \tilde{r}_k}{\lambda_k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{|\tilde{s}_k|^2}{\lambda_k} \right]. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Испытываемая достаточная статистика

$$G = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{s}_k^* \tilde{r}_k}{\lambda_k} = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{q}_k^* \tilde{r}_k, \quad (4.94)$$

где $\tilde{q}_k = \tilde{s}_k / \lambda_k$.

Статистика G может быть записана в виде

$$G = \operatorname{Re} \int_0^T \tilde{q}^*(t) \tilde{r}(t) dt, \quad (4.95)$$

где $\tilde{q}(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\int_0^T \tilde{\varphi}(t, u) \tilde{q}(u) du = \tilde{s}(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.96)$$

При этом ОСШ d^2 определяется равенством

$$d^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\tilde{s}_k|^2}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{s}_k^* \tilde{q}_k = \int_0^T \tilde{s}^*(t) \tilde{q}(t) dt. \quad (4.97)$$

Отношение правдоподобия (4.93) с учетом (4.94) и (4.97) принимает вид

$$\Lambda(\tilde{r}) = \exp\left(\frac{G - d^2}{2}\right) = \exp\left[\operatorname{Re} \int_0^T \tilde{q}(t) \tilde{r}(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \tilde{s}^*(t) \tilde{q}(t) dt\right]. \quad (4.98)$$

Вместо (4.60) запишем

$$\int_0^T \tilde{q}^*(t) \tilde{r}(t) dt = R e^{i\beta}, \quad R = \left| \int_0^T \tilde{q}^*(t) \tilde{r}(t) dt \right|. \quad (4.99)$$

При белом шуме на входе [22] $\tilde{\varphi}(t, u) = N_0 \delta(t - u)$, тогда статистика

$$R = \frac{1}{N_0} \left| \int_0^T \tilde{s}^*(t) \tilde{r}(t) dt \right|, \quad (4.100)$$

и ОСШ [22]

$$d^2 = \frac{1}{N_0} \int_0^T |\tilde{s}(t)|^2 dt = \frac{2\mathfrak{E}}{N_0}. \quad (4.101)$$

Характеристики обнаружения ВЛТ Q_0 и вероятность обнаружения Q_d по форме совпадают с полученными ранее:

$$Q_0 = \exp(-R_0^2/2d^2); \quad Q_d = Q(d; R_0/d), \quad (4.102)$$

где $Q(\alpha, \beta)$ — Q -функция Маркума.

Отличие заключается в вычислении порога R_0 и ОСШ d .

Задачи

4.1. Корреляционный приемник оптимален при обнаружении известного сигнала вида $s(t) = A \sin(\omega_c t + \theta)$ в ГБШ, когда фаза сигнала известна. Допустить, что фаза θ равна нулю, когда в действительности это не так.

а) Найти вероятность обнаружения корреляционным приемником в виде функции от θ и сравнить результат со случаем, когда θ известна полностью.

б) Показать, что вероятность обнаружения, зависящая от θ , может быть меньше вероятности ложной тревоги.

4.2. Показать, что для обобщенного СФ (согласованного с гармоническим синусоидальным колебанием с последующим детектированием огибающей) выбор величины фазы не имеет значения.

4.3. Рассмотреть гипотезы [26]

$$\begin{aligned} H_0: & \quad r(t) = n(t); \\ H_1: & \quad r(t) = A \sin(\omega_c t + \theta) + n(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T.$$

где $A = \text{const}$, $\omega_c = \text{const}$; $n(t)$ — ГБШ со спектральной плотностью $N_0/2$; $R_n(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$.

Пусть фаза θ — это СВ, имеющая ПРВ

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi I_0(\nu)} e^{\nu \cos \theta}.$$

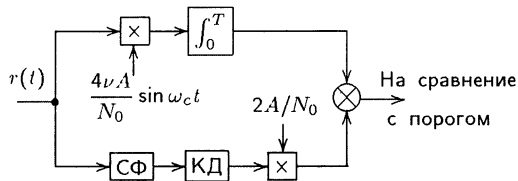


Рис. 4.11

Используя критерий Неймана–Пирсона показать, что структурная схема обнаружителя имеет вид рис. 4.11 (СФ — согласованный фильтр, КД — квадратичный детектор).

Указание. Использовать соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[(\nu + q_c) \cos \theta - q_s \sin \theta] d\theta = I_0[\sqrt{(\nu + q_c)^2 + q_s^2}].$$

4.4. Рассмотреть гипотезы

$$H_0: r(t) = n(t);$$

$$H_1: r(t) = A \sin(\omega_c t + \theta) + n(t),$$

где $\omega_c = \text{const}$, θ — СВ, равномерно распределенная в интервале $(0, 2\pi)$, $n(t)$ — ГБШ со спектральной плотностью $N_0/2$.

а) Пусть A — дискретная СВ, такая, что $P(A = 0) = 1 - p$; $P(A = A_0) = p$. Найти отношение правдоподобия используя критерий Неймана–Пирсона. Можно ли использовать q в качестве статистики испытания?

б) Показать, что вероятность обнаружения имеет вид

$$Q_d = (1 - p)Q_0 + pQ_d(A_0),$$

где Q_0 — ВЛТ, $Q_d(A_0)$ — вероятность обнаружения при постоянной амплитуде, равной A_0 .

4.5. Для проблемы обнаружения в предыдущей задаче положить распределение амплитуды в виде

$$W(A) = (1 - p)\delta(A) + p \frac{A}{A_0^2} \exp(-A^2/2A_0^2),$$

где $A \geq 0$; $p \neq 0$.

а) Найти отношение правдоподобия, используя критерий Неймана–Пирсона.

Можно ли использовать q в качестве статистики испытания?

б) Показать, что вероятность обнаружения определяется соотношением

$$Q_d = (1 - p)Q_0 + pQ_0^u,$$

где $u = 1/(1 + TA_0^2/N_0)$, причем когда величина A_0 становится достаточно большой, $Q_d(A_0)$ стремиться к p (в предположении малой ВЛТ Q_0).

4.6. В задаче 4.4 предположить, что распределение амплитуды имеет вид

$$W(A) = \sum_{i=1}^M p_i \delta(A - A_i).$$

Можно ли q использовать в качестве статистики испытания?

4.7. Вероятность обнаружения сигнала, федингующего по закону Релея, определяется формулой (4.85)

$$Q_d = \exp\{-2q_t^2/[T(A_0^2T + N_0)]\}.$$

Получить этот результат при рассмотрении следующей проблемы: колебание

$$r(t) = a(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)] + n(t), \quad -\infty \leq t \leq \infty,$$

пропускается через линейный фильтр имеющий ИХ

$$h(\tau) = \cos \omega_0 \tau, \quad 0 \leq \tau \leq T,$$

и затем проходит через детектор огибающей.

Сигнал $s(t) = a(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)] + n(t)$ является гауссовским СП, а $R_a(\tau)$ и $\varphi(t)$ считаются постоянными на интервале T . Дать обоснование узкополосности процесса.

- Найти вероятность того, что отсчет на выходе детектора превосходит порог η .
- Полученный результат совпадает с формулой (4.85). Объяснить это совпадение.

4.8. Рассмотреть проблему обнаружения

$$\begin{aligned} H_0 : \quad r(t) &= s_1(t) + n(t); \\ H_1 : \quad r(t) &= A \cos \omega_1 t + s_1(t) + n(t), \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $s_1(t) = B \cos(\omega_2 t + \varphi)$; A, B, ω_1, ω_2 — известные постоянные; $n(t)$ — ГБШ; φ — СВ, равномерно распределенная в интервале $(0, 2\pi)$. Показать, что оптимальный обнаружитель может использовать в качестве статистики величину

$$G = \int_0^T r(t) \cos \omega_1 t dt,$$

если выполняются соотношения

$$\int_0^T \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t dt = \int_0^T \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t dt = 0.$$

4.9. Видоизменить предыдущую задачу так, что

$$H_1 : r(t) = A \cos(\omega_1 t + \theta) + s_1(t) + n(t),$$

где θ — СВ, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$ и не зависящая от φ . Предположить, что

$$\int_0^T \cos(\omega_1 t + \theta) \cos(\omega_2 t + \varphi) dt = 0,$$

при всех θ и φ .

Показать, что оптимальный приемник может в качестве испытываемой статистики величину q , где

$$q^2 = \left[\int_0^T r(t) \cos \omega_1 t dt \right]^2 + \left[\int_0^T r(t) \sin \omega_1 t dt \right]^2.$$

4.10. Пусть в примере 4.2 последовательность a_1, a_2, \dots, a_n определяется соотношением

$$a_k = A b_k, \quad k = \overline{1, n},$$

где $\sum_{k=1}^n b_k^2 = n$; A — положительная СВ, не зависящая от θ и подчиняющаяся закону Релея с параметром A_0

$$W_A(a) = (a/A_0^2) \exp(-a^2/2A_0^2), \quad a \geq 0.$$

Найти обнаружитель Неймана-Пирсона, включая зависимость величины порога от $\alpha = Q_0$ и РПХ.

4.11. Пусть $\Phi(\tau)$ — комплексная КФ узкополосного гауссовского шума. Пусть комплексная огибающая шума для двух моментов времени t_1 и t_2 имеет вид $R_j \exp(i\theta_j) = X(t_j) + iY(t_j)$, $j = \overline{1, 2}$. Показать, что соответствующая ПРВ амплитуд R_1 и R_2 имеет вид

$$W(R_1, R_2) = \frac{R_1 R_2}{\sigma^4(1-r^2)} \exp \left[\frac{R_1^2 + R_2^2}{2\sigma^2(1-r^2)} \right] I_0 \left[\frac{r R_1 R_2}{\sigma^2(1-r^2)} \right],$$

где $\sigma^2 = \Phi(0)$, $r = |\Phi(t_1 - t_2)|/\Phi(0)$.

Указание. Найти совместную ПРВ $W(R_1, R_2, \theta_1, \theta_2)$ и проинтегрировать по θ_1 и θ_2 .

4.12. В условиях предыдущей задачи найти ПРВ разности $\Psi = \theta_1 - \theta_2$, интегрируя совместную ПРВ $W(R_1, R_2, \theta_1, \theta_2)$ по R_1, R_2 вместо интегрирования по фазам [71].

Указание. Перейти к переменным (z, t) , где $R_1 = \sigma z \cos t$, $R_2 = \sigma z \sin t$ и интегрировать сначала по z , $0 < z < \infty$, и затем по t , $0 < t < \pi/2$.

Ответ. При $a = |r| \cos(\Psi - \beta)$ и $\beta = \arg r$

$$W(\Psi) = (2\pi)^{-1} (1 - |r|^2) (1 - a^2)^{-3/2} [\sqrt{1 - a^2} + a(\pi/2 + \arcsin a)].$$

4.13. Синусоидальный сигнал с амплитудой A смешан аддитивно с гауссовским узкополосным шумом, у которого $\sigma^2 = \Phi(0)$. Показать, что фаза θ аддитивной суммы имеет ПРВ

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-a^2/2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a \cos \theta e^{-0.5a^2 \sin^2 \theta} [1 - \operatorname{erfc}(a \cos \theta)],$$

где $a = A/\sigma$.

Найти гауссовскую аппроксимацию для этой ПРВ при $a \gg 1$ [71].

4.14. Показать, что ОП (4.13) равно производной dQ_d/dQ_0 , где Q_0 и Q_d находятся соответственно по (4.15) и (4.19).

4.15. Пусть имеется аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и узкополосного гауссовского шума $n(t)$ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 .

$$x(t) = s(t) + n(t),$$

где $s(t) = A \cos(\omega_c t + \theta)$ Здесь θ — СВ, равномерно распределенная в интервале $[0; 2\pi]$.

Определить оптимальное правило обнаружения сигнала, если наблюдается выборка огибающей колебания $x(t)$; $\mathbf{V} = (V_1, V_2, \dots, V_K)^T$, где V_i — отсчеты огибающей [20].

5 Последовательное обнаружение

5.1. Последовательные многошаговые алгоритмы проверки простой гипотезы против простой альтернативы

В предыдущих главах интервал наблюдения (объем выборки) был фиксирован. Если интервал наблюдения не фиксирован, а зависит от самих входных данных, то говорят, что приемное устройство осуществляет последовательный анализ.

При последовательном анализе (ПА) количество выполненных измерений зависит от характера данных $x(t)$ (или X_n) т.е. от значений статистик T_1, T_2, \dots, T_k .

На k -м этапе выбор между продолжением эксперимента еще на один шаг и вынесением окончательного решения определяется отношением правдоподобия (ОП)

$$l_k = l_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \frac{W_1(x_1, x_2, \dots, x_k)}{W_0(x_1, x_2, \dots, x_k)}, \quad (5.1)$$

составляемого для первых k отсчетов наблюдения. Как и ранее, $W_0(x_1, x_2, \dots, x_k)$ — это совместная ПРВ, соответствующая гипотезе H_0 , а $W_1(x_1, x_2, \dots, x_k)$ — соответствующая гипотезе H_1 .

При ПА обнаружитель сравнивает ОП Λ_k с двумя порогами A и B , $A > B$. Если $l_k < B$, то принимается гипотеза H_0 : сигнал отсутствует. Если $l_k > A$, то выносится решение в пользу гипотезы H_1 : сигнал присутствует. Если оказывается, что $B < l_k < A$, то решение не выносится и наблюдение продолжается, т.е. происходит переход к следующей стадии $k + 1$.

На последующем этапе формируется следующая статистика и новое ОП Λ_{k+1} , которое затем сравнивается с порогами A и B . Эти процедуры продолжаются до тех пор, пока окончательно не будет выбрана одна из двух гипотез, т.е. процесс продолжается до тех пор, пока не окажется, наконец, больше A и меньше B и, следовательно, будет принято соответствующее решение.

Последовательные методы являются оптимальными в том смысле, что позволяют ускорять (в среднем) окончание проверки гипотез или при той же длительности испытаний выполнить проверки с меньшими ошибками или при одинаковых ошибках разделять менее различные гипотезы, чем в случае испытаний при фиксированном объеме

выборки. Таким образом, алгоритм проверки гипотезы становится *многошаговым*.

При многошаговым (последовательным) алгоритме следует определить два правила [67]:

1) правило остановки, которое определяет, когда следует прекратить наблюдение;

2) правило выбора решения, позволяющее принять гипотезу после прекращения наблюдений.

Вначале наблюдают одно значение x_1 (извлекают выборку размером $n = 1$) и на основании этого значения по заранее установленному правилу либо останавливают наблюдение и принимают одно из двух решений (D_0 или D_1), либо продолжают наблюдения (т.е. отказываются на первом шаге от принятия решения). Если правило предписывает отказ от решения, то извлекают следующую выборку, а описанная процедура повторяется: на основании выборки (x_1, x_2) размером $n = 2$ либо останавливается наблюдение и принимается решение, либо наблюдают следующее значение x_3 и указанная процедура повторяется относительно выборки (x_1, x_2, x_3) . Испытание заканчивается на той выборке, на основании которой наблюдение в соответствии с правилом остановки прекращается и принимается одно из двух решений D_0 или D_1 .

При использовании последовательного алгоритма момент остановки процесса наблюдения является случайным и зависит от предшествующих ему результатов наблюдений. Размер выборки n , при которой выносится окончательное решение, заранее не назначается, а является случайной величиной. На каждом шаге пространство выборок соответствующего числа измерений должно делиться не на две, а на три области: критическую R_1 , допустимую R_0 и промежуточную $R_{\text{пр}}$. Разделение пространства выборок на три области и содержит указание на то, должно ли быть принято одно из решений D_0 или D_1 , или наблюдение должно быть продолжено. Если выборочное значение попадает в критическую область R_1 , то гипотеза H_0 отвергается; если в допустимую область R_0 , то она принимается, а если выборочное значение попало в промежуточную область $R_{\text{пр}}$, то это служит указанием на необходимость продолжить наблюдения.

Как и при непоследовательных алгоритмах, число способов разбиения пространства выборок на три области не ограничено. Следовательно, возможны разнообразные последовательные правила выбора решения, и, очевидно, необходим критерий качества, при помощи которого можно сравнивать различные последовательные правила и выбирать наилучшие.

5.2. Последовательный алгоритм Вальда

Для синтеза оптимального последовательного алгоритма проверки простой гипотезы H_0 против простой альтернативы H_1 А. Вальд предложил использовать в качестве критерия *минимум среднего значения размера выборки* (длительности процесса наблюдения до момента его остановки) при условии, что вероятность ошибки первого рода (уровень значимости) не превышает $\alpha = Q_0$, а вероятность правильного отклонения гипотезы H_0 (мощность критерия) не менее $1 - \beta = Q_d = \gamma$. Заметим при этом, что средние значения размера n выборки $E\{N | H_0\}$, $E\{N | H_1\}$ при справедливости гипотез H_0 и H_1 соответственно, вообще говоря, не равны, и требуется минимизировать обе величины.

В [27] А. Вальд показал, что при независимых наблюдениях среди всех алгоритмах принятия решения — последовательных и непоследовательных, для которых условные вероятности ошибок не превосходят величин α и β , последовательное правило выбора решения, состоящее в сравнении отношения правдоподобия с двумя порогами B и A , приводит к наименьшим значениям $E\{N | H_0\}$, $E\{N | H_1\}$.

Рассмотрим применение последовательного анализа в проблеме обнаружения положительного сигнала в аддитивном шуме.

Пусть наблюдаются переменные x_1, x_2, \dots , обозначим отсчеты шума через v_1, v_2, \dots и сигнал через θ_1 . Задачей является проверка гипотез

$$\begin{aligned} H_0: x_i &= v_i, \quad i = 1, 2, \dots; \\ H_1: x_i &= v_1 + \theta_1, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

В дальнейшем будем сравнивать обнаружитель с фиксированным объемом выборки — обнаружитель с фиксированным отношением правдоподобия (ФОП-обнаружитель; англ. аналог FSS — fixed sample-size detector) и последовательный обнаружитель Вальда (ПОВ; англ. аналог Wald's sequential probability ratio test — SPRT).

В первом случае фиксируется объем выборки величиной M и выбирается порог T_0 .

В последовательном обнаружителе объем выборки зависит от реализаций x_1, x_2, \dots . Обозначим этот объем выборки через N . Как было отмечено, этот объем выборки является случайной величиной.

Допустим, что отсчеты шума v_1, v_2, \dots независимы и одинаково распределены с известной ПРВ $W(x)$ и θ_1 — известный сигнал. Тогда ОП (5.1) при n наблюдениях $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет вид

$$l_n(x) = \prod_{i=1}^n \frac{W(x_i - \theta_1)}{W(x_i)}. \quad (5.3)$$

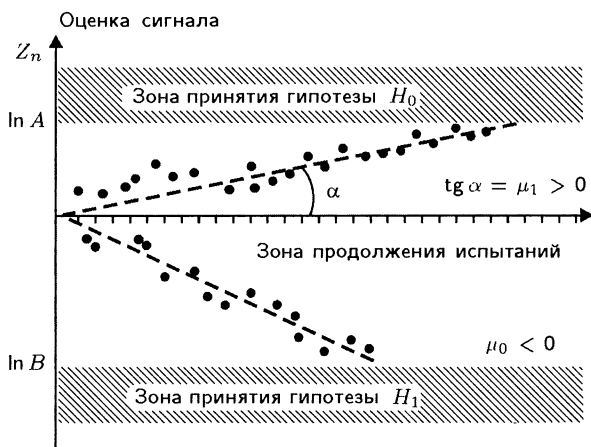


Рис. 5.1

Последовательный обнаружитель Вальда сравнивает ОП $l_n(x)$ с двумя постоянными порогами A и B (обычно $0 < B < 1 < A < \infty$) при $n = 1, 2, \dots$

Испытание заканчивается, если $l_n(x) \geq A$, и принимается гипотеза H_1 или, если $l_n(x) \leq B$, то принимается гипотеза H_0 .

Аналогично испытывать можно логарифм ОП (ЛОП) и в качестве попрогов принять $a = \ln A$ и $b = \ln B$, так что алгоритм принятия решения принимает вид

$$\sum_{i=1}^n z_i = \begin{cases} \geq a & \text{— принимается } H_1; \\ \leq b & \text{— принимается } H_0; \\ \text{иначе} & \text{берется следующий отсчет и испытания} \end{cases} \quad (5.4)$$

повторяются.

Здесь $z_i = \ln[W(x_i - \theta_i)/W(x_i)] = \ln l(x_i)$.

Границы области применения решения и траектории отсчетов показаны на рис. 5.1. На рисунке

$$Z_n = \sum_{i=1}^n z_i \quad (5.5).$$

Объем выборки N равен значению n , при котором принимается решение

$$N = \inf \left\{ n: \sum_{i=1}^n z_i \notin (b, a) \right\}.$$

Как показал А. Вальд, ПОВ завершает испытания с вероятностью, равной единице, т.е. $P\{N < \infty\} = 1$.

Как и ранее, обозначим через α вероятность ошибки первого рода (ВЛТ):

$$Q_0 = P(D_1 | H_0) = \alpha$$

и вероятность ошибки второго рода (пропуск сигнала) через

$$Q_1 = \beta = P(D_0 | H_1) = 1 - \gamma,$$

где $\gamma = Q_d = P(D_1 | H_1)$ — вероятность обнаружения. Согласно [27] α и γ удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{\alpha}{\gamma} \leq A^{-1} = e^{-a}; \quad (5.6)$$

$$\frac{1 - \gamma}{1 - \alpha} \leq B = e^b. \quad (5.7)$$

Поскольку $0 < \gamma \leq 1$, $0 < 1 - \alpha \leq 1$, то неравенства (5.6) и (5.7) эквивалентны следующим неравенствам:

$$\alpha \leq e^{-a}, \quad \gamma \geq 1 - e^b. \quad (5.8)$$

Если среднее значение и дисперсия ЛОП $\ln l(x)$ малы по сравнению с a и $|b|$, то объем выборки становится значительным. В этих случаях неравенства (5.8) можно заменить приближительными равенствами при условии пренебрежения эффектом перескока решающих порогов:

$$a \approx \ln \frac{\gamma}{\alpha}; \quad b = \ln \frac{1 - \gamma}{1 - \alpha}. \quad (5.9)$$

Отсюда достаточно просто находятся пороги a и b , поскольку α и β считаются заданными. В этом одно из достоинств ПОВ.

Введем среднее значение выборки и обозначим это значение через $E(N | 0)$, если справедлива гипотеза H_0 , и $E(N | \theta_1)$, если справедлива гипотеза H_1 .

Для обнаружителя с фиксированным объемом выборки при фиксированном ОП (ФОП обнаружителя) среднее значение выборки совпадает с объемом выборки $M = \text{const}$.

Известно, что при наблюдениях, когда отсчеты шума независимы и одинаково распределены ПОВ обладает оптимальным свойством — минимизирует $E(N | 0)$ и $E(N | \theta_1)$ как в классе последовательных, так и в классе непоследовательных процедур, при вероятностях ошибок не больших α и $\beta = 1 - \gamma$ при гипотезах H_0 и H_1 соответственно и конечных средних значениях выборки.

Пусть ПОВ имеет вероятности ошибок α и $\beta = 1 - \gamma$ (и соответствующих значения a и b) и пусть при этом средние значения равны $E(N | 0)$ и $E(N | \theta_1)$; и пусть альтернативное (конкурирующее) испытание имеет ошибку α' при H_0 и ошибку $\beta' = 1 - \gamma'$ при H_1 ,

$E(N' | 0) < \infty$ при H_0 и $E(N' | \theta_1) < \infty$ при H_1 , тогда оптимальность ПОВ характеризуется условием

$$\alpha' \leq \alpha; \quad 1 - \gamma' \leq 1 - \gamma \quad (5.10)$$

и, как следствие, выполняются неравенства

$$E(N | 0) \leq E(N' | 0); \quad E(N | \theta_1) \leq E(N' | \theta_1). \quad (5.11)$$

Область значений α и $1 - \gamma$, определяемых по (5.10), изображена на рис. 5.2.

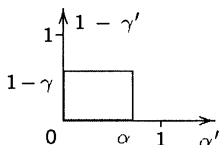


Рис. 5.2

Кроме положительных свойств, ПОВ имеет и недостатки. Один из них состоит в том, что при умеренном или малом среднем значении выборки реальный объем выборки N может быть очень большим. Этот недостаток можно устранить, если завершить испытания, когда величина

N становится достаточно большой.

Однако это усечение изменяет характеристику ПОВ (т.е. вероятности ошибок и среднее значение выборки). Для того чтобы сохранить характеристики ПОВ относительно неизменными, точка отсечения n_{\max} должна быть такова, чтобы вероятность неравенства $N > n_{\max}$ была мала [109, 165–168]. Указанный алгоритм проверки гипотез называется усеченным последовательным алгоритмом (англ: truncated SPRT).

Для всех $n < n_{\max}$ устанавливается (как для неусеченного алгоритма) два порога, с которыми сравниваются ОП. Если размер выборки $N = n_{\max}$, то ОП сравнивается только с одним порогом согласно одношаговому алгоритму. Чем меньше n_{\max} , т.е. чем сильнее усечение, тем меньше будет выигрыш в среднем времени, получаемом от последовательной процедуры.

Другим недостатком ПОВ является необходимость знания величины θ_1 в процессе испытаний. Однако истинное значение сигнала в практических случаях может быть неизвестно, в связи с чем возникает необходимость его предварительной оценки.

Пусть истинное значение сигнала имеет величину θ . Если $0 < \theta < \theta_1$, то вероятность обнаружения уменьшается и среднее значение выборки возрастает.

Одной из проблем, возникающей при использовании ПОВ, является нахождение точных формул, связывающих пороги a и b и вероятности ошибок α и $1 - \beta$, поскольку в практических случаях формулы (5.9) являются грубыми.

Для того чтобы анализировать изменение характеристик ПОВ при изменении значений сигнала θ , А. Вальд ввел вероятность $L(\theta)$

принять в конце испытания гипотезу H_0 , эту вероятность Вальд назвал оперативной характеристической функцией (ОХФ). Как правило, $L(\theta)$ уменьшается при увеличении θ . Поскольку рассматриваемые испытания должны непременно закончиться, то вероятность принять гипотезу H_1 равна $1 - L(\theta)$. Наряду с ОХФ вводится зависимость от величины θ среднего значения выборки $E(N | \theta)$.

Справедливы равенства

$$1 - \alpha = L(0); \quad 1 - \gamma = L(\theta_1). \quad (5.12)$$

А. Вальд получил следующие приближенные соотношения:

$$L(\theta) \approx \begin{cases} \frac{\exp[ah(\theta)] - 1}{\exp[ah(\theta)] - \exp[bh(\theta)]} & \text{при } h(\theta) \neq 0, \\ \frac{a}{a-b} & \text{при } h(\theta) = 0; \end{cases} \quad (5.13)$$

$$E(N | \theta) = \begin{cases} \frac{bL(\theta) + a(1 - L(\theta))}{E(Z | \theta)} & \text{при } E(Z | \theta) \neq 0; \\ \frac{-ab}{E(Z^2 | \theta)} & \text{при } E(Z | \theta) = 0, \end{cases} \quad (5.14)$$

где $h(\theta)$ — нетривиальное решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{W(x - \theta_1)}{W(x)} \right]^{h(\theta)} W(x - \theta) dx = 1, \quad (5.15)$$

если нетривиальное решение существует, и $h(\theta) = 0$ в других случаях;

$$E(Z^k | \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln \frac{W(x - \theta_1)}{W(x)} \right]^k W(x - \theta) dx. \quad (5.16)$$

Если $\theta = 0$ (справедлива гипотеза H_0), тогда $h(\theta = 0) = 1$, если $\theta = \theta_1$ (справедлива гипотеза H_1), тогда $h(\theta = \theta_1) = -1$. При этом согласно (5.13)

$$L(0) \approx \frac{e^a - 1}{e^a - e^b}; \quad L(\theta_1) \approx \frac{e^b(1 - e^a)}{e^a - e^b}. \quad (5.17)$$

Приблизительный вид кривых $L(\theta)$ и $E(N | \theta)$ изображен на рис. 5.3.

Величина $E(N | \theta)$ достигает максимума в точке $\theta = \theta^*$, причем $\theta < \theta^* < \theta_1$, если ПРВ $W(x)$ — симметричная, и $E(N | \theta)$ симметрична относительно точки $\theta^* = \theta_1/2$, то $a = -b$.

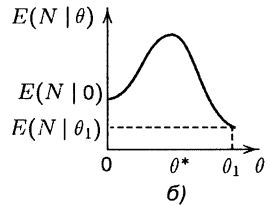
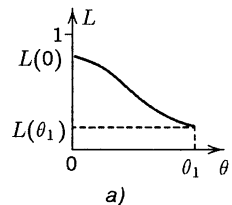


Рис. 5.3

Следует отметить, что в общем случае отсутствуют точные выражения для ОХФ $L(\theta)$ и величины $E(N | \theta)$ в замкнутой форме.

5.3. Асимптотическая относительная эффективность

Данный показатель определяется при малом сигнале и большом объеме выборки и выражает меру эффективности одного обнаружителя перед другим. В рассматриваемом случае сравниваются ПОВ-и ФОП-обнаружители.

Пусть $M(\alpha, \gamma)$ — объем выборки ФОП обнаружителя, тогда

$$l(x) = \prod_{i=1}^M \frac{W(x_i - Q_i)}{W(x_i)} \quad (5.18)$$

с вероятностью ошибок α при H_0 и β при H_1 .

Пусть $E(N | \alpha, \gamma, 0)$ и $E(N | \alpha, \gamma, \theta_1)$ — средние значения выборки при гипотезах H_0 и H_1 соответственно для ПОВ с алгоритмом (5.4), который характеризуется вероятностями ошибок α и $\beta = 1 - \gamma$. Тогда асимптотическая относительная эффективность — АОЭ ПОВ по отношению к ФОП-обнаружителю определяется соотношением

$$\text{АОЭ}_{\text{ПОВ, ФОП}} = \lim_{\theta_1 \rightarrow 0} \frac{M(\alpha, \gamma)}{E(N | \alpha, \gamma, 0)} \quad (5.19)$$

при гипотезе H_0 и

$$\text{АОЭ}_{\text{ПОВ, ФОП}} = \lim_{\theta_1 \rightarrow 0} \frac{M(\alpha, \gamma)}{E(N | \alpha, \gamma, \theta_1)} \quad (5.20)$$

при гипотезе H_1 . Здесь пределы взяты при $\theta_1 \rightarrow 0$ и постоянных вероятностях α и $1 - \gamma$.

При некоторых слабых ограничениях на ПРВ $W(x)$ находятся приближенные (при малых θ_1) соотношения [109]:

$$M(\alpha, \beta) \approx \left[\frac{\sigma_0(\theta_1)\Phi^{-1}(\alpha) + \sigma_1(\theta_1)\Phi^{-1}(1 - \gamma)}{\mu_1(\theta_1) - \mu_0(\theta_1)} \right]^2; \quad (5.21)$$

$$E(N | \alpha, \gamma, 0) \approx \frac{\alpha \ln(\gamma/\alpha) + (1 - \alpha) \ln[(1 - \gamma)/(1 - \alpha)]}{\mu_0(\theta_1)}; \quad (5.22)$$

$$E(N | \alpha, \gamma, \theta_1) \approx \frac{\gamma \ln(\gamma/\alpha) + (1 - \gamma) \ln[(1 - \gamma)/(1 - \alpha)]}{\mu_1(\theta_1)}, \quad (5.23)$$

где $\mu_j(\theta_1) = E(Z_i | H_j)$; $Z_i = \ln[W(X_i - \theta_1)/W(X_i)] = \ln l(X_i)$; $\sigma_j^2(\theta_1)$ — дисперсия СВ Z_i при гипотезе H_j ; $\Phi^{-1}(\cdot)$ — обратная функция стандартного нормального распределения $\Phi(\cdot)$. При этом [109]

$$\begin{aligned} \lim_{\theta_1 \rightarrow 0} \frac{[\mu_1(\theta_1) - \mu_0(\theta_1)]^2}{\mu_0(\theta_1)\sigma_j(\theta_1)} &= -2, \quad j = 0, 1; \\ \lim_{\theta_1 \rightarrow 0} \frac{[\mu_1(\theta_1) - \mu_0(\theta_1)]^2}{\mu_1(\theta_1)\sigma_j(\theta_1)} &= 2, \quad j = 0, 1. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Тогда соотношения (5.22) и (5.23) можно записать в виде

$$E(N | \alpha, \gamma, 0) = E[l(x) | H_0] / \mu_0, \quad (5.25)$$

$$E(N | \alpha, \gamma, \theta_1) = E[l(x) | H_1] / \mu_1, \quad (5.26)$$

где

$$E[l(x) | H_0] = (1 - \alpha) \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + \alpha \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}; \quad (5.27)$$

$$E[l(x) | H_1] = \beta \ln \frac{\beta}{1 - \alpha} + (1 - \beta) \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}; \quad (5.28)$$

$$\beta = 1 - \gamma = Q_1.$$

С учетом соотношений (5.22)–(5.24) получим [109]

$$\text{АОЭ}_{\text{пов, фоп}} = -0,5 \frac{[\Phi^{-1}(\alpha) + \Phi^{-1}(1 - \gamma)]^2}{\alpha \ln(\gamma/\alpha) + (1 - \alpha) \ln[(1 - \gamma)/(1 - \alpha)]} \quad (5.29)$$

при H_0 и

$$\text{АОЭ}_{\text{пов, фоп}} = 0,5 \frac{[\Phi^{-1}(\alpha) + \Phi^{-1}(1 - \gamma)]^2}{\gamma \ln(\gamma/\alpha) + (1 - \gamma) \ln[(1 - \gamma)/(1 - \alpha)]} \quad (5.30)$$

при H_1 . Эти соотношения зависят от конкретных значений α и γ .

Величины АОЭ изменяются от 1,61 до 9,52 при $\alpha \in (10^{-12}, 10^{-2})$ и $\gamma \in (10^{-12}, 10^{-2})$.

Замечание. Если воспользоваться приближенными соотношениями (5.9), то среднее значение выборки можно представить в виде

$$E(N | H_0) = [aQ_0 + b(1 - Q_0)] / \mu_0; \quad (5.31)$$

$$E(N | H_1) = [aQ_d + b(1 - Q_d)] / \mu_1. \quad (5.32)$$

Пример 5.1. Обнаружение постоянного сигнала.

Сравним условия обнаружения постоянного сигнала $A = \theta > 0$ при фиксированном объеме выборки N и обнаружения постоянного сигнала при последовательном обнаружении.

Согласно гл. 2, рабочая характеристика приемника (РХП) ФОП-обнаружителя определяется соотношением

$$Q_d = Q(Q^{-1}(Q_0) - d), \quad (5.33)$$

где $d = \sqrt{MA^2}/\sigma = \sqrt{M}\theta/\sigma$; $M = M_{\text{фоп}}$ — объем выборки.

Запишем (5.31) в развернутом виде:

$$Q_0 = Q(x); \quad Q_d = Q(x - d).$$

Пусть $Q_0 = \alpha$; $Q_d = \gamma = 1 - \beta$. Тогда $\alpha = 1 - \Phi(x)$; $1 - \beta = 1 - \Phi(x - d)$. Отсюда

$$\Phi(x) = 1 - \alpha; \quad x = \Phi^{-1}(1 - \alpha);$$

$$1 - \beta = 1 - \Phi(x - d) = 1 - \Phi[\Phi^{-1}(1 - \alpha) - d].$$

При этом

$$\beta = \Phi[\Phi^{-1}(1 - \alpha) - d],$$

или

$$\Phi^{-1}(1 - \alpha) - d = \Phi^{-1}(\beta).$$

Отсюда

$$d = \Phi^{-1}(1 - \alpha) - \Phi^{-1}(\beta).$$

Тогда

$$M = M_{\text{Фоп}} = \frac{\sigma^2}{\theta^2} [\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \Phi^{-1}(\beta)]^2. \quad (5.34)$$

Остается найти величину μ_1 . Согласно гл. 2, подлежащая испытанию статистика имеет вид

$$\ln l(\mathbf{X}_n) = \frac{\theta}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \left(x_k - \frac{\theta}{2} \right). \quad (5.35)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_j &= E\{\ln[W_1(x_1)/W_0(x_1)] \mid H_j\} = \frac{\theta}{\sigma^2} \{E(x_1 - \theta/2) \mid H_j\} = \\ &= \begin{cases} -\theta^2/2\sigma^2 & \text{при } j = 0; \\ \theta^2/2\sigma^2 & \text{при } j = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Учитывая (5.28), получим

$$E(N \mid H_1) = \frac{E[l(x) \mid H_1]}{\mu_1} = \frac{2\sigma^2}{\theta^2} \left[\beta \ln \left(\frac{\beta}{1 - \alpha} \right) + (1 - \beta) \ln \left(\frac{1 - \beta}{\alpha} \right) \right].$$

Воспользуемся соотношением [38]

$$\Phi^{-1}(\rho) + \Phi^{-1}(1 - \rho) = 0. \quad (5.36)$$

Тогда (5.34) приобретает эквивалентный вид:

$$M_{\text{Фоп}} = \frac{\sigma^2}{\theta^2} [\Phi^{-1}(\alpha) + \Phi^{-1}(\beta)]. \quad (5.37)$$

В результате находим

$$\begin{aligned} \text{АОЭ}_{\text{пов, фоп}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{M_{\text{Фоп}}}{E(N \mid H_1)} = \\ &= 0,5 \frac{[\Phi^{-1}(\alpha) + \Phi^{-1}(1 - \gamma)]^2}{\gamma \ln(\gamma/\alpha) + (1 - \gamma) \ln[(1 - \gamma)/(1 - \alpha)]}, \end{aligned}$$

что совпадает с (5.30).

Пусть $\alpha = \beta = 0,1$, тогда в (5.34) с учетом (5.36) получим

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(1 - \alpha) + \Phi^{-1}(\beta) &= \Phi^{-1}(0,9) - \Phi^{-1}(0,1) = \\ &= 2\Phi^{-1}(0,9) = 2 \cdot 1,282 = 2,564.\end{aligned}$$

С другой стороны, при $\alpha = \beta = 0,1$ по (5.28) имеем

$$E[l(x | H_1)] = 0,1 \ln \frac{0,1}{0,9} + 0,9 \ln \frac{0,9}{0,1} = 1,6 \ln 3 \approx 1,7577.$$

Тогда

$$\text{АОЭ}_{\text{ПОВ, ФОП}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{M_{\text{ФОП}}}{E(N | H_1)} = 0,5 \frac{(2,564)^2}{1,7577} = \frac{6,577}{3,516} = 1,87.$$

Следовательно, в данном случае фиксированный объем выборки почти в два раза превышает среднее число испытаний при последовательном обнаружении.

Можно показать, что справедливо соотношение [57, 75]

$$\lim_{\alpha=\beta \rightarrow 0} \frac{M_{\text{ФОП}}}{E(N | H_1)} = 4.$$

Пример 5.2 [8]. Наблюдатель должен решить, какой из двух источников гауссова шума присутствует, причем один из них имеет дисперсию N_0 , другой — N_1 . Среднее значение шума в том и другом случае равно нулю. Наблюдатель измеряет напряжение в n моментов времени, достаточно далеких друг от друга, чтобы результаты x_1, x_2, \dots, x_n были статистически независимы. Две гипотезы, между которыми должен выбирать наблюдатель, это

$$\begin{aligned}H_0 : \quad x_i &\sim N(0, N_0); \\ H_1 : \quad x_i &\sim N(0, N_1),\end{aligned} \quad i = \overline{1, n},$$

где $\mathbf{X}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.

Найти среднее значение числа измерений при обеих гипотезах.

Решение. Совместная ПРВ системы n измерений напряжения выражается формулой

$$W_k(x) = \frac{1}{(2\pi N_k)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2N_k} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right].$$

Тогда ОП имеет вид

$$l(\mathbf{X}_n) = \left(\frac{N_0}{N_1} \right)^{n/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_0} \right) \sum_{i=1}^n x_i^2 \right],$$

или

$$\ln l(\mathbf{X}_n) = \frac{n}{2} \ln \frac{N_0}{N_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_0} \right) \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Отсюда находим величину z_i в (5.8)

$$z_i = \frac{N_1 - N_0}{2N_0N_1} x_i^2 + \frac{1}{2} \ln \frac{N_0}{N_1}.$$

Величина Z_k (5.5) вычисляется после k -го измерения напряжения и прибавляется к предыдущей сумме:

$$Z_{k-1} = z_1 + z_2 + \dots + z_{k-1}.$$

На этапе (шаге), когда сумма устанавливается ниже $b = \ln B$, испытание заканчивается, и наблюдатель решает в пользу гипотезы H_0 . Если же сумма превосходит порог $a = \ln A$, то выбирается гипотеза H_1 .

Среднее значение μ_j , $j = 0, 1$ принимает вид

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} z_k W_j(x) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{N_0}{N_1} + \frac{N_1 - N_0}{2N_0N_1} N_j.$$

Отсюда находим

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{N_0}{N_1} + \frac{N_1 - N_0}{N_1} \right); \quad (5.38)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{N_0}{N_1} + \frac{N_1 - N_0}{N_0} \right). \quad (5.39)$$

В результате по (5.27), (5.31) и (5.28), (5.32) получим среднее число испытаний. Чем ближе дисперсии N_0 и N_1 , тем больше в среднем требуется измерений, чтобы достигнуть определенных вероятностей ошибок.

Пример 5.3. Сравнить число испытаний для энергетического приемника (см. гл. 12) в случае фиксированного объема выборки — при фиксированном ОП (ФОР) и среднее значение последовательных испытаний.

Решение. В данном случае из примера 5.2 находим величину z_k при $N_1 = \sigma_s^2 + \sigma^2$; $N_0 = \sigma^2$, когда проверяются гипотезы

$$H_0 : x[n] = w[n];$$

$$H_1 : x[n] = s[n] + w[n], \quad n = \overline{1, N},$$

где $s[n]$ и $w[n]$ — независимые гауссовские СВ с нулевыми средними значениями, $s[n] \sim N(0, \sigma_s^2)$, $w[n] \sim N(0, \sigma^2)$.

Отношение правдоподобия имеет вид

$$\ln l(\mathbf{X}_n) = \frac{N}{2} \ln \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2(\sigma_s^2 + \sigma^2)} \sum_{k=1}^N x_k^2.$$

По (5.38) и (5.39) получим

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} \right); \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} \left(\ln \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} + \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} \right), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 + \sigma^2/\sigma_s^2} - \ln \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} \right) \right]; \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} - \ln \left(1 + \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Пусть $\sigma_s^2/\sigma^2 = 1$, тогда

$$\mu_0 = -0,0965; \quad \mu_1 = 0,5(1 - 0,6931) = 0,1535.$$

Полагая, как и в примере 5.1, $Q_0 = Q_1 = 0,1$; $Q_d = 0,9$, по (5.25), (5.26) получим среднее число испытаний

$$E(N | H_0) = \frac{1,7577}{0,0965} = 18,2; \quad E(N | H_1) = \frac{1,7577}{0,1535} = 11,5.$$

Найдем число испытаний при ФОП. Известно (см. гл. 12), что характеристики обнаружения энергетического приемника имеют вид

$$Q_d = Q_{\chi_N^2} \left[\frac{Q_{\chi_N^2}^{-1}(Q_0)}{1 + \sigma_s^2/\sigma^2} \right].$$

При $Q_0 = \alpha = 0,1$ процентная точка χ^2 -распределения $Q_{\chi_{25}^2}^{-1} = 34,382$ [38,58], тогда при $\sigma_s^2/\sigma^2 = 1$

$$Q_d = Q_{\chi_{25}^2}(17,2) = 0,87 \approx 0,9.$$

Таким образом, выполняются условия расчета среднего значения последовательного анализа ($Q_0 = 0,1$; $Q_d = 0,9$), и отношение $M_{\text{ФОП}}/E(N | H_j)$, $j = 0, 1$, имеет вид

$$\frac{M_{\text{ФОП}}}{E(N | H_0)} = \frac{25}{18,2} = 1,37; \quad \frac{M_{\text{ФОП}}}{E(N | H_1)} = \frac{25}{11,5} \approx 2,20.$$

Снова, как и в примере 5.1, получили превышение над средним значением $M_{\text{ФОП}}$ в 1,4 и 2,2 раза соответственно.

5.4. О длительности последовательного испытания [26]

Рассмотрим применение методов, связанных с достижением границ марковскими процессами, к оценке длительности последовательной процедуры обнаружения детерминированного сигнала $s(t)$ на фоне белого шума $n(t)$ [72]. В этом случае отношение правдоподобия имеет вид

$$l(T) = \exp \left\{ \frac{1}{N_0} \int_0^T [2\xi(t)s(t) - s^2(t)] dt \right\} \quad (5.41)$$

В соответствии с процедурой последовательных испытаний Вальда отношение правдоподобия $l(t)$ в каждый момент времени сравнивается с двумя пороговыми величинами [см. (5.6), (5.7)]:

$$A = Q_d/Q_0, \quad B = Q_1/(1 - Q_0),$$

где Q_0 — вероятность ложной тревоги, $Q_1 = 1 - Q_d$; Q_d — вероятность обнаружения сигнала. Испытания заканчиваются принятием решения о наличии в течение времени наблюдения сигнала (гипотеза H_1), если в некоторый момент времени $l(t) \geq A$, или об отсутствии сигнала (гипотеза H_0), если $l(t) \leq B$. При $B < l(t) < A$ испытания продолжаются. Очевидно, что при $Q_0 < 1/2$ имеет место соотношение $A > B$.

Таким образом, время принятия решения при описанной процедуре последовательного анализа является случайной величиной. Вычислим распределение длительности процедуры последовательного анализа и ее моменты. Можно показать, что среди всех возможных процедур обнаружения сигнала процедура последовательного анализа минимизирует среднее время, необходимое для принятия решения при заданных вероятностях Q_0 и Q_d .

Рассмотрим случайный процесс

$$v(t) = \ln l(t) = \frac{1}{N_0} \int_0^t [2\xi(\tau)s(\tau) - s^2(\tau)] d\tau. \quad (5.42)$$

Так как экспонента — монотонная функция, то достижение границ A или B процессом $l(t)$ эквивалентно достижению процессом $v(t)$ границ

$$a = \ln A, \quad b = \ln B.$$

Поскольку $\xi(t)$ представляет собой гауссовский процесс, то $v(t)$ также является гауссовским процессом. Покажем, что $v(t)$ является винеровским процессом с независимыми приращениями. Действительно, производная по времени процесса $v(t)$ при наличии сигнала

(гипотеза H_1) равна

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{N_0} [s^2(t) + 2s(t)n(t)]. \quad (5.43)$$

В отсутствие сигнала (гипотеза H_0)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{N_0} [-s^2(t) + 2s(t)n(t)]. \quad (5.44)$$

Стохастические дифференциальные уравнения (5.43) и (5.44) определяют неоднородный марковский процесс с коэффициентами сноса и диффузии, равными

$$a(v, t) = \pm s^2(t)/N_0, \quad b(t) = 2s^2(t)/N_0. \quad (5.45)$$

Для него справедливо уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{N_0}{s^2(t)} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \mp \frac{\partial p}{\partial v}. \quad (5.46)$$

Заменой переменных

$$\tau = \int_0^t s^2(\tau) d\tau \quad (5.47)$$

уравнение (5.46) приводится к виду

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \mp \frac{\partial p}{\partial v} \right).$$

Решением этого уравнения является выражение

$$p(v, \tau | v_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp \left[-\frac{v - v_0 \pm \tau/2}{2\tau} \right]^2.$$

Отсюда следует, что процесс $v(t)$ является винеровским процессом с независимыми приращениями и имеет плотность вероятности перехода

$$\pi(y, r | x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\tau(r) - \tau(t)]}} \exp \left\{ -\frac{[y - x \pm [\tau(r) - \tau(t)]/2]^2}{2[\tau(r) - \tau(t)]} \right\}. \quad (5.48)$$

Здесь знак плюс соответствует отсутствию, а минус — наличию сигнала в принятой реализации $\xi(t)$.

Таким образом, задача нахождения распределения длительности процедуры последовательного обнаружения детерминированного сигнала на фоне белого шума свелась к задаче достижения границ (a, b) нестационарным винеровским процессом $v(t)$. В [72] показано, что формула (5.48) справедлива для более общего случая обнаружения детерминированного сигнала на фоне гауссовских помех с дробно-

рациональной спектральной плотностью. Однако в этом случае $\tau(t)$ определяется более сложным путем.

Заменой переменных (5.47) плотность вероятности $p_{b,a}(t, v_0)$ времени первого достижения границ (a, b) из начальной точки v_0 сводится к плотности вероятности $g_{b,a}(\tau, v_0)$ достижения границ (a, b) однородным винеровским процессом. При этом

$$p_{b,a}(t, v_0) dt = g_{b,a}(t, v_0) dt, \quad a < v_0 < b. \quad (5.49)$$

Можно показать [73], что для преобразования Лапласа

$$g_{b,a}(s, v_0) = \int_0^\infty g_{b,a}(\tau, v_0) \exp(-s\tau) d\tau$$

от плотности вероятности $g_{b,a}(\tau, v_0)$ справедливо уравнение

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 g_{b,a}^*(s, v_0)}{dv_0^2} \pm \frac{1}{2} \frac{dg_{b,a}^*(s, v_0)}{dv_0} - s g_{b,a}^*(s, v_0) = 0 \quad (5.50)$$

с граничными условиями

$$g_{b,a}^*(s, a) = g_{b,a}^*(s, b) = 1. \quad (5.51)$$

В уравнении (5.50) знак плюс соответствует H_1 , знак минус — H_0 . Отметим, что при определении распределения длительности процедуры последовательного анализа интересуются временем первого достижения границ (a, b) процессом $v(t)$ из начального состояния $v(0) = 0$. С учетом этого решение уравнения (5.50) с граничными условиями (5.51) при наличии сигнала в принятой реализации (гипотеза H_1) имеет вид

$$\begin{aligned} g_{b,a}^{+*}(s, 0) &= \frac{\text{sh}[b\sqrt{2(s+1/8)}]}{\text{sh}[(b-a)\sqrt{2(s+1/8)}]} \exp\left(\frac{a}{2}\right); \\ g_{b,a}^{-*}(s, 0) &= \frac{\text{sh}[a\sqrt{2(s+1/8)}]}{\text{sh}[(a-b)\sqrt{2(s+1/8)}]} \exp\left(\frac{b}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Здесь через $g_{b,a}^{+*}(s, 0)$ обозначено преобразование Лапласа от плотности вероятности $g_{b,a}^+(\tau, 0)$ достижения границы a ($a > b$) раньше, чем границы b . Согласно обратному преобразованию от (5.52)

$$\begin{aligned} g_{b,a}^+(\tau, 0) &= \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{4a-\tau}{8}\right) \times \\ &\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} [a - 2n(a-b)] \exp\left\{-\frac{2}{\tau} \left[\frac{a}{2} - n(a-b)\right]^2\right\}; \\ g_{b,a}^-(\tau, 0) &= \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(\frac{4b-\tau}{8}\right) \times \end{aligned} \quad (5.53)$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} [2n(b-a) - b] \exp \left\{ -\frac{2}{\tau} \left[\frac{b}{2} - n(b-a) \right]^2 \right\};$$

$$g_{b,a}(\tau, 0) = g_{b,a}^+(\tau, 0) + g_{b,a}^-(\tau, 0).$$

Плотности вероятности $p_{b,a}^+(t, 0)$ времени принятия решения H_1 , $p_{b,a}^-(t, 0)$ — принятия решения H_0 и $p_{b,a}(t, 0)$ — длительности процедуры последовательного анализа при наличии сигнала можно найти согласно (5.49), подставив в (5.53) $\tau = \tau(t)$ и умножив на $b\tau(t)/dt = 2s^2(t)/N_0$.

В отсутствие сигнала (гипотеза H_0) аналогичным образом получим

$$g_{b,a}^{+*}(s, 0) = \frac{\text{sh}[b\sqrt{2(s+1/8)}]}{\text{sh}[(b-a)\sqrt{2(s+1/8)}]} \exp\left(-\frac{a}{2}\right);$$

$$g_{b,a}^{-*}(s, 0) = \frac{\text{sh}[a\sqrt{2(s+1/8)}]}{\text{sh}[(a-b)\sqrt{2(s+1/8)}]} \exp\left(-\frac{b}{2}\right).$$
(5.54)

По известной плотности вероятности $p_{b,a}(t, 0)$ среднее время процедуры последовательного анализа находится по формуле

$$T_1(b, 0, a) = \int_0^{\infty} t p_{b,a}(t, 0) dt. \quad (5.55)$$

В ряде случаев для его нахождения можно также воспользоваться свойством преобразования Лапласа

$$T_1(b, 0, a) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} p_{b,a}^*(s, 0). \quad (5.56)$$

Рассмотрим два примера.

Пример 5.4. Длительность процедуры последовательного обнаружения постоянного сигнала.

Пусть $s(t) = A = \text{const}$. В этом случае

$$\tau(t) = 2A^2 t / N_0; \quad t = N_0 \tau / 2A^2.$$

Следовательно, средняя длительность процедуры обнаружения

$$T_1(b, 0, a) = \int_0^{\infty} \tau p_{b,a}(\tau, 0) d\tau = \frac{N_0}{2A^2} \int_0^{\infty} \tau g_{b,a}(\tau, 0) d\tau =$$

$$= -\frac{N_0}{2A^2} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dg_{b,a}^*(s, 0)}{ds}. \quad (5.57)$$

В отсутствие сигнала (H_0) на интервале наблюдения из (5.54) и (5.57)

после вычисления предела производной $g_{*b,a}(s, 0)$ получим

$$T_1(b, 0, a) = -\frac{N_0}{A^2} \left(a \frac{e^a - 1}{e^a - e^b} + a \frac{1 - e^b}{e^a - e^b} \right). \quad (5.58)$$

Так как справедливы равенства

$$Q_0 = \frac{1 - e^b}{e^a - e^b}; \quad 1 - Q_0 = \frac{e^a - 1}{e^a - e^b},$$

то формуле (5.58) можно придать другой вид:

$$T_1(b, 0, a) = -\frac{N_0}{A^2} [aQ_0 + b(1 - Q_0)], \quad (5.59)$$

что совпадает с (5.31) при $\mu_0 = A^2/N_0$.

Аналогично, при наличии сигнала (H_1) при помощи (5.53) и (5.57) получим

$$T_1(b, 0, a) = \frac{N_0}{A^2} [aQ_d + b(1 - Q_d)], \quad (5.60)$$

что совпадает с (5.32) при $\mu_0 = A^2/N_0$.

Пример 5.5. Длительность процедуры последовательного обнаружения гармонического сигнала [72].

Пусть

$$s(t) = A_m \cos \omega t, \quad (5.61)$$

где A_m и ω — известные амплитуда и частота. В данном случае из (5.47) следует, что

$$\tau(t) = \frac{A_m^2}{N_0} \left(t + \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right). \quad (5.62)$$

На практике обычно выполняется условие $\omega > 1$. При этом из (5.62) видно, что средняя длительность последовательного обнаружения гармонического сигнала на фоне белого шума в первом приближении может быть оценена по формулам (5.59) и (5.62). Чтобы получить более точный результат, обозначим $\rho = A_m^2/N_0$ и заметим, что из (5.62) следует приближенное равенство

$$t \approx \frac{1}{\rho} \left(\tau - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right). \quad (5.63)$$

Для определения средней длительности процедуры последовательного обнаружения согласно формуле (5.56) необходимо предварительно найти преобразование Лапласа от плотности вероятности

$$p_{b,a}^*(t, 0) = \int_0^\infty p_{b,a}(t, 0) e^{-st} dt \approx$$

$$\approx \int_0^\infty e^{-st/\rho} g_{b,a}(\tau, 0) \exp\left(\frac{s \sin 2\omega\tau}{\rho 2\omega}\right) d\tau. \quad (5.64)$$

Имея в виду последующий предельный переход при $s \rightarrow 0$, разложим экспоненту в ряд Тейлора и сохраним члены только первого порядка малости

$$\exp\left(\frac{s \sin 2\omega\tau}{\rho 2\omega}\right) = 1 + \frac{s \sin 2\omega\tau}{\rho 2\omega} + o(s^2).$$

Подставив это разложение в (5.63), из (5.56) получим

$$\begin{aligned} T_1(a, 0, b) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[-\frac{dp_{b,a}^*(s, 0)}{ds} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[-\frac{d}{ds} g_{b,a}^* \left(\frac{s}{\rho}, 0 \right) \right] + \\ &+ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{4i\omega\rho} \left[g_{b,a}^* \left(\frac{s + 2i\omega}{\rho}, 0 \right) - g_{b,a}^* \left(\frac{s - 2i\omega}{\rho}, 0 \right) \right] = \\ &= T_1^{(1)}(b, 0, a) + T_1^{(2)}(b, 0, a). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Здесь при записи второго предела было использовано следующее свойство преобразования Лапласа:

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) \sin \omega t dt = \frac{1}{2i} [f^*(s - i\omega) + f^*(s + i\omega)].$$

Для первого предела в (5.64) аналогично (5.59) и (5.60) получим

$$T_1^{(1)}(b, 0, a) = -\frac{2}{\rho} [aQ_0 + b(1 - Q_0)] \quad (5.66)$$

при отсутствии сигнала (H_0), что совпадает с (5.31) при $\mu_0 = -\rho/2$. При наличии сигнала (H_1)

$$T_1^{(1)}(b, 0, a) = \frac{2}{\rho} [aQ_d + b(1 - Q_d)], \quad (5.67)$$

что совпадает с (5.32) при $\mu_1 = \rho/2$.

Для второго предела при справедливости гипотезы H_0 и $2\omega \gg \gg 1/4$ получим

$$\begin{aligned} T_1^{(2)}(b, 0, a) &= \frac{1}{4i\omega\rho} \left\{ e^{-a/2} \left[\frac{\text{sh}[b\sqrt{2i\omega}]}{\text{sh}(b-a)\sqrt{2i\omega}} - \frac{\text{sh}[b\sqrt{-2i\omega}]}{\text{sh}(b-a)\sqrt{-2i\omega}} \right] + \right. \\ &+ \left. e^{-b/2} \left[\frac{\text{sh}[a\sqrt{2i\omega}]}{\text{sh}(a-b)\sqrt{2i\omega}} - \frac{\text{sh}[a\sqrt{-2i\omega}]}{\text{sh}(a-b)\sqrt{-2i\omega}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

При больших значениях ω это выражение несколько упрощается:

$$T_1^{(2)}(b, 0, a) = \frac{1}{2\omega\rho} \left\{ e^{-a/2} [e^{-(a-2b)\sqrt{\omega}} \sin(a-2b)\sqrt{\omega} - e^{-a\sqrt{\omega}} \sin a\sqrt{\omega}] + \right.$$

$$+ e^{-b/2} [e^{-(2a-b)\sqrt{\omega}} \sin(2a-b)\sqrt{\omega} + e^{b\sqrt{\omega}} \sin b\sqrt{\omega}] \}. \quad (5.69)$$

Из формулы (5.69) следует, что для больших значений ω влияние вибрационного сомножителя $\cos \omega t$ в (5.61) на среднюю длительность процедуры последовательного анализа очень мало.

При наличии сигнала (H_1) для $T^{(2)}$ получается выражение типа (5.69), в котором $\exp(-a/2)$ и $\exp(-b/2)$ заменяются на $\exp(a/2)$ и $\exp(b/2)$ соответственно.

Пример 5.6 [29]. Некогерентное обнаружение синусоидального сигнала в шуме.

Пусть исследуемая выборка состоит из отсчетов огибающей аддитивной смеси узкополосного шума и синусоидального сигнала с амплитудой A и с частотой, равной средней частоте ЭС шума. В предположении, что шум имеет гауссовское распределение с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 , распределение огибающей подчиняется закону Райса [154] (см. (4.17))

$$W(y, A) = \begin{cases} (y/\sigma^2) e^{-(y^2+A^2)/2\sigma^2} I_0(yA/\sigma^2) & \text{при } y \geq 0; \\ 0 & \text{при } y < 0, \end{cases}$$

где $I_0(u)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Введем новые обозначения

$$x = y/\sqrt{2\sigma^2}; \quad d = A/\sqrt{2\sigma^2}, \quad (5.70)$$

где d^2 — ОСШ (отношение мощностей сигнала и шума).

В результате ПРВ величины x принимает вид

$$W(x, d) = \begin{cases} 2xe^{-d^2-x^2} I_0(2dx) & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (5.71)$$

Считается, что наблюдается СВ X и наблюдения независимы друг от друга.

В распределении $W(x)$ неизвестен параметр d : при $d = 0$ сигнал отсутствует (справедлива гипотеза H_0), при $d = d_1$ справедлива гипотеза H_1 (сигнал присутствует).

Введем величину

$$z = \ln l(x), \quad l(x) = W(x; d_1)/W(x; 0). \quad (5.72)$$

Тогда по (5.71) находим

$$z = -d_1^2 + \ln I_0(2d_1x). \quad (5.73)$$

При слабых сигналах правую часть (5.73) можно разложить в степенной ряд [29]

$$z = -d_1^2 + d_1^2 x^2 - \frac{1}{4} d_1^4 x^4 + O(d_1^6 x^6). \quad (5.74)$$

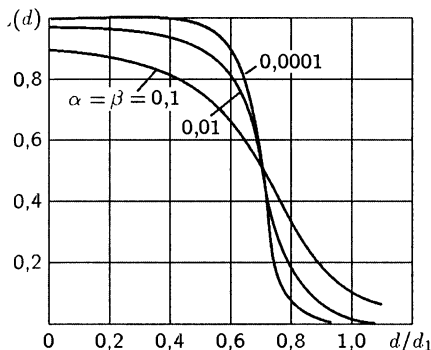


Рис. 5.4

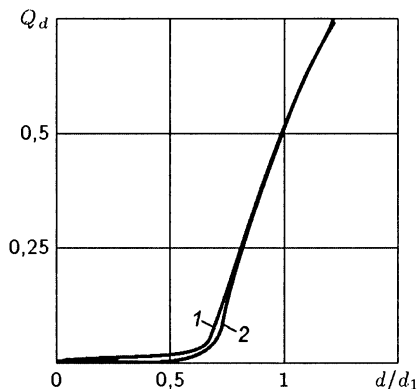


Рис. 5.5

Среднее значение имеет вид [29] [см. (5.16)]

$$\overline{z(d)} = \int_0^\infty z(d_1, x) W(x, d) dx = d^2 d_1^2 - \frac{1}{2} d_1^4 + O(d_1^6). \quad (5.75)$$

По (5.15) получим уравнение для определения величины h :

$$\int_0^\infty [e^{-d_1^2} I_0(2d_1 x)]^h 2x e^{-x^2} I_0(2dx) dx = 1,$$

или

$$2 \int_0^\infty x I_0(2dx) [I_0(2d_1 x)]^h e^{-x^2} dx = e^{d^2 + h d_1^2}. \quad (5.76)$$

При произвольных значениях величин d и d_1 это уравнение допускает лишь численное решение.

Для слабых сигналов при малых d и d_1 ($d \ll 1$, $d_1 \ll 1$) можно получить приближенное соотношение [29]

$$h = 1 - 2(d/d_1)^2. \quad (5.77)$$

Подставляя это значение h в (5.13), получим оперативную характеристическую функцию $L(d)$, изображенную на рис. 5.4 [29].

Заметим, что согласно (5.12) $L(0) = 1 - \alpha$; и при $d/d_1 = 1$, когда $d = d_1$,

$$L(d_1) = 1 - \gamma = \beta.$$

В своей работе [27] А. Вальд показал, что вероятность обнаружения $Q_d(d)$ как функция параметра определяется соотношением [27, 75]

$$Q_d(d) = \frac{1 - e^{bh}}{e^{ah} - e^{bh}} = \frac{1 - B^h}{A^h - B^h}. \quad (5.78)$$

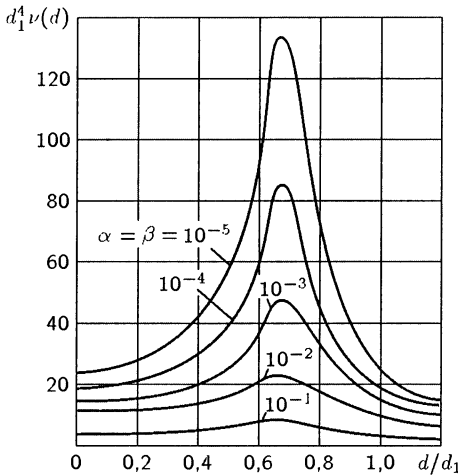


Рис. 5.6

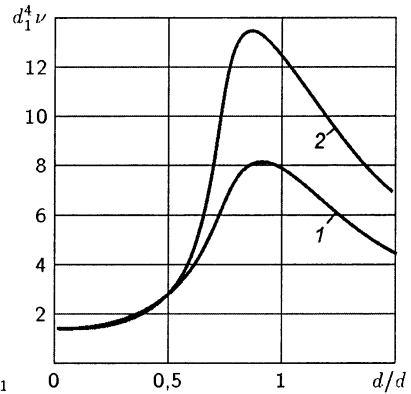


Рис. 5.7

Зависимость $Q_d(d/d_1)$ изображена на рис. 5.5 при $\alpha = 10^{-4}$. Если $d/d_1 = 1$, то по (5.77) $h = -1$, и, следовательно, $Q_d(d) = Q_d(d_1) = 0,5$ (см. рис. 5.5), так как $B \approx 0,5$; $A^{-1} = 2 \cdot 10^{-4}$ [см. (5.6), (5.7)].

Найдем среднюю длительность процедуры $E(N | H_1, d) = \nu(d)$. Сначала по (5.75) находим

$$\overline{z(d)} = E(z | H_1, d) = -d_1^4 \left[1 - (d/d_1)^2 \right] / 2 = -hd_1^4/2.$$

Следовательно, $\mu_1 = E(z | H_1, d) = -d_1^4 h/2$.

Среднее число шагов имеет вид [75]

$$E(N | H_1, d) = \frac{aQ_d(d) + b[1 - Q_d(d)]}{\mu_1}. \quad (5.79)$$

Отсюда находим

$$d_1^4 \nu(d) = d_1^4 E(N | H_1, d) = -2 \frac{aQ_d(d) + b[1 - Q_d(d)]}{h}, \quad (5.80)$$

что эквивалентно (5.14), так как $1 - Q_d(d) = L(d)$.

Зависимость $d_1^4 \nu(d) = f(d_1/d)$ изображена на рис. 5.6 [29]. На рис. 5.7 изображена зависимость $d_1^4 \nu(d)$ при $\alpha = 10^{-4}$; $Q_d(d) = \gamma = 0,5$ (кривая 1). При $d/d_1 = 1$, когда $Q_d(d) = 0,5$ (см. рис. 5.7),

$$d_1^4 \nu(d) = d_1^4 \nu(d_1) = a + b.$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= \ln A = \ln(\gamma/\alpha) = \ln(0,5 \cdot 10^{-4}) = 8,509; \\ b &= \ln B = \ln(\beta/\alpha) = \ln 0,5 = -0,691. \end{aligned} \quad (5.81)$$

Тогда $a + b = 7,818$, $d_1^4 \nu(d) = d_1^4 \nu(d_1) = 7,818$ (рис. 5.7, кривая 1).

Пусть $h = 0$, тогда $d/d_1 = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$. При этом можно использовать формулы [76]

$$L(d^*) = \frac{a}{a-b}; \quad Q_d(d^*) = -\frac{b}{a-b} = \frac{1}{1-a/b}. \quad (5.82)$$

Поэтому при $a = 8,509$; $b = -0,691$ получим $Q_d(d^*) = 0,075$ (см. рис. 5.7).

В общем случае при $h = 0$ справедливо равенство

$$E(N | H_1, d) = -\frac{ab}{D(z)}. \quad (5.83)$$

Пример 5.7. Когерентное обнаружение известного сигнала в условиях примера 5.1.

Решение. В данном случае при нормировке $x = y/\sigma$; $d^2 = A^2/\sigma^2$ получим ПРВ

$$W(x, d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-d)^2/2}. \quad (5.84)$$

По (5.35) находим (при $\theta/\sigma = d_1$, $x_k/\sigma = x$)

$$z = \ln l(x) = d_1(x - d_1/2) \quad (5.85)$$

Тогда

$$\mu_1 = E(z | H_1, d) = d_1 \left[E(x) - \frac{d_1}{2} \right] = d_1 \left(d - \frac{d_1}{2} \right) = -\frac{d_1^2}{2} \left(1 - 2\frac{d_1}{d} \right). \quad (5.86)$$

Уравнение для определения параметра h (5.15) имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{d_1 x - d_1^2/2} \right]^h e^{-(x-d)^2/2} dx = 1,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{d_1 h x} W(x, d) dx = e^{d_1^2 h/2}.$$

Отсюда находится [29, 74]

$$h = 1 - 2d/d_1. \quad (5.87)$$

Следовательно, по (5.84)

$$\mu_1 = -d_1^2 h/2. \quad (5.88)$$

Поэтому средняя длительность процедуры

$$\nu(d) = E(N | H_1, d) = -2\{aQ_d(d) + b[1 - Q_d(d)]\}/hd_1^2, \quad (5.89)$$

где $Q_d(d)$ вычисляется по (5.78)

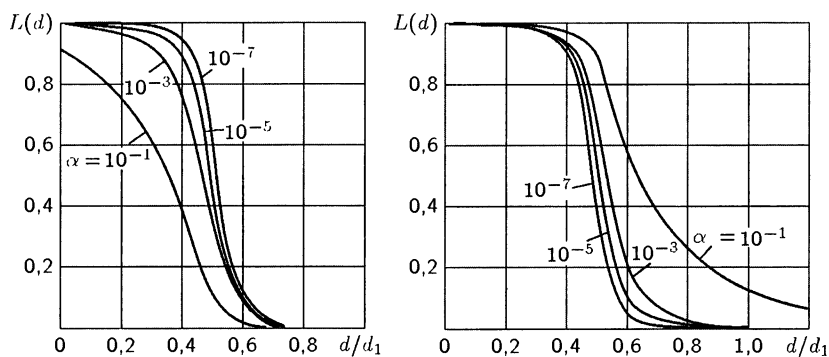


Рис. 5.8

График оперативной характеристической функции изображена на рис. 5.8. Характеристики обнаружения $Q_d(d) = f_1(d/d_1)$ (5.78) и зависимость средней длительности процедуры $d_1^2 \nu(d) = f_2(d/d_1)$ (5.89) изображены на рис. 5.9, а и б соответственно. При этом приняты следующие параметры: допустимая ВЛТ $Q_0 = \alpha = 10^{-4}$ и требуемая (стандартная) вероятность обнаружения при ожидаемой интенсивности d_1 равна $\gamma = Q_d(d_1) = 0,5$ (рис. 5.8, б, кривая 1).

В частности, при $d/d_1 = 1$, когда $h = -1$, по (5.78) находим

$$Q_d(d) = \frac{1 - B^h}{A^h - B^h} \approx \frac{1 - 2}{-2} = 0,5 \quad (\text{см. рис. 5.9, а});$$

$$d_1^2 \nu(d) = a + b = 8,509 - 0,691 = 7,818 \quad (\text{см. рис. 5.9, б, кривая 1}).$$

В критической точке, когда $h = 0$ ($d/d_1 = 0,5$), $\mu_1 = 0$, по (5.82) находим

$$Q_d(d^*) = 0,691/9,2 = 0,075 \quad (\text{см. рис. 5.9, а}).$$

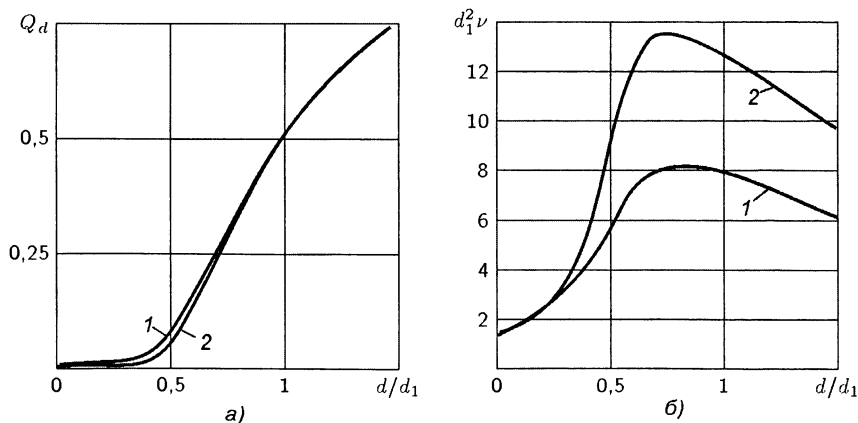


Рис. 5.9

При $h = 0$ справедливо соотношение (5.83), причем дисперсия $D(z)$ может быть найдена по (5.85):

$$D(z) = d_1^2 D(x) = d_1^2,$$

так как согласно (5.84) $D(x) = 1$. Тогда по (5.83) получим

$$d_1^2 \nu(d^*) = d_1^2 E(N | H_1, d^*) = -ab = 5.88$$

(см. рис. 5.9,б, кривая 1).

Пример 5.8 [75]. В условиях примера 5.7 положим $Q_0 = 10^{-4}$; $Q_d(d_1) = 0,99$.

Найти зависимость $Q_d(d) = f_1(d/d_1)$ и зависимость средней длительности $d_1^2 \nu(d)$.

Решение.

$$b \approx \ln 0,01 = -2 \ln 10 = -2 \cdot 2,3 = -4,6;$$

$$a = \ln 0,99 \cdot 10^4 = \ln 9,9 + 3 \ln 10 = 2,29 + 6,9 = 9,19.$$

Вероятность обнаружения находится по (5.78) при $B \approx 0,01$, $A = 9,9 \cdot 10^3$. Например, при $d/d_1 = 1$ $h = -1$ получим

$$Q_d(d) = f_1(1) = \frac{1 - B^{-1}}{A^{-1} - B^{-1}} \approx \frac{1 - 100}{100} = 0,99.$$

При $h = 0$ ($d/d_1 = 0,5$) по (5.82) находим

$$Q_d(d^*) = f_1(0,5) = -\frac{b}{a - b} = \frac{4,6}{13,79} \approx 0,33.$$

Зависимость $Q_d(d) = f_1(d/d_1)$ при $d_1 = 1$ изображена на рис. 5.10,а вместе с зависимостью $Q_d(d) = Q[Q^{-1}(Q_0) - \sqrt{N}d]$, при $M = M_{\text{ФОН}} = 36$ [75] (рис. 5.10,а, кривая 1). Эта зависимость ха-

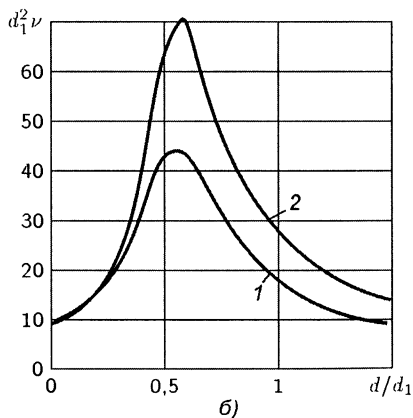
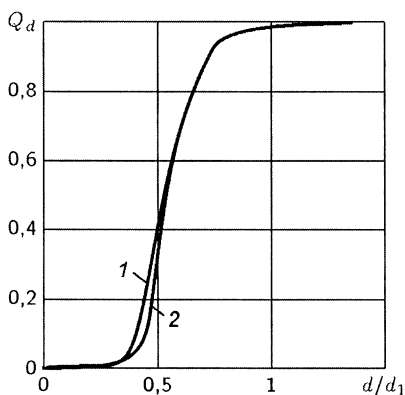


Рис. 5.10

характеризует вероятность обнаружения полностью известного постоянного сигнала (см. пример 5.1).

Найдем характерные точки этой зависимости при $Q_0 = 10^{-4}$, когда $Q^{-1}(Q_0) = Q^{-1}(10^{-4}) = 3,719$. При $d = 0,5$ получим

$$Q_d(0,5) = Q(3,719 - 3) = Q(0,719) = 1 - \Phi(0,719) = 0,236;$$

(рис. 5.10,а, кривая 2). При $d = 1$

$$Q_d(1) = Q(3,719 - 6) = Q(-2,28) = \Phi(2,28) = 0,9886 \approx 0,99.$$

Зависимость средней длительности процедуры $d_1^2 \nu(d) = f_2(d/d_1)$ рассчитывается по (5.89) и изображена на рис. 5.10,б. Найдем характерные точки этой зависимости. При $d/d_1 = 1$ $h = -1$, тогда (рис. 5.10,б, кривая 1)

$$d_1^2 \nu = 2(9,19 \cdot 0,99 + 4,6 \cdot 0,01) = 18,28 < 36 = M_{\text{ФОП}}.$$

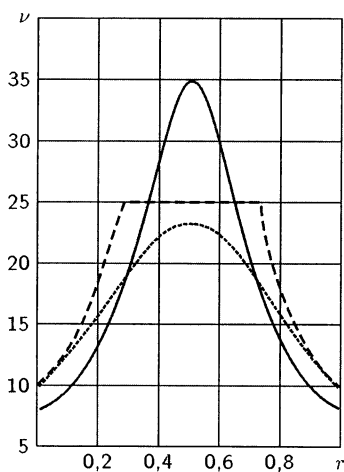


Рис. 5.11

При $d/d_1 = 0,5$ $h = 0$ и по (5.83) получим (рис. 5.10,б, кривая 1 при $D(a) = d_1^2$)

$$\begin{aligned} d_1^2 \bar{\nu}(d^*) &= -ab = \\ &= 9,19 \cdot 4,6 = 42,2 > 36 = M_{\text{ФОП}}. \end{aligned}$$

Как было отмечено, для того чтобы избежать чрезмерно большой длительности испытаний ПОВ, вводится процедура *усечения*. Точка усечения $n = n_{\text{max}}$ выбирается так, чтобы незначительно ухудшить характеристики ПОВ [165]. Если число испытаний n^* достигает величины n_{max} , то переходят к испытанию с одним порогом.

При $n = n^*$ решающим правилом является [165]

$$\sum_{i=1}^{n^*} z_i \begin{cases} \geq t^* & \text{принимается } H_1, \\ < t^* & \text{принимается } H_0, \end{cases}$$

где t^* — фиксированный порог.

На рис. 5.11 изображены зависимости предельных средних значений $\nu(r)$ при $\alpha = 10^{-4}$; $\beta = 5 \cdot 10^{-4}$ [165] (сплошная кривая — ПОВ, штриховая — усеченный ПОВ), горизонтальный отрезок соответствует ФОП-обнаружителю. Пунктирная кривая соответствует приближенному значению $\nu(r)$ при усеченном испытании.

Величина $r = \frac{(\theta - \theta_0)}{\theta_1 - \theta_0}$ при решающем правиле

$$H_0: X_i \approx W(x - \theta), \quad \theta = \theta_0,$$

$$H_1: X_i \approx W(x - \theta), \quad \theta = \theta_1 > \theta_0.$$

Задачи

5.1. Сигналы $s_k(t)$ известны полностью, кроме общей амплитуды A . Они приходят в известное время в аддитивной смеси с белым гауссовским шумом с односторонней спектральной плотностью N , и в k -м интервале наблюдения продолжительности $T = T_k$ на вход приемника принимаются гипотезы

$$H_0: v_k(t) = n_k(t);$$

$$H_1: v_k(t) = s_k(t) + n_k(t).$$

Взять стандартный сигнал энергии \mathcal{E} и отношения сигнал/шум $d_1 = \sqrt{2\mathcal{E}/N}$, который должен быть обнаружен с вероятностью $Q_1(d_1)$ и последовательным анализом, описанным в данной главе.

а) Выразить ЛОП $z_j = \ln l_j$ для j -го интервала в условиях входа $v_j(t)$ в течение этого интервала.

б) Показать, что z_j — гауссовская СВ, и получить ее среднее значение и дисперсию, когда присутствует сигнал энергии \mathcal{E} .

в) Пусть $d = \sqrt{2\mathcal{E}/N}$. Найти производящую функцию моментов $h(z; d)$ статистики и доказать (5.87).

г) Записать формулы для вероятности $Q_d(d_1)$ обнаружения и среднего числа $\nu(d)$ этапов последовательного испытания.

д) Построить зависимости $\nu(d)$ и $Q_d(d_1)$ как функцию отношения сигнал/шум d для $0 < d < d_1 = 1$, с $Q_d(d_1)$, $\mathcal{E} = 0,9$; $Q_0 = 10^{-6}$. Использовать приближенные данные данной главы.

5.2. Предложить последовательный анализ для решения задачи, является ли дисперсия гауссовского шума на входе N_0 или N_1 , $N_1 > N_0$. Вторая дисперсия N_1 может представлять сумму дисперсии N_0 шума и дисперсии $N_s = N_1 - N_0$ независимого подобного шуму сигнала. Такой сигнал является выходом передатчика, создающего помехи. Наблюдаются отсчеты x_1, x_2, \dots с нулевыми средними значениями.

а) Найти ЛОП $z_j = \ln[W_1(x_j)/W_0(x_j)]$, где $W_0(x_j)$, $W_1(x_j)$ — гауссовские ПРВ при нулевых средних значениях и дисперсиях N_0 , N_1 соответственно.

б) Показать, что если истинная дисперсия данных N , $N > N_0$, то производящая функция моментов статистики z имеет вид

$$h(z; N) = \left(\frac{N_0}{N_1} \right)^{-z/2} \left[1 + \frac{N_1 - N_0}{N_0 N_1} z \right]^{-1/2}.$$

в) Вычислить среднее значение и дисперсию статистики z , если дисперсия истинного шума равна N .

г) Показать, как определять вероятность обнаружения и среднее число ν шагов испытания как функцию N . Использовать приближенные формулы данной главы.

5.3. Предложить процедуру последовательного анализа для обнаружения нулевой и единичной посылок, прошедших канал с релейским замиранием (федингом). Предположить, что канал — нешумящий с обратной связью, когда передатчику дается

команда о передаче следующего символа. Считать амплитуду сигнала и фазу независимыми СВ, причем амплитуда подчиняется закону Релея

$$W(d) = (d/s^2) \exp(-d^2/2s^2),$$

где $s = s_0$.

Найти ЛОП и вычислить производящую функцию моментов, среднее значение и дисперсию, когда истинное значение параметра распределения Релея равно s [78].

5.4. В приемнике оптических сигналов свет падает на фотодиод, и в каждый из последовательных интервалов продолжительности $T = T_j$, $j = 1, 2, \dots$, приемник считает номера n_1, n_2, \dots . Приемник должен выбрать между гипотезой H_0 , что только фон присутствует на его входе, и гипотезой H_1 , когда присутствует оптический сигнал. Вероятности наличия n_j электронов в j -м интервале при каждой гипотезе подчиняются закону Пуассона

$$P\{n_j = k | H_i\} = \frac{\lambda_i^k}{k!} \exp(-\lambda_i), \quad i = 0, 1; \lambda_1 > \lambda_0.$$

Числа n_j в последовательных интервалах статистически независимы.

а) Показать, как использовать последовательный обнаружитель оптического сигнала на основе процедуры Вальда, взяв в качестве стандартного среднего значения величину λ_{1s} для числа n_j при гипотезе H_1 . Здесь данные характеризуются не ПРВ, а распределением вероятностей.

б) Используя аппроксимации Вальда, определить решающие пороги A и B .

в) Вычислить производящую функцию моментов статистики z , которая характеризуется как функция испытаний, и показать, как определяется вероятность обнаружения и среднее число шагов, когда среднее число электронов при гипотезе H_1 не равно λ_{1s} , а равно $\lambda_1 > \lambda_0$.

г) Показать, как сравнить характеристики испытания ПОВ и ФОП-обнаружителя, когда различие гипотез H_0 и H_1 происходит на основе общего числа электронов $n_1 + n_2 + \dots + n_M$, подсчитанных за M последовательных интервалов.

5.5 [20]. Получить оптимальный последовательный алгоритм обнаружения сигнала $s(t)$ на фоне гауссовского шума с дисперсией σ^2 , обеспечивающий заданные вероятности ложной тревоги Q_0 и обнаружения Q_d . Отсчеты считать независимыми.

Часть II

Обнаружение сигналов в условиях неопределенности

6 Обнаружение сигналов при неизвестных параметрах

Пример 6.1. Рассмотреть проблему обнаружения детерминированного сигнала, известного за исключением его амплитуды A , при наличии ГБШ с известной дисперсией, когда гипотезы имеют вид

$$\begin{aligned} H_0 : \quad x_i &= w_i; \\ H_1 : \quad x_i &= As_i + w_i, \end{aligned} \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (6.1)$$

где s_i — известная функция, A — неизвестная величина, w_i — ГБШ с известной дисперсией σ^2 .

Найти характеристики обнаружения.

Решение. Оптимальный обнаружитель должен определить ОП

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{A}) = P_1(\mathbf{X}_n | \hat{A})/P_0(\mathbf{X}_n) = P(\mathbf{X}_n, H_1)/P(\mathbf{X}_n, H_0) \quad (6.2)$$

и сравнить ОП с порогом

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{A}) > \gamma,$$

где \hat{A} — оценка амплитуды, получаемая методом максимального правдоподобия из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial A} \ln P_1(\mathbf{X}_n | A) = 0.$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_1(\mathbf{X}_n | A) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{X}_n - A\mathbf{S}_n)^T (\mathbf{X}_n - A\mathbf{S}_n) \right]; \\ P_0(\mathbf{X}_n) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n \right]; \\ \mathbf{X}_n &= [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]^T; \quad \mathbf{S}_n = [s_0, s_1, \dots, s_{n-1}]^T. \end{aligned} \quad (6.3)$$

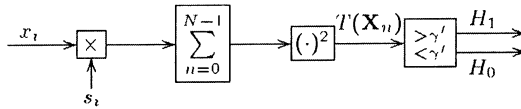


Рис. 6.1

Решая уравнение правдоподобия, находим оценку амплитуды

$$\hat{A}(\mathbf{X}_n) = \frac{\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n}{\mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n} = \frac{1}{\mathfrak{D}_1} \mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n = \frac{1}{\mathfrak{D}_1} \sum_{i=0}^{n-1} x_i s_i, \quad (6.4)$$

где

$$\mathfrak{D}_1 = \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} s_i^2. \quad (6.5)$$

Логарифмируя неравенство $\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{A}) > \gamma$, получим

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=0}^n (-2\hat{A}s_i x_i + \hat{A}^2 s_i^2) > \ln \gamma.$$

Используя выражение для оценки \hat{A} , находим

$$-\frac{1}{2\sigma^2} \left(-2\hat{A} \sum_{i=0}^n s_i^2 + \hat{A}^2 \sum_{i=0}^n s_i^2 \right) > \ln \gamma.$$

Таким образом, принимается гипотеза H_1 , если

$$\hat{A}^2 > \frac{2\sigma^2 \ln \gamma}{\mathfrak{D}_1}, \quad (6.6)$$

или эквивалентно,

$$T(\mathbf{X}_n) = \left(\sum_{i=0}^n x_i s_i \right)^2 > 2\sigma^2 \ln \gamma \mathfrak{D}_1 = \gamma'. \quad (6.7)$$

Отсюда видно, что принимается гипотеза H_1 , если

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} x_i s_i \right| > \sqrt{2\sigma^2 \ln \gamma \mathfrak{D}_1} = \sqrt{\gamma'}. \quad (6.8)$$

Схема обнаружителя изображена на рис. 6.1.

Прежде чем вычислять характеристики обнаружителя, рассмотрим свойства статистики

$$v(\mathbf{X}_n) = v = \mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i s_i. \quad (6.9)$$

Очевидно, величина v распределена по нормальному закону, причем

$$E(v | H_0) = E \left(\sum_{i=0}^{n-1} w_i s_i \right) = 0;$$

$$E(v | H_1) = E \left(\sum_{i=0}^{n-1} (A s_i + w_i) s_i \right) = A \mathfrak{E}_1.$$

Дисперсия СВ v имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= D(v | H_0) = D \left(\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i s_i \right) = \sum_{i=0}^{n-1} D(W_i) s_i^2 = \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{n-1} s_i^2 = \sigma^2 \mathfrak{E}_1 = D(v | H_1). \end{aligned}$$

Таким образом, находим

$$v(\mathbf{X}_n) = v = \sum_{i=0}^{n-1} x_i s_i \sim \begin{cases} N(0, \sigma^2 \mathfrak{E}_1) & \text{при } H_0; \\ N(A \mathfrak{E}_1, \sigma^2 \mathfrak{E}_1) & \text{при } H_1. \end{cases} \quad (6.10)$$

Отсюда получим вероятность ложной тревоги (ВЛТ)

$$\begin{aligned} Q_0 &= P\{|v(\mathbf{X}_n)| > \sqrt{\gamma'} | H_0\} = \\ &= P\{v(\mathbf{X}_n) > \sqrt{\gamma'} | H_0\} + P\{v(\mathbf{X}_n) < -\sqrt{\gamma'} | H_0\}. \end{aligned}$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\begin{aligned} P\{v(\mathbf{X}_n) > \sqrt{\gamma'} | H_0\} &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\gamma'}}^{\infty} e^{-v^2/2\sigma_v^2} dv = \\ &= \int_{\sqrt{\gamma'}/\sigma_v}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = Q \left(\frac{\sqrt{\gamma'}}{\sigma_v} \right) = Q(\alpha); \\ \alpha &= \frac{\sqrt{\gamma'}}{\sigma_v} = \frac{\sqrt{\gamma'}}{\sigma \sqrt{\mathfrak{E}_1}}; \quad Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \operatorname{erfc} x. \end{aligned}$$

Аналогично находится второе слагаемое:

$$P\{v(\mathbf{X}_n) < -\sqrt{\gamma'} | H_0\} = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\gamma'}} e^{-v^2/2\sigma_v^2} dv = Q \left(\frac{\sqrt{\gamma'}}{\sigma_v} \right).$$

Тогда ВЛТ имеет вид

$$Q_0 = 2Q(\varepsilon). \quad (6.11)$$

Отсюда $\varepsilon = Q^{-1}(Q_0/2)$.

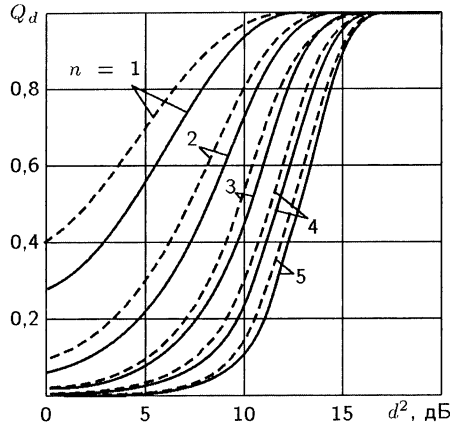


Рис. 6.2

Найдем вероятность обнаружения

$$Q_d = P\{|v| > \sqrt{\gamma'} \mid H_1\} = P\{v > \sqrt{\gamma'} \mid H_1\} + P\{v < -\sqrt{\gamma'} \mid H_1\}.$$

Преобразуем первое слагаемое:

$$\begin{aligned} P\{v > \sqrt{\gamma'} \mid H_1\} &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{\gamma'}}^{\infty} \exp\left[-\frac{(v - A\mathfrak{E}_1)^2}{2\sigma_v^2}\right] dv = \\ &= Q\left(\frac{\sqrt{\gamma'} - A\mathfrak{E}_1}{\sigma_v}\right) = Q(\varepsilon - d), \end{aligned}$$

где $d^2 = A^2 \mathfrak{E}_1 / \sigma^2 = \mathfrak{E} / \sigma^2$ — ОСШ.

Аналогично находим второе слагаемое:

$$P\{v < -\sqrt{\gamma'} \mid H_1\} = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\gamma'}} \exp\left[-\frac{(v - A\mathfrak{E}_1)^2}{2\sigma_v^2}\right] dv = Q(\varepsilon + d).$$

Таким образом, вероятность обнаружения

$$Q_d = Q(\varepsilon - d) + Q(\varepsilon + d). \quad (6.12)$$

Характеристики обнаружения $Q_d(d^2)$ при $Q_0 = \text{const}$ и $Q_0 = 10^{-n}$, $n = \overline{1, 5}$, изображены на рис. 6.2, где по оси абсцисс отложена величина $d_{\text{дБ}} = 10 \lg d^2$. Здесь же приводятся штриховыми линиями характеристики обнаружения при полностью известном сигнале $Q_0 = Q(x)$; $Q_d = Q(x - d)$. Как видно из рис. 6.2, наблюдается ухудшение обнаружения при неизвестной амплитуде по сравнению с обнаружением полностью известного сигнала.

Пример 6.2 [36]. Обнаружить сигнал заданного вида $s(t)$, аддитивно смешанного с гауссовским некоррелированным шумом, обладающим неизвестной интенсивностью.

Пусть наблюдается выборка $\mathbf{X}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, которая может состоять либо из шумовых компонент, либо из компонент, образованных суммой сигнала и шума. Тогда

$$\mathbf{X}_n = \lambda \mathbf{S}_n + \mathbf{N}_n, \quad (6.13)$$

где $\lambda = 1$ с вероятностью π_1 , $\lambda = 0$ с вероятностью π_0 ($\pi_1 + \pi_0 = 1$); $\mathbf{S}_n = \{s_i\}$; $s_i = s(t_i)$; $\mathbf{N}_n = \{n_i\}$, $n_i = n(t_i)$; $\mathbf{X}_n = \{x_i\}$; $x_i = x(t_i)$. Корреляционная матрица шума $\mathbf{R}_n = \|\sigma^2 \delta_{ij}\|$, δ_{ij} — символ Кронекера, а дисперсия σ^2 неизвестна и может считаться распределенной равномерно в некотором интервале $\Delta(\sigma^2)$.

Решение. Оптимальный обнаружитель должен сформировать отношение правдоподобия

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2) = \frac{W_1(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}_1^2)}{W_0(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}_0^2)}, \quad (6.14)$$

где $\hat{\sigma}_1^2$ и $\hat{\sigma}_2^2$ — оценки максимального правдоподобия дисперсии шума, полученные в предположениях о наличии и отсутствии сигнала соответственно. Очевидно, что ПРВ в числителе и знаменателе (6.14) определяются выражениями

$$\begin{aligned} W_1(\mathbf{X}_n | \sigma^2) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{X}_n - \mathbf{S}_n)^T (\mathbf{X}_n - \mathbf{S}_n) \right]; \\ W_0(\mathbf{X}_n | \sigma^2) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n \right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Таким образом, отношение правдоподобия (ОП) имеет вид

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2) = \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(\mathbf{X}_n - \mathbf{S}_n)^T (\mathbf{X}_n - \mathbf{S}_n)}{\hat{\sigma}_1^2} - \frac{\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n}{\hat{\sigma}_0^2} \right] \right\}. \quad (6.16)$$

Оценки $\hat{\sigma}_1^2$ и $\hat{\sigma}_2^2$ находятся из уравнений

$$\frac{\partial \ln W_i(\mathbf{X}_n | \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0, \quad i = 0, 1. \quad (6.17)$$

Дифференцируя, находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln W_1(\mathbf{X}_n | \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} B_1; \quad B_1 = (\mathbf{X}_n - \mathbf{S}_n)^T (\mathbf{X}_n - \mathbf{S}_n); \\ \frac{\partial \ln W_0(\mathbf{X}_n | \sigma^2)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} B_0; \quad B_0 = \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n. \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{B_1}{n}; \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{B_0}{n}. \quad (6.18)$$

Поэтому ОП принимает вид

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_0^2) = \left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right)^{n/2} = \left(\frac{B_2}{B_1} \right)^{n/2} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - s_i)^2} \right]^{n/2}. \quad (6.19)$$

Отношение правдоподобия должно сравниваться с обобщенным порогом [36]

$$C_{0,1} = \varkappa \frac{a_0(\mathbf{X}_n)}{a_1(\mathbf{X}_n)}, \quad (6.20)$$

где $\varkappa = \frac{g_{21} - g_{22}}{g_{12} - g_{11}} \frac{\pi_0}{\pi_1}$; $\{g_{ij}\}_{i,j=1}^2$ — коэффициенты потерь.

Для того чтобы вычислить $\{a_i(X_n)\}_{i=0}^1$, необходимо найти величину

$$D_{0,1} = -\frac{\partial^2 \ln W_i(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}_i^2)}{\partial (\sigma^2)^2}, \quad i = 0, 1. \quad (6.21)$$

Вычислим вторые производные с учетом (6.18)

$$\frac{\partial^2 W_1(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}^2)}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{n}{2(\hat{\sigma}^2)^2} - \frac{B_1}{(\hat{\sigma}^2)^3} = \frac{n^3}{2B_1^2} - \frac{B_1 n^3}{B_1^3} = \frac{-n^3}{2B_1}; \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial^2 W_0(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}^2)}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{-n^3}{2B_0}. \quad (6.23)$$

Коэффициенты $a_i(\mathbf{X}_n)$, $i = 0, 1$ имеют вид [36]

$$a_1(X_n) = \frac{1}{\Delta(\sigma^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{n^3/2}} B_1; \quad a_0(X_n) = \frac{1}{\Delta(\sigma^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{n^3/2}} B_0. \quad (6.24)$$

Порог $C_{0,1}$ (6.20) с учетом (6.24) принимает вид

$$C_{0,1} = \varkappa \frac{B_0}{B_1} = \varkappa \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2}. \quad (6.25)$$

Поэтому принимается решение о наличии сигнала, если

$$\left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right)^{n/2} \geq C_{0,1} = \varkappa \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2},$$

что эквивалентно неравенству

$$\hat{\sigma}_0^2 / \hat{\sigma}_1^2 \geq \varkappa^{2/(n-2)} = C, \quad (6.26)$$

или

$$B_0 / B_1 \geq C. \quad (6.27)$$

Таким образом, оптимальный обнаружитель должен вычислять оценки неизвестной дисперсии шума в предположениях, соответствующих той и другой конкурирующей гипотезе, и сравнивать с порогом отношение этих оценок.

Введем обозначение

$$\Psi = \hat{\sigma}_0^2 / \hat{\sigma}_1^2 = B_2 / B_1. \quad (6.28)$$

Для нахождения характеристики обнаружения необходимо вычислять вероятность

$$P(\Psi \geq C) = P[(B_2 - CB_1) \geq 0] = \int_0^\infty W(z) dz, \quad (6.29)$$

где $W(z)$ — ПРВ СВ

$$\begin{aligned} z &= B_2 - CB_1 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - C \sum_{i=1}^n (x_i - s_i)^2 = \\ &= (1 - C) \sum_{i=1}^n x_i^2 - C \sum_{i=1}^n (s_i^2 - 2s_i x_i) = (1 - C) \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2C \sum_{i=1}^n s_i x_i - C\mathcal{E}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\text{где } \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n s_i^2.$$

После преобразований получим [36]

$$z = (1 - C) \sum_{i=1}^n \left(x_i + s_i \frac{C}{1 - C} \right)^2 - \frac{C\mathcal{E}}{1 - C}. \quad (6.31)$$

По (6.31) замечаем [36], что $W(z)$ — нецентральное распределение χ^2 . При больших значениях n справедливо гауссово приближение

$$W(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \exp \left[-\frac{(z - \bar{z}_n)^2}{2\sigma_n^2} \right]. \quad (6.32)$$

При $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ по (6.18) легко находим соответственно при $x_i = n_i$ и $x_i = s_i + n_i$

$$\bar{z}_{n0} = (1 - C)n\sigma^2 - C\mathcal{E}; \quad \bar{z}_{n1} = (1 - C)n\sigma^2 + \mathcal{E}. \quad (6.33)$$

Вычислим дисперсии σ_{ni}^2 , $i = 0, 1$. По (6.30) получим

$$\sigma_n^2 = (1 - C)^2 \sum_{i=1}^n D(x_i^2) + 4C^2 \sum_{i=1}^n s_i^2 D(x_i), \quad (6.34)$$

Поскольку $D(x_i^2) = D(n_i^2) = m_{2x^2} - m_{1x^2}^2 = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$, $D(x_i) = D(n_i^2) = \sigma^2$, то окончательно находим

$$\sigma_{n0}^2 = 2(1 - C)^2 n\sigma^2 + 4C^2 \mathcal{E}\sigma^2. \quad (6.35)$$

При $\lambda = 1$, когда $x_i = s_i + n_i$, по (6.34) получим

$$\begin{aligned} D(z) &= \sigma_{n1}^2 = (1 - C)^2 \sum_{i=1}^n D \left[n_i + \frac{s_i}{(1 - C)} \right]^2 = \\ &= (1 - C)^2 n D(n^2) + 4 \mathfrak{E} D(n_i) = 2(1 - C)^2 n \sigma^4 + 4 \mathfrak{E} \sigma^2. \end{aligned} \quad (6.36)$$

С учетом (6.32) найдем интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\infty W(z) dz &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} \int_0^\infty e^{-(z-\bar{z}_n)^2/2\sigma_n^2} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\bar{z}_n/\sigma_n}^\infty e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\bar{z}_n/\sigma_n}^0 e^{-x^2/2} dx + \frac{1}{2} = \\ &= -\Psi \left(\frac{-\bar{z}_n}{\sigma_n} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \Psi \left(\frac{\bar{z}_n}{\sigma_n} \right) = \Phi \left(\frac{\bar{z}_n}{\sigma_n} \right). \end{aligned}$$

Здесь

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx; \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du. \quad (6.37)$$

В результате находим вероятность ложной тревоги

$$Q_0 = \Phi \left(\frac{\bar{z}_{n0}}{\sigma_{n0}} \right) = \Phi \left[\frac{(1 - C)n/2 - hC}{\sqrt{(1 - C)^2 n/2 + 2hC^2}} \right] \quad (6.38)$$

и вероятность обнаружения

$$Q_d = \Phi \left(\frac{\bar{z}_{n1}}{\sigma_{n1}} \right) = \Phi \left[\frac{(1 - C)n/2 + h}{\sqrt{(1 - C)^2 n/2 + 2h}} \right]. \quad (6.39)$$

где $h = \mathfrak{E}/2\sigma^2$ — ОСШ.

Рабочая характеристика $Q_d(Q_0)$ изображена на рис. 6.3 [36] при $h = 1$, $n = 10$ (кривая 1). Кривая 2 — рабочая характеристика при известной интенсивности шума.

По (6.38) и (6.39) можно получить асимптотические рабочие характеристики (характеристики обнаружения) при $n \gg 1$.

Запишем порог (6.20) в виде

$$C = \mathfrak{x}^{2/(n-2)} = \exp \left(\frac{2}{n-2} \ln \mathfrak{x} \right), \quad (6.40)$$

где \mathfrak{x} — порог при отсутствии априорной неопределенности.

При $n \gg 1$ $n - 2 \approx n$ и $C \approx 1 + (2/n) \ln \mathfrak{x}$. Тогда по (6.38) и (6.39) получим

$$Q_0 \approx \Phi \left(-\frac{\ln \mathfrak{x} + h}{\sqrt{2h}} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{\ln \mathfrak{x} + h}{\sqrt{2h}} \right) = Q_0^{(0)};$$

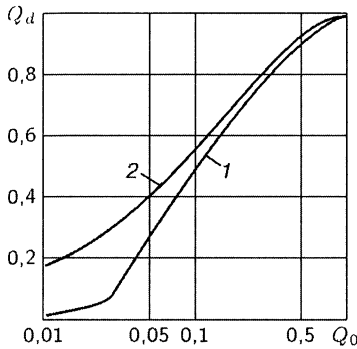


Рис. 6.3

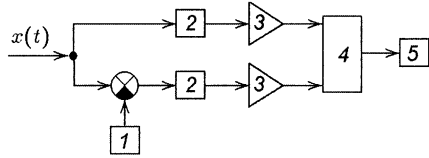


Рис. 6.4

$$Q_d \approx \Phi\left(-\frac{\ln \bar{\alpha} h}{\sqrt{2h}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln \bar{\alpha} - h}{\sqrt{2h}}\right) = Q_d^{(0)}, \quad (6.41)$$

где $Q_0^{(0)}$ и $Q_d^{(0)}$ — вероятности ложной тревоги и обнаружения при отсутствии априорной неопределенности.

Обозначим $x = (\ln \bar{\alpha} + h)/d$, $d = \sqrt{2h}$, тогда получим

$$Q_0^{(0)} = 1 - \Phi(x) = \operatorname{erfc}(x); \quad Q_d^{(0)} = 1 - \Phi(x - d) = \operatorname{erfc}(x - d). \quad (6.42)$$

Функциональная схема обнаружителя изображена на рис. 6.4, где 1 — генератор сигнала $s(t)$; 2 — квадратор; 3 — интегратор; 4 — устройство деления; 5 — реле.

Пример 6.3. Обнаружение сигнала в шуме неизвестной интенсивности (алгоритм с обучением)

В предыдущем примере рассмотрен алгоритм обнаружения, в котором оценка дисперсии шума производилась в процессе обнаружения на основе использования одной и той же выборки \mathbf{X}_n . Однако бывают ситуации, в которых для оценки неизвестной интенсивности шума может быть использована отдельная чисто шумовая выборка. Это соответствует задаче с обучением, когда система обнаружения прежде, чем обнаружить сигнал, настраивается на интенсивность шума.

Пусть, как и в предыдущем примере, наблюдается выборка \mathbf{X}_n на интервале $0 \leq t \leq T$, причем $T = n\Delta t$; $\Delta t = 1/2\Delta f$; Δf — полоса шума.

Аддитивная смесь сигнала и шума имеет вид

$$\mathbf{X}_n = \lambda \mathbf{S}_n + \mathbf{N}_n,$$

где \mathbf{S}_n — вектор сигнала; $\lambda = 1$ с вероятностью π_1 ; $\lambda = 0$ с вероятностью π_0 ($\pi_1 + \pi_0 = 1$); \mathbf{N}_n — вектор некоррелированного шума с неизвестной дисперсией $\sigma^2 = 2N_0\Delta f$. По наблюдению \mathbf{X}_n необходимо установить наличие (отсутствие) сигнала.

В данном случае для нахождения неизвестной интенсивности шума на интервале $t_0 \leq t \leq t_0 + T_1$, на котором сигнал может не быть наблюдается, выборка шума

$$\mathbf{Y}_m = \{y_1, \dots, y_m\}, \quad m = T_1/\Delta f.$$

Этим обеспечивается процесс обучения.

По выборке \mathbf{Y}_m находится оценка $\hat{\sigma}^2$ максимального правдоподобия дисперсии шума σ^2 . Эта оценка имеет вид

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathbf{Y}_m^T \mathbf{Y}_m}{m} = \sum_{i=1}^m \frac{y_i^2}{m}. \quad (6.43)$$

Решение о наличии сигнала принимается при выполнении условия

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}^2) = \frac{W_1(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma})}{W_0(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma})} \geq C. \quad (6.44)$$

Плотности вероятности W_1 и W_2 определены в (6.15). Поэтому по (6.44) с учетом (6.16) при $\hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2 = \hat{\sigma}^2$ получим

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}^2) = \exp \left(-\frac{\mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n}{2\hat{\sigma}^2} + \frac{\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n}{\hat{\sigma}^2} \right). \quad (6.45)$$

Правило решения (6.44) эквивалентно следующему неравенству:

$$\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n \geq \hat{\sigma}^2 \ln C + \frac{1}{2} \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n. \quad (6.46)$$

Заменяя $\hat{\sigma}^2$ на ее значение (6.43), получим правило решения в виде

$$\sum_{i=1}^n x_i s_i \geq \frac{\ln C}{m} \sum_{i=1}^m y_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m s_i^2. \quad (6.47)$$

Это неравенство определяет сравнение функции входных отсчетов с переменным порогом, который зависит от оценки дисперсии шума за время обучения.

Если (6.47) записать в другой форме —

$$\sum_{i=1}^n x_i s_i - a \sum_{i=1}^m y_i^2 \geq \frac{\mathcal{E}}{2}, \quad (6.48)$$

где $a = C_0/m$; $C_0 = \ln C$, $\mathcal{E} = \sum_{i=1}^n s_i^2$, то очевидно, что результат обработки сравнивается с постоянным порогом.

При непрерывном наблюдении по (6.48) при $\Delta t \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$,

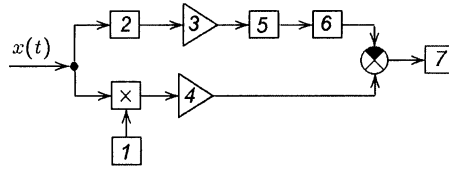


Рис. 6.5

получим следующий алгоритм обнаружения сигнала:

$$\int_0^T x(t)s(t) dt - a \int_{t_0}^{t_0+T_1} x^2(t) dt \geq \frac{\Xi_0}{2}, \quad (6.49)$$

где $\Xi_0 = \int_0^T s^2(t) dt$.

Функциональная схема обнаружителя, соответствующая (6.49), изображена на рис. 6.5, где 1 — генератор сигнала $s(t)$; 2 — квадратор; 3 — интегратор за время T_1 ; 4 — интегратор за время T ; 5 — усилитель с коэффициентом усиления a ; 6 — линия задержки на время $T - T_1 - t_0$ ($t_0 < -T_1$); 7 — реле.

Введем обозначения для случайных величин в левой части неравенства (6.48)

$$u = u_1 - u_2 \geq \Xi/2, \quad (6.50)$$

где

$$u_1 = \sum_{i=1}^n x_i s_i; \quad u_2 = a \sum_{i=1}^m y_i^2, \quad (6.51)$$

и найдем законы распределения для СВ u_1 и u_2 , необходимые для расчета характеристик обнаружения Q_0 и Q_d и построения рабочей характеристики обнаружителя.

По условию входной СП $x(t)$ — гауссовский с нулевым средним значением, поэтому

$$W_1(u_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp \left[-\frac{(u_1 - \bar{u}_1)^2}{2\sigma_1^2} \right], \quad (6.52)$$

причем среднее значение СВ u_1

$$\bar{u}_1 = E(u_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda = 0; \\ \Xi & \text{при } \lambda = 1. \end{cases} \quad (6.53)$$

Дисперсия как при $\lambda = 0$, так и при $\lambda = 1$

$$\sigma_1^2 = D(u_1) = \sum_{i=1}^n D(s_i x_i) = \sum_{i=1}^n s_i^2 D(x_i) = \sigma^2 \Xi. \quad (6.54)$$

По условию, отсчеты y_i — независимые нормально распределенные СВ, поэтому сумма $\sum_{i=1}^m y_i^2$ описывается распределением χ^2 с m степенями свободы, и при больших m справедливо гауссовское приближение

$$W_2(u_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp \left[-\frac{(u_2 - \bar{u}_2)^2}{2\sigma_2^2} \right]. \quad (6.55)$$

Здесь среднее значение СВ u_2

$$\bar{u}_2 = E(u_2) = a \sum_{i=1}^m E(y_i^2) = am\sigma^2 = C_0\sigma^2. \quad (6.56)$$

Дисперсия

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 &= E[(u_2 - \bar{u}_2)^2] = a^2 \sum_{i=1}^m D(y_i^2) = a^2 \sum_{i=1}^m E[(y_i^2 - \bar{y}_i^2)^2] = \\ &= a^2 \sum_{i=1}^m (m_{2y_i^2} - m_{1y_i^2}^2) = a^2 \sum_{i=1}^m (3\sigma^4 - \sigma^4) = 2a^2 m\sigma^4 = \frac{2}{m} C_0^2 \sigma^4. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Очевидно, что разность $u = u_1 - u_2$ также описывается (при достаточно больших m) нормальным распределением со средним значением $\bar{u} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$ и дисперсией $\sigma_u^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$. При этом

$$\bar{u} = \begin{cases} -C_0\sigma^2, & \lambda = 0; \\ \mathfrak{A} - C_0\sigma^2, & \lambda = 1; \end{cases} \quad \sigma_u^2 = \sigma^2 \mathfrak{A} + 2C_0^2\sigma^4/m. \quad (6.58)$$

Вероятность ложной тревоги

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int_{\mathfrak{A}/2}^{\infty} W(u | 0) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2}} \int_{\mathfrak{A}/2}^{\infty} \exp \left[-\frac{(u + C_0\sigma^2)^2}{2\sigma_u^2} \right] du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathfrak{A}/2 + C_0\sigma^2/\sigma_u}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \operatorname{erfc} \left(\frac{\mathfrak{A}/2 + C_0\sigma^2}{\sigma_u} \right) = \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{\mathfrak{A}/2 + C_0\sigma^2}{\sigma_u} \right). \end{aligned} \quad (6.59)$$

Вероятность обнаружения

$$Q_d = \operatorname{erfc} \left(\frac{C_0\sigma^2 - \mathfrak{A}/2}{\sigma_u} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{C_0\sigma^2 - \mathfrak{A}/2}{\sigma_u} \right). \quad (6.60)$$

Введем ОСШ $h = \mathfrak{A}/2\sigma^2$, тогда по (6.68) и (6.69) получим

$$Q_0 = 1 - \Phi \left(\frac{C_0 + h}{\sqrt{2(h + C_0^2/m)}} \right); \quad Q_d = 1 - \Phi \left(\frac{C_0 - h}{\sqrt{2(h + C_0^2/m)}} \right).$$

И наконец, обозначим

$$x = \frac{C_0 + h}{\sqrt{2(h + C_0^2/m)}},$$

окончательно находим характеристики обнаружения (рабочие характеристики приемника, РХП) в виде

$$Q_0 = \operatorname{erfc}(x) = 1 - \Phi(x); \quad Q_d = \operatorname{erfc}(x - vd) = 1 - \Phi(x - vd), \quad (6.61)$$

где $d^2 = 2h$; $v = 1/\sqrt{1 + C_0^2/hm}$.

Характеристики Q_0 и Q_d (6.71) справедливы и при непрерывном наблюдении, причем в этом случае ОСШ $h = \mathcal{E}_0/2N_0$, $m = 2T_1/\Delta f$.

На рис. 6.6 изображена РХП (кривая 1), рассчитанная по (6.61) при $h = 1$, $m = 10$, а также РХП (кривая 2) при известной интенсивности шума (по (6.61) при $v = 1$, $m \rightarrow \infty$) [36].

Пример 6.4. Обнаружение сигнала с неизвестной амплитудой в шуме неизвестной интенсивности. Допустим, что в моменты t_1, t_2, \dots, t_n наблюдается выборка $\mathbf{X}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ СП $X(t)$, которая может состоять из компонент шума $n(t)$ либо из компонент сигнала $\alpha s(t)$ заданного вида $s(t)$ с неизвестной амплитудой α и шума. Интенсивность шума неизвестна.

Выборку \mathbf{X}_n можно записать в виде суммы

$$\mathbf{X}_n = \lambda \alpha \mathbf{S}_n + \mathbf{N}_n, \quad (6.62)$$

где $\lambda = 1$ с вероятностью π_1 и $\lambda = 0$ с вероятностью π_0 ($\pi_1 + \pi_0 = 1$); $\mathbf{S}_n = \{s_i\}_{i=1,n}$ — заданный вектор; $s_i = s(t_i)$; α — случайный параметр, который считается равномерно распределенным в интервале $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$.

Шум является гауссовским с корреляционной матрицей $\mathbf{R}_n = \sigma^2 \|\delta_{ij}\|$, а $\sigma^2 = 2\Delta f N_0$ — неизвестная интенсивность шума, по условию распределенная равномерно в интервале $\Delta\sigma^2$.

Найти рабочую характеристику (Q_0, Q_d) оптимального обнаружителя.

Решение [36]. Для решения задачи необходимо вычислить ОП

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{\alpha}, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2) = \frac{W_1(\mathbf{X}_n | \hat{\alpha}, \hat{\sigma}_1^2)}{W_0(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}_2^2)} \quad (6.63)$$

и сравнить его с порогом.

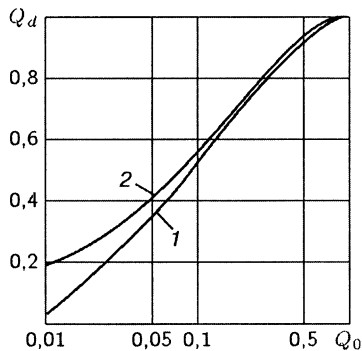


Рис. 6.6

В (6.63) $\hat{\alpha}$, $\hat{\sigma}_1^2$, $\hat{\sigma}_2^2$ — соответствующие оценки амплитуды α и дисперсий σ_1^2 и σ_2^2 , которые находятся методом максимального правдоподобия, причем ПРВ $W_0(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}_2^2)$ и оценка $\hat{\sigma}_2^2$ находятся соответственно по (6.23) и (6.26):

$$W_0(\mathbf{X}_n | \hat{\sigma}_2^2) = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2} \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n\right); \quad (6.64)$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = B_1/n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n/n. \quad (6.65)$$

Функция $W_1(\mathbf{X}_n | \hat{\alpha}, \hat{\sigma}_1^2)$ определяется формулой

$$W_1(\mathbf{X}_n | \hat{\alpha}, \hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma}_1^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}_1^2} (\mathbf{X}_n - \alpha \mathbf{S}_n)^T (\mathbf{X}_n - \alpha \mathbf{S}_n)\right]. \quad (6.66)$$

Оценки $\hat{\alpha}$ и $\hat{\sigma}_2^2$ находятся из системы уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial \ln W_1}{\partial \alpha} = 0; \quad \frac{\partial \ln W_1}{\partial \sigma^2} = 0. \quad (6.67)$$

Сначала выразим $\ln W_1$:

$$\ln W_1 = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma_1^2 - \frac{1}{2\sigma_1^2} (\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n - 2\alpha \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n + \alpha^2 \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n). \quad (6.68)$$

Поскольку в дальнейшем необходимо вычислять вторые производные от $\ln W_1$, то запишем первые частные производные

$$\frac{\partial \ln W_1}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n - \alpha \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n); \quad (6.69)$$

$$\frac{\partial \ln W_1}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} B_1(\alpha), \quad (6.70)$$

где $B_1(\alpha) = (\mathbf{X}_n - \alpha \mathbf{S}_n)^T (\mathbf{X}_n - \alpha \mathbf{S}_n)$.

По первому уравнению (6.67) с учетом (6.69) находим оценку амплитуды

$$\hat{\alpha} = \frac{\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n}{\mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n} = \frac{1}{\mathcal{E}_1} \sum_{i=1}^n x_i s_i, \quad (6.71)$$

где $\mathcal{E}_1 = \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n = \sum_{i=1}^n s_i^2$.

По второму уравнению (6.67) с учетом (6.70) получим оценку дисперсии σ_1^2

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_1^2 &= \frac{1}{n} B_1(\alpha) = \frac{1}{n} (\mathbf{X}_n - \hat{\alpha} \mathbf{S}_n)^T (\mathbf{X}_n - \hat{\alpha} \mathbf{S}_n) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\alpha} s_i)^2 = \frac{1}{n} (\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n - 2\hat{\alpha} \mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n + \hat{\alpha}^2 \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \left[\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n - \frac{2}{\mathfrak{E}_1} (\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n)^2 + \frac{(\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n)}{(\mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n)^2} (\mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n) \right] = \\
&= \frac{1}{n} \left[\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n - \frac{1}{\mathfrak{E}_1} (\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n)^2 \right] = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{\mathfrak{E}_1} \left(\sum_{i=1}^n x_i s_i \right)^2 \right]. \quad (6.72)
\end{aligned}$$

Отношение правдоподобия принимает вид

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{\alpha}, \hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2) = \left[\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2(\hat{\alpha})} \right]^{n/2} = \left[\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{\mathfrak{E}_1} \left(\sum_{i=1}^n x_i s_i \right)^2} \right]^{n/2}. \quad (6.73)$$

Это отношение должно сравниваться с порогом [36]

$$C_{0,1} = \mathfrak{x} \frac{a_0(\mathbf{X}_n)}{a_1(\mathbf{X}_n)}, \quad (6.74)$$

где $\mathfrak{x} = \frac{g_{21} - g_{22}}{g_{12} - g_{11}} \frac{\pi_0}{\pi_1}$; как и в предыдущих примерах, g_{ij} , $i, j = 1, 2$, — коэффициенты потерь.

Коэффициент $a_0(\mathbf{X}_n)$ определяется формулой (6.24):

$$a_0(x_n) = \frac{1}{\Delta(\sigma^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{n^{3/2}}} B_0 = \frac{1}{\Delta(\sigma^2)} \sqrt{\frac{2\pi}{n^{3/2}}} \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n. \quad (6.75)$$

Коэффициент $a_1(\mathbf{X}_n)$ определяется формулой [36]

$$a_1(\mathbf{X}_n) = \omega(\hat{\alpha}_1, \hat{\sigma}_1^2) \frac{2\pi}{\sqrt{\det D_1}}, \quad (6.76)$$

где

$$D_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \ln W_1}{\partial \alpha^2} & -\frac{\partial^2 \ln W_1}{\partial \alpha \partial \sigma^2} \\ -\frac{\partial^2 \ln W_1}{\partial \sigma^2 \partial \alpha} & -\frac{\partial^2 \ln W_1}{\partial (\sigma^2)^2} \end{bmatrix}_{\alpha=\hat{\alpha}_1, \sigma_1^2=\hat{\sigma}_1^2};$$

$\omega(\hat{\alpha}_1, \hat{\sigma}_1^2)$ — совместная ПРВ СВ $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\sigma}_1^2$. Получаем

$$\omega(\hat{\alpha}_1, \hat{\sigma}_1^2) = \frac{1}{\Delta \alpha} \frac{1}{\Delta \sigma^2}, \quad (6.77)$$

так как СВ $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\sigma}_1^2$ независимы и распределены равномерно.

По (6.69) получим

$$\left. \frac{\partial^2 \ln W_1}{\partial \alpha^2} \right|_{\substack{\alpha=\hat{\alpha}_1 \\ \sigma_1^2=\hat{\sigma}_1^2}} = - \left. \frac{\mathfrak{E}_1}{\sigma^2} \right|_{\substack{\alpha=\hat{\alpha}_1 \\ \sigma_1^2=\hat{\sigma}_1^2}} = - \frac{n \mathfrak{E}_1}{B_1(\hat{\alpha})}.$$

По (6.70) находим

$$\left. \frac{\partial^2 \ln W_1}{\partial (\sigma^2)^2} \right|_{\substack{\alpha=\hat{\alpha} \\ \sigma_1^2=\hat{\sigma}_1^2}} = \frac{1}{2\sigma^4} \left(n - \frac{2B_1(\alpha)}{\sigma^2} \right) \bigg|_{\substack{\alpha=\hat{\alpha} \\ \sigma_1^2=\hat{\sigma}_1^2}} = -\frac{n^3}{2B_1(\hat{\alpha})}.$$

По (6.69), (6.70) получим значение смешанной производной

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln W_1}{\partial \alpha \partial \sigma^2} &= \frac{\partial^2 \ln W_1}{\partial \sigma^2 \partial \alpha} = \frac{1}{\sigma^4} B'_\alpha(\alpha) \bigg|_{\substack{\alpha=\hat{\alpha} \\ \sigma_1^2=\hat{\sigma}_1^2}} = \\ &= \frac{1}{\sigma^4} (-\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n + \alpha \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n) \bigg|_{\substack{\alpha=\hat{\alpha} \\ \sigma_1^2=\hat{\sigma}_1^2}} = -\frac{1}{\sigma^4} \left(\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n - \frac{\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n}{\mathcal{E}_1} \mathcal{E}_1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица D_1 диагональная, и ее определитель

$$\det D_1 = \frac{n^4 \mathcal{E}_1}{\alpha B_1^3(\alpha)}.$$

Тогда по (6.76) с учетом (6.77) находим коэффициент

$$a_1(\mathbf{X}_n) = \frac{2\pi\sqrt{2}B_1^{3/2}(\hat{\alpha})}{\Delta\alpha\sigma^2n^2\sqrt{\mathcal{E}_1}}. \quad (6.78)$$

В результате можно вычислить порог (6.74)

$$C_{0,1} = \frac{a_0(\mathbf{X}_n)}{a_1(\mathbf{X}_n)} = \frac{\sqrt{n\mathcal{E}_1}}{\sqrt{2\pi}} \frac{B_2}{B_1\sqrt{B_1}} \Delta\alpha = \frac{\Delta\alpha}{\sqrt{\pi}} \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2(\hat{\alpha})} \sqrt{\frac{\mathcal{E}_1}{2\hat{\sigma}_1^2(\hat{\alpha})}}. \quad (6.79)$$

Таким образом, принимается решение о наличии сигнала, если

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}_1^2(\hat{\alpha})} \geq C(\mathbf{X}_n), \quad (6.80)$$

где

$$C(\mathbf{X}_n) = C_0^{2/(n-2)} = \left(\frac{\Delta\alpha\sqrt{\hat{h}_0}}{\sqrt{\pi}} \right)^{2/(n-2)}, \quad (6.81)$$

причем $\hat{h}_0 = \mathcal{E}_1/(2\hat{\sigma}_1^2\hat{\alpha})$ — оценка ОСШ $h_0 = \mathcal{E}_1/(2\sigma_1^2)$. Если положить $\alpha_1 = 0$ и $\Delta\alpha = \alpha_2 \equiv \alpha$, то порог $C(\mathbf{X}_n)$ принимает вид

$$C(\mathbf{X}_n) = \left(\frac{\Delta\hat{h}}{\pi} \right)^{2/(n-2)}, \quad (6.82)$$

где $\Delta\hat{h} = \alpha^2 \mathcal{E}_1/[2\sigma_1^2(\hat{\alpha})]$ — оценочное значение диапазона изменения ОСШ (про заданном диапазоне амплитуды α сигнала и оценки интенсивности шума, полученной в предположении наличия сигнала).

При переходе к наблюдению непрерывных сигналов алгоритм (6.80) принимает вид [36]

$$\frac{\int_0^T x^2(t) dt}{\int_0^T x^2(t) dt - \frac{1}{\mathcal{E}_0} \left[\int_0^T x(t)s(t) dt \right]^2} \geq C[x(t)],$$

где $\mathcal{E}_0 = \int_0^T s^2(t) dt$.

Рабочую характеристику приемника (Q_d, Q_0) найдем в предположении, что порог не зависит от выборки \mathbf{X}_n . Тогда решение о наличии сигнала принимается, когда выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 / \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - y_n^2 \right) \geq C, \quad (6.83)$$

где

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_1}} \sum_{i=1}^n x_i s_i. \quad (6.84)$$

Введем линейное преобразование [36]

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{G}\mathbf{X}_n,$$

где матрица \mathbf{G} такая, что $\mathbf{G}^T = \mathbf{G}^{-1}$. Тогда

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{Y}_n = \mathbf{G}^T\mathbf{Y}_n; \quad \mathbf{X}_n^T = \mathbf{Y}_n^T\mathbf{G}; \quad \mathbf{X}_n^T\mathbf{X}_n = \mathbf{Y}_n^T\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_n^T\mathbf{Y}_n.$$

Отсюда следует

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

В [36] показано, что в данном случае алгоритм обнаружения сводится к сравнению с порогом $C^0 = C - 1$ случайной величины

$$\xi^2 = y_n^2 / \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2.$$

Для расчета вероятностей Q_0 и Q_d необходимо вычислить вероятность $P(\xi^2 \geq C^0)$, причем

$$P(\xi^2 \geq C^0) = 1 - F_\xi(\sqrt{C^0}) + F_\xi(-\sqrt{C^0}),$$

где F_ξ — интегральный закон распределения СВ ξ . Если ввести СВ

$$\eta = \sqrt{n-1}\xi = y_n / \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2},$$

то получим [36]

$$P(\xi^2 \geq C^0) = 1 - F_\eta[\sqrt{(n-1)C^0}] + F_\eta[-\sqrt{(n-1)C^0}], \quad (6.85)$$

где F_η — интегральный закон распределения СВ η (распределение Стьюдента [37] с $(n-1)$ степенью свободы); при $\lambda = 0$ это центральное, при $\lambda = 1$ — нецентральное распределение Стьюдента).

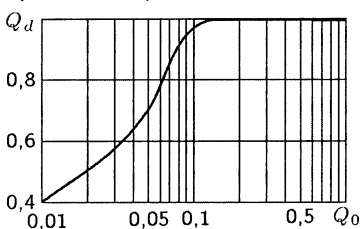


Рис. 6.7

Полученная по (6.85) РХП изображена на рис. 6.7 при $n = 10$, $h = 8$ [36].

Пример 6.5. Рассмотрим задачу обнаружения сигналов как проверку двух альтернативных гипотез H_0 и H_1 :

$$H_0: x_i = n_i, \quad i = \overline{1, n};$$

$$H_1: x_i = A s_i + n_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.86)$$

где $\{s_i\}$, $i = \overline{1, n}$, — отсчеты известной сигнальной формы; A — неизвестный множитель (амплитуда сигнала); $\{n_i\}$, $i = \overline{1, n}$, — отсчеты гауссовского белого шума (ГБШ) с нулевым средним значением и неизвестной дисперсией $D = \sigma^2$.

Предположим, что имеется возможность провести обучение устройства обнаружения для оценки дисперсии шума по его реализации $\{y_i\}$, $i = \overline{1, m}$. В результате такого обучения находится оценка неизвестной дисперсии шума методом максимального правдоподобия

$$\hat{D} = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i^2. \quad (6.87)$$

Пусть Γ — случайная величина (СВ), реализация которой D равна неизвестной дисперсии шума, Λ — СВ, реализация которой λ равна $\lambda = 0$ при отсутствии сигнала (при гипотезе H_0) и $\lambda = 1$ при наличии полезного сигнала (при гипотезе H_1). Θ — СВ, реализация которой равна неизвестному множителю A при сигнальной форме.

Задача обнаружения, как было отмечено, заключается в проверке двух гипотез (6.86).

Построим оценку \hat{A} значения A методом максимального правдоподобия.

Введем условную плотность распределения вероятности (ПРВ) $W_{X|\Theta\Gamma\Lambda}(x | A, D, \lambda)$ случайного вектора X , реализация которого $x =$

$= [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ представляет собой отсчеты наблюдаемого колебания при условии $\Theta = A$, $\Gamma = D$, $\Lambda = \lambda$.

Оценка \hat{A} параметра A находится из условия

$$W_{X|\Theta\Gamma\Lambda}(x | \hat{A}, \hat{D}, 1) = \max_A W_{X|\Theta\Gamma\Lambda}(x | A, \hat{D}, 1). \quad (6.88)$$

В случае ГБШ $\{n_i\}$, $i = \overline{1, n}$, получим

$$W_{X|\Theta\Gamma\Lambda}(x | \hat{A}, \hat{D}, 1) = \frac{1}{(2\pi\hat{D})^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\hat{D}} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{A}s_i)^2 \right] \quad (6.89)$$

$$W_{X|\Theta\Gamma\Lambda}(x | \hat{D}, 0) = \frac{1}{(2\pi\hat{D})^{n/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\hat{D}} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]. \quad (6.90)$$

Дифференцируя (6.89) и приравнявая к нулю полученный результат, находим оценку \hat{A} максимального правдоподобия:

$$\hat{A} = \frac{1}{\mathfrak{E}} \sum_{i=1}^n x_i s_i, \quad (6.91)$$

где $\mathfrak{E} = \sum_{i=1}^n s_i^2$ — энергия сигнальной формы.

Алгоритм обнаружения сигнала реализует метод отношения правдоподобия (ОП). Принимается гипотеза H_1 , если

$$\Lambda(X_n) = \frac{\max_A W_{X|\Theta\Gamma\Lambda}(x | A, \hat{D}, 1)}{W_{X|\Theta\Gamma\Lambda}(x | \hat{D}, 0)} > \gamma_1. \quad (6.92)$$

В противном случае при $\Lambda(X_n) < \gamma_1$ принимается гипотеза H_0 .

После подстановки в (6.92) ПРВ (6.89), (6.90) с учетом (6.87), логарифмирования и преобразований получим, что принимается гипотеза H_1 , если

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i s_i \right)^2 / \left(\frac{2\mathfrak{E}}{m} \sum_{i=1}^m y_i^2 \right) > \ln \gamma_1 = \gamma. \quad (6.93)$$

Здесь с учетом (6.91) использовано равенство

$$-\hat{A} \sum_{i=1}^n x_i s_i + \frac{1}{2} (\hat{A})^2 \sum_{i=1}^n s_i^2 = \frac{1}{2\mathfrak{E}} \left(\sum_{i=1}^n x_i s_i \right)^2.$$

При отсутствии полезного сигнала СВ (статистика)

$$Z = \frac{1}{\sigma\sqrt{\mathfrak{E}}} \sum_{i=1}^n x_i s_i \quad (6.94)$$

распределена по нормальному закону с нулевым средним значением,

так как $E(x_i | H_0) = 0$, и единичной дисперсией, поскольку дисперсия D_{ξ_n} СВ $\xi_n = \sum_{i=1}^n x_i s_i$ при гипотезе H_0 имеет вид

$$D_{\xi_n} = D \left(\sum_{i=1}^n x_i s_i \right) = \sum_{i=1}^n s_i^2 D(x_i) = \sigma^2 \mathfrak{E},$$

а дисперсия $D(z) = \frac{1}{\sigma^2 \mathfrak{E}} D_{\xi_n} = 1$.

При наличии полезного сигнала ($\lambda = 1$) СВ Z (6.94) распределена также по нормальному закону с единичной дисперсией и средним значением $m_z = \sqrt{\mathfrak{E}}/\sigma$, поскольку

$$E(\xi_n | H_1) = \sum_{i=1}^n s_i E(x_i | H_1) = \mathfrak{E}.$$

Таким образом, при гипотезе H_0 статистика

$$G^2 = \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{\mathfrak{E}}} \sum_{i=1}^n X_i S_i \right)^2 / \left(\frac{1}{\sigma^2 m} \sum_{i=1}^n Y_i^2 \right) \quad (6.95)$$

имеет центральное распределение Фишера $F_{1,m}$, так как в общем случае СВ X , распределенная по закону Фишера F_{ν_1, ν_2} , записывается в виде

$$X = \frac{x_1/\nu_1}{x_2/\nu_2}, \quad (6.96)$$

где $x_1 \sim \chi_{\nu_1}^2$, $x_2 \sim \chi_{\nu_2}^2$, а x_1 и x_2 независимы.

В данном случае (6.95) имеем $\nu_1 = 1$; $\nu_2 = m$; $x_1 \sim \chi_1^2$; $x_2 \sim \chi_m^2$.

Таким образом, статистика (6.95) имеет распределение Фишера $F_{1,m}$ с $(1, m)$ степенями свободы.

В случае гипотезы H_1 в (6.96) имеем $x_1 \sim \chi'_{\nu_1}^2(\lambda)$; $x_2 \sim \chi'_{\nu_2}^2(\lambda)$, где $\chi'_{\nu_1}^2(\lambda) = \chi'^2_1(\lambda)$ — нецентральное распределение хи-квадрат. Показатель нецентральности $\lambda = m_z^2 = \mathfrak{E}^2/\sigma^2$. Таким образом, при гипотезе H_1 статистика G^2 имеет нецентральное распределение Фишера $F'_{1,m}(\lambda)$ с $(1, m)$ степенями свободы и с показателем нецентральности $\lambda = m_z^2 = \mathfrak{E}^2/\sigma^2$.

Характеристики обнаружения. Располагая статистикой G^2 , находим вероятность ложной тревоги (ВЛТ) Q_0 и вероятность обнаружения Q_d :

$$Q_0 = P\{G^2 > \gamma | H_0\}; \quad Q_d = P\{G^2 > \gamma | H_1\}. \quad (6.97)$$

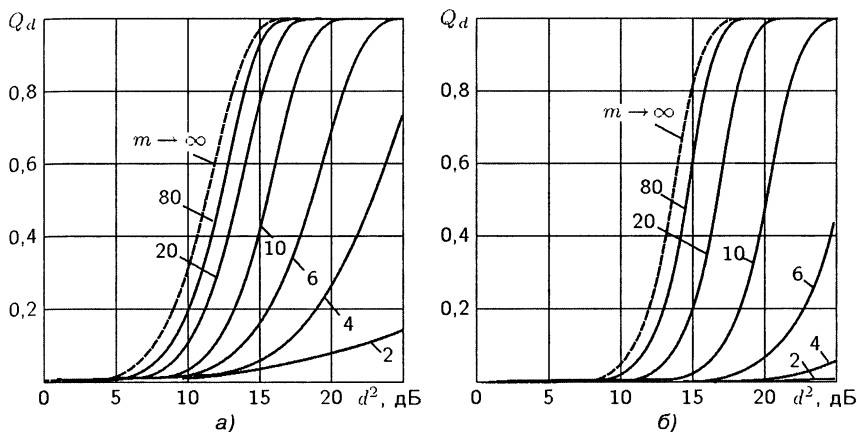


Рис. 6.8

Таким образом,

$$Q_0 = Q_{F_{1,m}}(\gamma); \quad Q_d = Q_{F'_{1,m}}(\gamma), \quad (6.98)$$

где $Q(x)$ — Q -функция,

$$Q(x) = \int_x^\infty W_i(x) dx, \quad i = 0, 1;$$

$W_i(x)$ — соответствующее распределение Фишера.

Процентная точка распределения Фишера

$$\gamma = Q_{F_{1,m}}^{-1}(Q_0). \quad (6.99)$$

На рис. 6.8, а и б изображены характеристики обнаружения при $m = 2, 4, 6, 10, 20, 80$ и $Q_0 = 10^{-k}$, $k = 4$ и 6 соответственно. Штриховой линией на рисунках изображены предельные характеристики обнаружения:

$$Q_0 = Q(x) = 1 - \Phi(x), \quad Q_d = Q(x - d) = 1 - \Phi(x - d), \quad (6.100)$$

где $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du.$

Характеристики (6.100) соответствуют обнаружения полностью известного сигнала с известной дисперсией шума и находятся по (6.98) при $m \rightarrow \infty$.

Поскольку при гипотезе H_0 статистика G имеет вид

$$G = \frac{Z}{\sqrt{\chi_m^2/m}},$$

то согласно определению, статистика G подчиняется центральному

распределению Стьюдента с m степенями свободы. Тогда по (6.97) ВЛТ имеет вид

$$\begin{aligned} Q_0 &= P\{G^2 > \gamma \mid H_0\} = P\{|G| > \sqrt{\gamma} \mid H_0\} = \\ &= P\{T < -\sqrt{\gamma}\} + P\{T > \sqrt{\gamma}\}, \end{aligned} \quad (6.101)$$

при этом G — статистика, имеющая центральное распределение Стьюдента.

Запишем интегральное распределение

$$P\{T < -\sqrt{\gamma}\} = \int_{-\infty}^{-\sqrt{\gamma}} W_t(x) dx,$$

где $W_t(x)$ — распределение Стьюдента с m степенями свободы [58],

$$W_t(x) = C \left(1 + \frac{x^2}{m}\right)^{-(m+1)/2}; \quad C = \frac{1}{\sqrt{m\pi}} \frac{F[(m+1)/2]}{\Gamma(m/2)},$$

где Γ — гамма-функция. Отсюда следует, что $W_t(x)$ — функция четная, $W_t(-x) = W_t(x)$. Тогда

$$P\{T < -\sqrt{\gamma}\} = Q_t(\sqrt{\gamma}) = \int_{\sqrt{\gamma}}^{\infty} W_t(x) dx.$$

По (6.101) получим $Q_0 = 2Q_t(\sqrt{\gamma})$, и, следовательно, процентная точка

$$t_\alpha = \sqrt{\gamma} = Q_t^{-1}(Q_0/2). \quad (6.102)$$

Аналогично при гипотезе H_1 статистика G подчиняется нецентральному распределению Стьюдента [58]

$$W_t(x, \delta) = C_1 \int_0^{\infty} u^{(m-1)/2} \exp(-u/2) \exp\left[-\frac{1}{2} \left(x\sqrt{\frac{u}{m}} - \delta\right)^2\right] du,$$

где $C_1^{-1} = 2^{(m+1)/2} \Gamma(m/2) \sqrt{\pi m}$. Тогда вероятность обнаружения

$$Q_d = P\{T < -\sqrt{\gamma}\} + P\{T > \sqrt{\gamma}\}$$

где T — статистика, имеющая нецентральное распределение Стьюдента с показателем нецентральности $\delta = \sqrt{\lambda}$, причем

$$P\{T < -\sqrt{\gamma}\} = \int_{-\infty}^{-\sqrt{\gamma}} W_t(x, \delta) dx = \int_{\sqrt{\gamma}}^{\infty} W_t(z, -\delta) dz = Q_t(\sqrt{\gamma}, -\delta).$$

Таким образом,

$$Q_d = Q_t(\sqrt{\gamma}, \delta) + Q_t(\sqrt{\gamma}, -\delta). \quad (6.103)$$

Сравнивая (6.93) и (6.98), приходим к соотношению

$$Q_{F'_{1,m}}(\gamma, \lambda) = Q_t(\sqrt{\gamma}, \delta) + Q_t(\sqrt{\gamma}, -\delta), \quad (6.104)$$

где $\delta = \sqrt{\lambda}$.

С другой стороны, сравнивая (6.104) и [58, ф-ла (26.6.19)] замечаем, что в [58] допущена ошибка (опечатка), так как там отсутствует второе слагаемое в правой части (9.104).

Сравним полученный результат с (6.85), где при аналогичной постановке задачи (но не тождественной, так как в [36] отсутствует обучение) получена формула

$$Q_d = 1 - F_\eta(\sqrt{\gamma}) + F_\eta(-\sqrt{\gamma}), \quad (6.105)$$

где $\gamma = (n-1)C^0$, $F_\eta(x)$ — интегральный закон нецентрального распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенью свободы.

По определению,

$$Q_\eta(\sqrt{\gamma}, \delta) = 1 - F_\eta(\sqrt{\gamma}); \quad F_\eta(-\sqrt{\gamma}) = \int_{-\infty}^{\sqrt{\gamma}} W_t(x, \delta) dx = Q_\eta(\sqrt{\gamma}, -\delta).$$

Следовательно, результат (6.85) с точностью до обозначений и числа степеней свободы $(n-1 = m)$ совпадает с формулой (6.104).

Приближенная (асимптотическая) формула для характеристик обнаружения. Асимптотическая формула для интегрального нецентрального распределения Стьюдента имеет вид [58]

$$F_t(\nu, \delta) = F(x); \quad x = \frac{t(1 - 1/4\nu) - \delta}{1 + \sqrt{t^2/2\nu}}, \quad (6.106)$$

где $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du = \Phi(x)$.

На рис. 6.9,а изображены точные зависимости рис. 6.8 (при $Q_0 = 10^{-4}$), на рис. 6.9,б — зависимости, полученные с использованием приближенной формулы (6.106).

Для приближенных расчетов представим соотношение для вероятности обнаружения (6.103) в виде

$$Q_d = [1 - \Phi(x_1)] + [1 - \Phi(x_2)],$$

где $x_{1,2} = \frac{t(1 - 1/4\nu) \mp \delta}{1 + \sqrt{t^2/2\nu}}$.

Пусть $\nu = m = 9$; $\delta = \sqrt{8}$ ($\lambda = 8$); $Q_0 = 0,01$; процентная точка $t_\alpha = 3,25$ (находится по (6.101) при $\sqrt{\gamma} = t_\alpha$). Тогда $x_1 \approx 0,1875$; $x_2 \approx 3,3907$; $Q_d \approx (1 - 0,5744) + (1 - 0,9997) = 0,4260$.

Точное значение по формуле (6.98) при процентной точке (6.99) $\gamma = Q_{F'_{1,m}}^{-1}(0,01) = F_\alpha = 10,56$ равно $Q_d = 0,3987$.

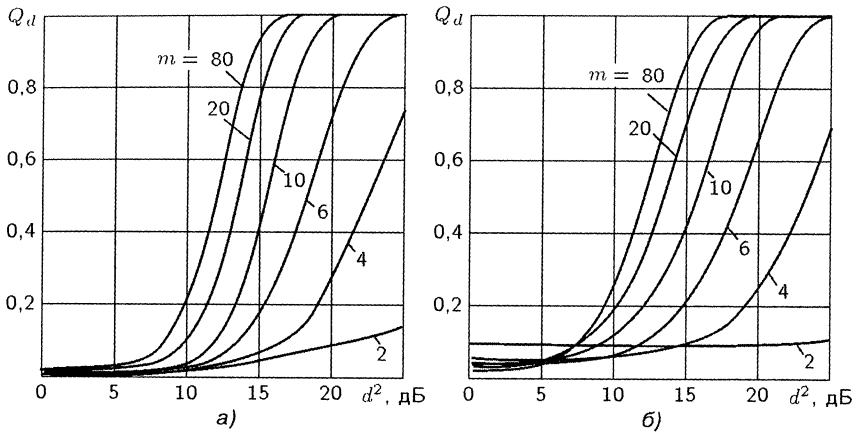


Рис. 6.9

Точное значение по (6.103) при процентной точке (6.102) $Q_d = 0,3987$, причем точное значение второго слагаемого в (6.103) равно $2,8 \cdot 10^{-7}$.

Далее, пусть $\delta = \lambda = 1$; $\nu = m = 9$; $Q_0 = 0,1$, тогда $t_\alpha = 1,8331$, $F_\alpha = 3,3603$. Здесь $x_1 = 0,5462$, $x_2 = 1,9428$. Приближенное значение

$$Q_d \approx (1 - 0,7075) + (1 - 0,9740) = 0,3185.$$

Точное значение

$$Q_d(F) = 0,2410; \quad Q_d(t) = 0,2360 + 0,0050 = 0,2410.$$

Таким образом, чем больше показатель нецентральности, тем выше точность приближенной формулы, причем с ростом δ уменьшается вклад второго слагаемого в (6.103), (6.104).

Задачи

6.1. Сигнал $s(t) = \alpha f(t)$ известной формы, но неизвестной положительной амплитуды α принимается в шуме $n(t)$ (ГБШ) $[x(t) = s(t) + n(t)]$ с неизвестной спектральной плотностью N_0 . Ряд взаимно ортонормированных функций f_1, f_2, \dots , ортогональных также и к $f(t)$, определен на интервале наблюдения $(0, T)$ в результате ортогонализации Грамма–Шмидта. Входной процесс $x(t)$ проходит через n параллельных фильтров, согласованных с n функциями $f_j(t)$ для получения статистик

$$x_j = \int_0^T f_j(t)x(t) dt, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Показать, что несмещенная оценка \hat{N} спектральной плотности N имеет вид

$$\hat{N} = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2$$

и при достаточно больших n дисперсия оценки может быть сделана сколь угодно малой.

Приемник для обнаружения сигнала $s(t)$ использует оценку \hat{N} и отклик фильтра, согласованного с формой сигнала $f(t)$

Показать, что при достаточно большом n этот приемник по достоверности совпадает с обнаружителем сигнала в белом шуме с известной спектральной плотностью N .

6.2. Пусть задан сигнал $s(t) = \alpha f(t)$ известной формы, но неизвестной положительной амплитуды α . Сигнал должен быть обнаружен в гауссовском шуме $n(t)$, который имеет КВФ $K_n(t, s) = \sigma^2 \eta(t, s)$, причем функция $\eta(t, s)$ известна, а дисперсия σ^2 неизвестна, $\eta(0, 0) = 1$. Воспользоваться разложением Карунена–Лозва сигнала, шума и входного воздействия $x(t) = s(t) + n(t)$. Ранжировать собственные значения λ_k ядра $\eta(t, s)$ в порядке убывания и обозначить соответствующие собственные функции через $f_k(t)$. Использовать n отсчетов

$$x_k = \int_0^T f_k(t)x(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Спроектировать приемник максимального правдоподобия для обнаружения сигнала на основе оценок $\hat{\alpha}$, $\hat{\sigma}^2$ амплитуды α и дисперсии σ^2 . Показать, что при достаточно большом n достоверность приема такого же обнаружителя такая же, как и приемника, синтезированного для обнаружения сигнала в шуме с известной дисперсией.

6.3. Пусть $x(t)$ — реализация гауссовского СП с КВФ $K_x(t, s) = Br(t, s)$, где B — положительная, но неизвестная постоянная. Если $x(t)$ задана на конечном интервале $(0, T)$, то постоянная B может быть оценена сколь угодно точно. Чтобы показать это, следует рассмотреть оценку

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{x_k},$$

где $x_k = \int_0^T f_k(t)x(t) dt$; $f_k(t)$ — ортонормированные собственные функции, λ_k — собственные значения интегрального уравнения

$$\lambda f(t) = \int_0^T r(t, s)f(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

причем $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$.

Показать, что b_n — несмещенная оценка величины B и что дисперсии $\text{var } b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ и, таким образом, чем больше слагаемых y b_n , тем выше точность оценки.

6.4. Разработать следующую альтернативную версию решения задачи 6.2. Записать входное воздействие $x(t)$ в виде

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

где $x_1(t)$ определяется через интеграл

$$x_1(t) = \frac{f(t)}{D^2} \int_0^T g(s)x(s) ds, \quad D^2 = \int_0^T g(u)f(u) du,$$

а $g(t)$ — решение интегрального уравнения

$$f(t) = \int_0^T \eta(t, s)g(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Показать, что $x_2(t)$ не зависит от $x_1(t)$ и ее ПРВ одна и та же, что при наличии сигнала, то и при его отсутствии. Получить ее КВФ. Используя решение задачи 6.3, определить неизвестную дисперсию σ^2 слагаемого $x_2(t)$ и использовать общую дисперсию для получения порога статистики обнаружения. Найти эту статистику.

6.5. Методом перевала получить аппроксимацию нулевого порядка для вероятностей ложной тревоги (ВЛТ) и обнаружения для постоянного уровня ложной тревоги (ПУЛТ), исходя из моментной функции

$$h(z) = (1+z)^{-M}(1-\beta z)^{-M'} \exp\left(-\frac{Sz}{1+z}\right)$$

и выражения

$$Q_d = P(V \geq 0 | H_1) = -\frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-1} h(z) dz, \quad c < 0,$$

где S — ОСШ.

Определить постоянную β при постоянной ВЛТ $Q_0 = P(V \geq \beta U' | H_0)$. Затем, используя полученную аппроксимацию, вычислить величину Q_d при $Q_d > 0,9$.

6.6. Пусть заданы квазигармонические сигналы

$$s_k(t) = A \operatorname{Re} F(t) \exp(i\Omega t + i\psi_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

со случайными независимыми фазами ψ_k , общей, хотя и неизвестной амплитудой A , все эти сигналы могут присутствовать или отсутствовать в последовательности из n входных воздействий приемника. Величины, на основе которых основывается обнаружение сигналов, — это вещественная и мнимая части x_k и y_k отклика фильтра, согласованного с сигналом

$$x_k + iy_k = \int_0^T F^*(t) X_k(t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где $X_k(t)$ — комплексная огибающая k -го входного воздействия. Аддитивный шум является ГБШ с неизвестной спектральной плотностью.

Методом максимального правдоподобия для каждой из гипотез вычислить общие дисперсии n составляющих x_k и y_k , а также оценок $\hat{\psi}_k$ фаз ψ_k и общей амплитуды A . Показать, что оптимальный обнаружитель по критерию отношения правдоподобия сравнивает статистику

$$\frac{\left[\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \right]^2}{\sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2)}$$

с соответствующим порогом.

6.7 [43]. Имеются две независимые выборки x_1, x_2, \dots, x_{n_1} и y_1, y_2, \dots, y_{n_2} нормального распределения с неизвестными средними значениями и дисперсиями. Проверяется гипотеза H_0 о равенстве дисперсий в указанных распределениях против альтернативы H_1 , что $\sigma_x^2 > \sigma_y^2$. Показать, что РНМ-алгоритм (РНМ — равномерный наиболее мощный) проверки гипотез имеет вид (при фиксированной вероятности Q_0 ошибки первого рода)

$$\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq F_\alpha(n_1 - 1; n_2 - 1),$$

где

$$S_k^2 = \frac{1}{n_k - 1} \left[\sum_{i=1}^{n_k} \left(x_i - \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} x_j \right)^2 \right], \quad k = 1, 2;$$

$F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)$ — процентная точка F распределения с $n_1 - 1, n_2 - 1$ степенями свободы. Плотность F распределения с $n - 1, m - 1$ степенями свободы определяется по формуле

$$W(z) = \Gamma\left(\frac{m+n-2}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right]^{-1} \times \\ \times \left(\frac{n-1}{m-1}\right)^{(n-1)/2} z^{(n-1)/2-1} \left(1 + \frac{n-1}{m-1} z\right)^{-(m+n-2)/2}.$$

Показать, что вероятность ошибки второго рода $Q_1 = 1 - Q_d$ зависит только от отношения σ_x/σ_y .

6.8 (Тест Стейна [42, 43]). Рассмотреть задачу обнаружения постоянного сигнала $s(t) = \mu$ (величина неизвестная) на фоне аддитивного гауссовского шума с нулевым средним значением и неизвестной дисперсией.

Пусть сначала наблюдается независимая выборка x_1, x_2, \dots, x_{n_0} объема n_0 и по этой выборке вычисляется несмещенная оценка неизвестной дисперсии помехи

$$s^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \left[\sum_{i=1}^{n_0} (x_i - \bar{x})^2 \right], \quad \bar{x} = \frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^{n_0} x_j,$$

затем производится $n - n_0$ дополнительных независимых наблюдений, причем

$$n = \max\{[s^2/c_0] + 1, n_0 + 1\},$$

где $c_0 > 0$ — заданная константа, $[z]$ — наибольшее целое $\leq z$.

Показать, что статистика

$$y_n(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{\sqrt{c_0}} \sum_{i=1}^n a_i x_i; \quad \mathbf{X}_n = \{x_i\}_{i=1, n},$$

где весовые коэффициенты удовлетворяют условию

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n_0}; \quad a_{n_0+1} = a_{n_0+2} = \dots = a_n; \\ \sum_{i=1}^n a_i = 1; \quad s^2 \sum_{i=1}^n a_i = c_0,$$

подчиняется центральному распределению Стьюдента с $n_0 - 1$ степенью свободы.

Показать, что для алгоритмов обнаружения, согласно которым выносятся решение о наличии сигнала,

$$y_n(\mathbf{X}_n) \geq t_\alpha(n_0 - 1) \quad \text{при } \mu \geq 0; \\ |y_n(\mathbf{X}_n)| \geq t_{\alpha/2}(n_0 - 1)$$

при произвольном знаке μ . $t_\lambda(m)$ — процентная точка распределения Стьюдента с m степенью свободы. Кроме того, показать, что вероятность обнаружения Q_d не зависит от дисперсии помехи и является возрастающей функцией от $|\mu|$ (в правой части формул $\alpha = Q_0$ — заданная вероятность ложной тревоги).

6.9 [43]. Показать, что основанное на наблюдаемой реализации $x(t)$, $|t| \leq T$, несмещенное РНМ правило обнаружения сигнала $\mu s(t)$, где μ — неизвестная амплитуда сигнала, $s(t)$ — заданная функция, на фоне аддитивной гауссовской помехи с нулевым средним значением и известной КФ $R_n(t, u)$ имеет следующий вид: принимается решение о наличии сигнала, если

$$\left| \int_{-T}^T g(t)x(t) dt \right| \geq d^2 x_{\alpha/2},$$

где $g(t)$ — решение интегрального уравнения

$$\int_{-T}^T R_n(t, u)g(u) du = s(t), \quad |t| \leq T;$$

$x_{\alpha/2}$ — процентная точка нормального распределения, соответствующая заданной вероятности ложной тревоги Q_0 и $d^2 = \int_{-T}^T g(t)s(t) dt$.

6.10. В условиях задачи 6.9 рассмотреть случай, когда известно, что $\mu > 0$, и показать, что при этом РНМ правило состоит в принятии гипотезы о наличии сигнала, если

$$\int_{-T}^T g(t)x(t) dt \geq d^2 x_{\alpha}.$$

6.11 [43]. Показать, что оптимальное по критерию максимального правдоподобия правило различения двух сигналов $\mu_1 s_1(t)$ и $\mu_2 s_2(t)$, где μ_1 и μ_2 — неизвестные амплитуды сигналов; $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — известные функции, на фоне аддитивной гауссовской помехи с нулевым средним значением и известной КФ $R_n(t, u)$ основанное на наблюдаемой реализации $x(t)$, $|t| \leq T$, имеет вид: принимается решение о том, что присутствует сигнал $\mu_1 s_1(t)$, если

$$\frac{1}{d_1^2} \int_{-T}^T g_1(t)x(t) dt \geq \frac{1}{d_2^2} \int_{-T}^T g_2(t)x(t) dt,$$

где $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — решения интегральных уравнений

$$\int_{-T}^T R_n(t, u)g_i(u) du = s_i(t), \quad \int_{-T}^T R_n(t, u)g_2(u) du = s_2(t), \quad |t| \leq T;$$

$$d_i^2 = \int_{-T}^T g_i(t)s_i(t) dt, \quad i = 1, 2.$$

6.12. Пусть наблюдается реализация $x(t) = \mu s(t) + n(t)$, $\mu > 0$; $n(t)$ — гауссовский шум с нулевым средним значением и КФ $R_n(t, u) = \sigma^2 r(t, u)$, причем функция $r(t, u)$ задана, а дисперсия σ^2 неизвестна. Показать, что правило обнаружения сигнала следующее [43]:

$$\sum_{k=1}^n x_k s_k \geq t_{\alpha} \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k s_k \right)^2},$$

где $x_k = \sqrt{\lambda_k} \int_{-T}^T x(t)f_k(t) dt$, λ_k и $f_k(t)$ — собственные значения и собственные

функции интегрального уравнения

$$\lambda \int_{-T}^T r(t, u) f(u) du = f(t), \quad |t| \leq T; \quad s_k = \sqrt{\lambda_k} \int_{-T}^T s(t) f_k(t) dt;$$

t_α — процентная точка распределения Стьюдента (центрального); $\alpha = Q_0$ — заданное значение вероятности ложной тревоги.

6.13. Пусть сигнал $S_n = \sqrt{\nu} \mathbf{a}_n$, где $\mathbf{a}_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, $\mathbf{a}^T \mathbf{a} = 1$; $\nu = \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n$ — неизвестная интенсивность (энергия) сигнала, принимается на фоне аддитивной помехи, представленной гауссовской выборкой $\mathbf{X}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, причем $E(x_i) = 0$, $i = \overline{1, n}$. Корреляционная матрица помехи

$$\mathbf{A}_n = E(\mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T) = \|m_{ij}\|; \quad m_{ij} = E(x_i x_j),$$

причем $\mathbf{A}_n = \varepsilon \mathbf{A}$; $\text{tr} \mathbf{A} = 1$; $\varepsilon = \text{tr} \mathbf{A}_n$; \mathbf{A} — полностью известная нормированная корреляционная матрица помехи; ε — неизвестный параметр, определяющий интенсивность (среднюю энергию) помехи

Показать, что решающее правило имеет вид [44, 45]

$$\mathbf{X}_n^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}_n > C \sqrt{\mathbf{X}_n^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}_n},$$

где C — коэффициент, зависящий от уровня ложной тревоги $\alpha = Q_0$.

6.14. В условиях задачи 6.13 показать, что характеристики сигнала определяются вероятностью неравенства [104, 105]

$$t_{n-1} = \xi \sqrt{(n-1)/\chi_{n-1}^2} \geq \sqrt{(n-1)C_2}, \quad C_2 = C^2/(\mu - C^2),$$

где $\mu = \mathbf{a}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{a}$ — коэффициент, учитывающий влияние порогового отношения сигнал/помеха, объем выборки, форму сигнала, корреляции и нестационарность помехи; случайная величина t_{n-1} распределена по закону Стьюдента с $n-1$ степенью свободы — центральному с ПРВ $W_0(t)$ в отсутствии сигнала и нецентральному с ПРВ $W_1(t, \sqrt{q})$ с параметром нецентральности \sqrt{q} , $q = \mu\gamma = \mu\nu/\varepsilon$ — эквивалентное отношение сигнал/помеха.

7 Обнаружение гармонического сигнала с неизвестными параметрами в гауссовском белом шуме

Рассмотрим задачу обнаружения гармонического сигнала

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & x[n] = w[n]; \\ H_1 : \quad & x[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \Phi) + w[n], \quad n = \overline{0, N-1}, \end{aligned}$$

где параметры $\{A, f_0, \Phi\}$ неизвестны, но детерминированы; $w[n]$ — ГБШ с известной дисперсией σ^2 .

Рассмотрим три случая:

- 1) неизвестна амплитуда A ;
- 2) неизвестны амплитуда A и фаза Φ ;
- 3) неизвестны амплитуда A , фаза Φ и частота f_0 .

1. При неизвестной амплитуде запишем сигнал в виде $As[n]$, где $s[n] = \cos(2\pi f_0 n + \Phi)$, причем форма сигнала $s[n]$ считается известной. Эта задача в общем виде рассмотрена в гл. 4, где решающее правило получено в виде

$$H_1 : \quad \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n + \Phi) \right]^2 > \gamma' \quad (7.1)$$

Характеристики обнаружения определяются соотношением (6.12)

$$Q_d = Q(\gamma - \sqrt{d^2}) + Q(\gamma + \sqrt{d^2}), \quad (7.2)$$

где $\gamma = Q^{-1}(Q_0/2)$; $d^2 = NA^2/2\sigma^2$.

Оценка \hat{A} максимального правдоподобия определяется соотношением

$$\hat{A} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n + \Phi)}{\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f_0 n + \Phi)} \quad (7.3)$$

Полагая

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f_0 n + \Phi) \approx \frac{N}{2}, \quad (7.4)$$

находим

$$\hat{A} \approx \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n + \Phi), \quad (7.5)$$

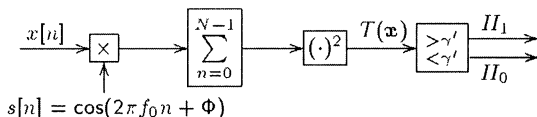


Рис. 7.1

причем частота $f_0 \neq 0$ и $f_0 \neq 1/2$.

Структура обнаружителя изображена на рис. 7.1. На этом рисунке

$$T(\mathbf{x}) = \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n] \right)^2. \quad (7.6)$$

Характеристики обнаружения, вычисленные по (7.2), изображены сплошными линиями на рис. 7.2 при $Q_0 = 10^{-n}$, $n = 1, 5$ и ОСШ $d_{\text{дБ}}^2 = 10 \lg(NA^2/2\sigma^2)$ от 0 до 20 дБ. Штриховыми линиями на этом рисунке изображены кривые обнаружения при полностью известном сигнале.

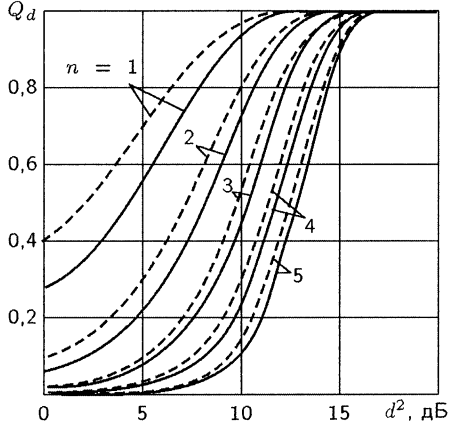


Рис. 7.2

2. Рассмотрим обнаружение сигнала при неизвестной амплитуде A и фазе Φ .

Найдем алгоритм обнаружения сигнала

$$s_1[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \Phi)$$

при наличии ГБШ $w[n]$ с известной дисперсией σ^2 , если амплитуда A и фаза Φ сигнала неизвестны. Вычислим характеристики обнаружения.

В данном случае принимается гипотеза H_1 , если выполняется неравенство

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{A}, \hat{\Phi}) = \frac{P_1(\mathbf{X}_n | \hat{A}, \hat{\Phi}, H_1)}{P_0(\mathbf{X}_n | H_0)} > \gamma.$$

При этом ОП принимает вид

$$\Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{A}, \hat{\Phi}) = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} [x[n] - \hat{A} \cos(2\pi f_0 n + \hat{\Phi})]^2 \right\}}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \right]}$$

где \hat{A} и $\hat{\Phi}$ — оценки максимального правдоподобия; $f_0 \neq 0$, $f_0 \neq 1/2$. После преобразований получим ЛОП в виде

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{A}, \hat{\Phi}) = \\ = -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{n=0}^{N-1} -2x[n]\hat{A} \cos(2\pi f_0 n + \hat{\Phi}) + \sum_{n=0}^{N-1} \hat{A}^2 \cos^2(2\pi f_0 n + \hat{\Phi}) \right]. \end{aligned}$$

Найдем оценки \hat{A} и $\hat{\Phi}$. Предварительно запишем

$$\begin{aligned} \hat{A} \cos(2\pi f_0 n + \hat{\Phi}) &= \hat{A} \cos(\hat{\Phi}) \cos(2\pi f_0 n) - \hat{A} \sin(\hat{\Phi}) \sin(2\pi f_0 n) = \\ &= \hat{\alpha}_1 \cos(2\pi f_0 n) + \hat{\alpha}_2 \sin(2\pi f_0 n); \\ \hat{\alpha}_1 &= \hat{A} \cos(\hat{\Phi}); \quad \hat{\alpha}_2 = -\hat{A} \sin(\hat{\Phi}). \end{aligned} \quad (7.7)$$

При найденных оценках СВ $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$ оценки \hat{A} и $\hat{\Phi}$ принимают вид

$$\hat{A} = \sqrt{\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2}; \quad \hat{\Phi} = \arctg(-\hat{\alpha}_2^2/\hat{\alpha}_1^2). \quad (7.8)$$

Оценки $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$ будем искать методом максимального правдоподобия. Для этого запишем функцию правдоподобия

$$\begin{aligned} L(\mathbf{X}_n | \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) &= P_1(\mathbf{X}_n | \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) = \\ &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{X}_n - \hat{\alpha}_1 \mathbf{C}_n - \hat{\alpha}_2 \mathbf{S}_n)^T (\mathbf{X}_n - \hat{\alpha}_1 \mathbf{C}_n - \hat{\alpha}_2 \mathbf{S}_n) \right], \end{aligned}$$

где $\mathbf{X}_n = \{x[0], x[1], \dots, x[N-1]\}^T$, $\mathbf{C}_n = \{c[0], c[1], \dots, c[N-1]\}^T$; $\mathbf{S}_n = \{s[0], s[1], \dots, s[N-1]\}^T$; $c[n] = \cos(2\pi f_0 n)$; $s[n] = \sin(2\pi f_0 n)$; $n = 0, N-1$.

Уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}_1} \ln P_1(X_n | \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}_2} \ln P_1(X_n | \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) = 0$$

принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}_1} \ln P_1(\mathbf{X}_n | \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) &= \frac{1}{2\sigma^2} (2\mathbf{X}_n^T \mathbf{C}_n - 2\hat{\alpha}_1 \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n - 2\hat{\alpha}_2 \mathbf{C}_n^T \mathbf{S}_n) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}_2} \ln P_1(\mathbf{X}_n | \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) &= \frac{1}{2\sigma^2} (2\mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n - 2\hat{\alpha}_1 \mathbf{C}_n^T \mathbf{S}_n - 2\hat{\alpha}_2 \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим систему уравнений для оценок $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$:

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_1 \mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n + \hat{\alpha}_2 \mathbf{S}_n^T \mathbf{C}_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{C}_n; \\ \hat{\alpha}_1 \mathbf{C}_n^T \mathbf{S}_n + \hat{\alpha}_2 \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n. \end{cases}$$

Пусть величина N значительна ($N \gg 1$), тогда приближенно

можно положить

$$\mathbf{C}_n^T \mathbf{C}_n = \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f_0 n) \approx \frac{N}{2}; \quad \mathbf{S}_n^T \mathbf{S}_n = \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(2\pi f_0 n) \approx \frac{N}{2};$$

$$\mathbf{S}_n^T \mathbf{C}_n = \mathbf{C}_n^T \mathbf{S}_n = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f_0 n) \sin(2\pi f_0 n) \approx 0.$$

В результате находим

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{2}{N} \mathbf{X}_n^T \mathbf{C}_n = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n);$$

$$\hat{\alpha}_2 = \frac{2}{N} \mathbf{X}_n^T \mathbf{S}_n = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n).$$

С учетом этих значений и соотношений (7.7) получим

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \hat{A} \cos(2\pi f_0 n + \hat{\Phi}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n) \hat{A} \cos(\hat{\Phi}) -$$

$$- \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n) \hat{A} \sin(\hat{\Phi}) = \frac{N}{2} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2).$$

Полагая

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f_0 n + \hat{\Phi}) \approx \frac{N}{2},$$

находим логарифм ОП:

$$\ln \Lambda(\mathbf{X}_n | \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left[-2\frac{N}{2} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2) + \frac{N}{2} \hat{A}^2 \right] =$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2} \left[-\frac{N}{2} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2) \right] = \frac{N}{4\sigma^2} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2).$$

Принимается гипотеза H_1 , если

$$\frac{N}{4\sigma^2} (\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2) > \ln \gamma. \quad (7.9)$$

Преобразуем сумму квадратов оценок $\hat{\alpha}_1$ и $\hat{\alpha}_2$:

$$\hat{\alpha}_1^2 + \hat{\alpha}_2^2 = \frac{4}{N^2} \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n) \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n) \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{4}{N} \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-i2\pi f_0 n) \right|^2 = \frac{4}{N} \Gamma(f_0),$$

где $\Gamma(f_0)$ — периодограмма [60, ф-ла (12.15)] в точке $f = f_0$.

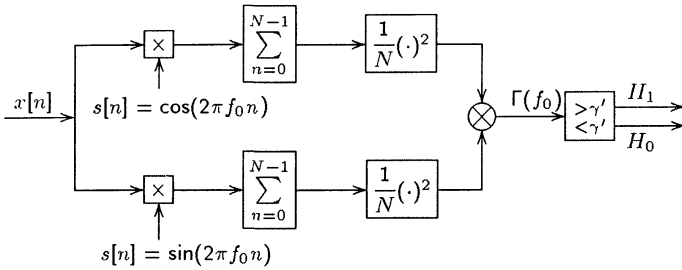


Рис. 7.3

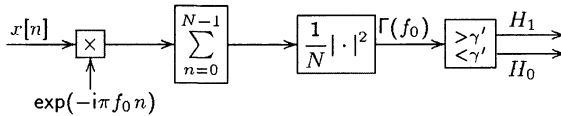


Рис. 7.4

Таким образом принимается гипотеза H_1 , если

$$\Gamma(f_0) > \sigma^2 \ln \gamma = \gamma'. \quad (7.10)$$

Рассмотрим две эквивалентные схемы обнаружения — квадратурную (рис. 7.3) и периодограммную (рис. 7.4). Обнаружитель по схеме рис. 7.3 называют некогерентным или квадратурным.

Найдем характеристику обнаружения рассматриваемого обнаружителя. Представим статистику (периодограмму) $\Gamma(f_0)$ в виде

$$\Gamma(f_0) = \xi_1^2 + \xi_2^2, \quad (7.11)$$

где

$$\xi_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n); \quad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n).$$

Каждая из СВ ξ_1 и ξ_2 является результатом линейного преобразования гауссовой СВ $x[n]$, причем

$$E(\xi_1 | H_0) = 0; \quad E(\xi_2 | H_0) = 0;$$

$$E(\xi_1 | H_1) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} A \cos(2\pi f_0 n + \Phi) \cos(2\pi f_0 n) \approx \frac{\sqrt{N}}{2} A \cos(\Phi);$$

$$E(\xi_2 | H_1) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} A \cos(2\pi f_0 n + \Phi) \sin(2\pi f_0 n) \approx -\frac{\sqrt{N}}{2} A \sin(\Phi).$$

Дисперсия СВ ξ_1 и ξ_2 при обеих гипотезах одинакова:

$$D_1 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D\{x[n]\} \cos^2(2\pi f_0 n) \approx \frac{\sigma^2}{2};$$

$$D_2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D\{x[n]\} \sin^2(2\pi f_0 n) \approx \frac{\sigma^2}{2}.$$

Таким образом, периодограмма $\Gamma(f_0)$ при $f_0 \neq 0$, $f_0 \neq 1/2$ представляет собой сумму квадратов двух независимых гауссовских СВ. Следовательно, если нормировать ξ_1 и ξ_2 делением на $\sigma^2/\sqrt{2}$, то получим при H_0 ПРВ $W(\Gamma(f_0)) = \chi^2$ (центральное распределение χ^2_2 с двумя степенями свободы). При H_1 ПРВ $W(\Gamma(f_0))$ является нецентральным распределением $\chi'^2_2(\lambda)$ с параметром нецентральности

$$\lambda = \left(\frac{m_{\xi_1}}{\sigma/\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{m_{\xi_2}}{\sigma/\sqrt{2}} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{N} \frac{A}{2} \cos \Phi}{\sigma/\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{N} \frac{A}{2} \sin \Phi}{\sigma/\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{NA^2}{2\sigma^2}. \quad (7.12)$$

Вычислим ВЛТ

$$Q_0 = P\{\Gamma(f_0) > \gamma' \mid H_0\} = P\left\{ \frac{\Gamma(f_0)}{\sigma^2/2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2/2} \mid H_0 \right\} = Q_{\chi^2_2} \left(\frac{2\gamma'}{\sigma^2} \right) =$$

$$= \int_{2\gamma'/\sigma^2}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x/2} dx = \int_{\gamma'/\sigma^2}^{\infty} e^{-z} dz = e^{-\gamma'/\sigma^2},$$

так как $\chi^2_2 = \frac{1}{2} e^{-x/2}$ при $x \geq 0$.

Таким образом,

$$Q_0 = e^{-\gamma'/\sigma^2}; \quad \gamma'/\sigma^2 = \ln(1/Q_0). \quad (7.13)$$

Найдем вероятность обнаружения

$$Q_d = P\{\Gamma(f_0) > \gamma' \mid H_1\} = P\left\{ \frac{\Gamma(f_0)}{\sigma^2/2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2/2} \mid H_1 \right\} =$$

$$= Q_{\chi'^2_2(\lambda)} \left(\frac{2\gamma'}{\sigma^2} \right) = Q_{\chi'^2_2(\lambda)} \left(2 \ln \frac{1}{Q_0} \right). \quad (7.14)$$

Последним соотношением определяется РХП. Фиксируя $Q_0 = 10^{-n}$, $n = \overline{1, 7}$ получим характеристики обнаружения $Q_d(d^2)$ при $Q_0 = \text{const}$, при $d^2 = NA^2/2\sigma^2 = \lambda$ (λ — коэффициент нецентральности, $d^2_{\text{дБ}} = 10 \lg d^2$), изображенные на рис. 7.5. Можно показать, что

вероятность обнаружения выражается через Q -функцию Маркума

$$Q_d = Q_m \left(\sqrt{\frac{NA^2}{2\sigma^2}}; \sqrt{\frac{2\gamma'}{\sigma^2}} \right), \quad \frac{2\gamma'}{\sigma^2} = 2 \ln \frac{1}{Q_0},$$

где $Q_m = Q(\alpha, \gamma) = \int_{\gamma}^{\infty} z \exp \left[-\frac{1}{2}(z^2 + \alpha^2) \right] I_0(\alpha z) dz$; $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка; Q_m — функция Маркума табулирована [18, 70].

Пусть неизвестными является амплитуда A , фаза Φ и частота f_0 . Гипотеза H_1 принимается, когда выполняется неравенство

$$\frac{W_1(\mathbf{x}; \hat{A}, \hat{\Phi}, \hat{f}_0, H_1)}{W_0(\mathbf{x}; H_0)} = \frac{W_1}{W_0} > \gamma,$$

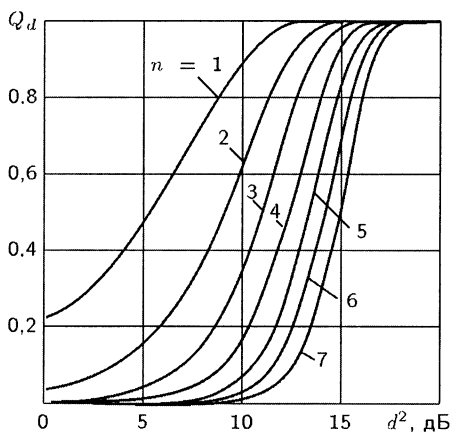


Рис. 7.5

или

$$\max_{f_0} \frac{W_1}{W_0} > \gamma \quad (7.15)$$

Поскольку ПРВ $W_0(\mathbf{x}; H_0)$ не зависит от f_0 , то неравенство (7.15) можно записать в виде

$$\max_{f_0} \frac{W_1}{W_0} > \gamma, \quad (7.16)$$

или в силу монотонности логарифма

$$\ln \left(\max_{f_0} \frac{W_1}{W_0} \right) > \ln \gamma.$$

По свойству монотонности можно переставлять операции \ln и \max , в результате получим

$$\max_{f_0} \ln \frac{W_1}{W_0} > \ln \gamma. \quad (7.17)$$

Используя (7.16), находим

$$\ln \frac{W_1}{W_0} = \frac{\Gamma(f_0)}{\sigma^2}. \quad (7.18)$$

Поэтому окончательно принимается гипотеза H_1 , если выполняется неравенство

$$\max_{f_0} \Gamma(f_0) > \sigma^2 \ln \gamma = \gamma'. \quad (7.19)$$

Обнаружитель принимает решение о наличии гармонического сигнала, если максимальное значение периодограммы превышает

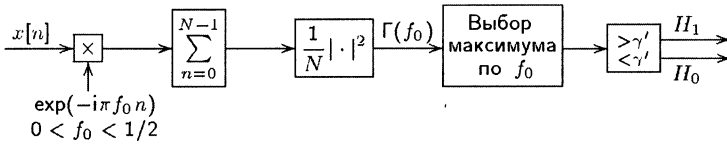


Рис. 7.6

установленный порог. Таким образом, частота f_0 , соответствующая этому максимуму, является оценкой максимального правдоподобия. Этим объясняется факт использования периодограммы или ее реализации в форме БПФ в виде составляющей всех узкополосных систем обнаружителя.

Схема обнаружителя изображена на рис. 7.6. Эта схема аналогична схеме рис. 7.4 с тем отличием, что ВЛТ Q_0 увеличивается с увеличением привлекаемых частот при поиске максимума $\Gamma(f_0)$. Используя N -точечное БПФ для оценки периодограммы $\Gamma(f_0)$ и полагая, что для поиска максимума привлекается частоты $f_k = k/N$ при $k = 1, 2, \dots, N/2 - 1$, получим вероятность обнаружения в виде

$$Q_d = Q_{\chi'^2_{2(\lambda)}}(\gamma), \quad (7.20)$$

где $\lambda = d^2 = NA^2/(2\sigma^2)$; $\gamma = 2 \ln \frac{N/2 - 1}{Q_0}$.

Характеристики обнаружения изображены на рис. 7.7 при $N = 256$; 512; 1024 в зависимости от ОСШ $d_{\text{дБ}}^2 = 10 \lg \frac{NA^2}{2\sigma^2}$ при $Q_0 = 10^{-4}$. Штриховой линией обозначена характеристика обнаружения при известной частоте (см. рис. 7.5).

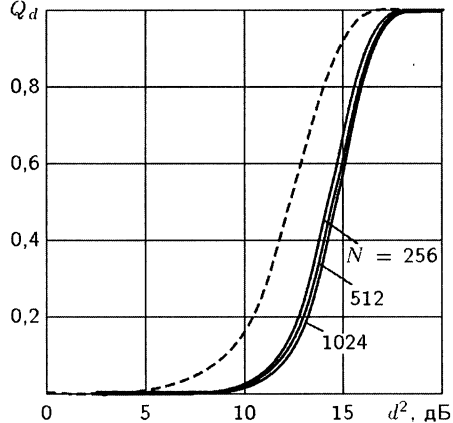


Рис. 7.7

Задачи

7.1. Рассмотрим проблему обнаружения

$$H_0: x[n] = w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$H_1: x[n] = A + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $w[n]$ — ГБШ с дисперсией σ^2 , A принимает значение либо 1, либо -1 и может быть рассмотрена как неизвестная детерминированная постоянная. Показать, существует ли РНМ (равномерно наиболее мощная) статистика. Если не существует, то найти статистику ОП.

Указание. Необходимо показать, что $\hat{A} = \text{sgn}(\bar{x})$

8 Обнаружение сигналов при негауссовских помехах

8.1. Негауссовские распределения

Простота решения задач при наличии аддитивных гауссовских помех объясняется тем, что наблюдаемый процесс можно полностью характеризовать его средним значением и корреляционной функцией (или матрицей). Полученные при этом алгоритмы обнаружения сигналов являются оптимальными. Гауссовость помех нарушается при появлении в составляющих помехи аномального шума в форме так называемых шумовых выбросов, игнорирование их приводит к ухудшению характеристик обнаружения. Одними из ранних работ, где рассмотрены негауссовские процессы являются работы Миддлтона [63, 64] (см. также [65, 83]). Материалы по негауссовским помехам изложены также в [43, 54, 84, 85].

Наиболее часто рассматривается негауссовская аддитивная помеха, имеющая одномерную ПРВ в форме двустороннего показательного распределения (ПРВ Лапласа). В этом случае, если наблюдается аддитивная смесь сигнала $s[n] = s_n$ и помехи $w[n] = w_n$

$$x_n = s_n + w_n, \quad (8.1)$$

то ПРВ $W(w_n)$ помехи имеет вид

$$W(w_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} |w_n| \right], \quad -\infty < w_n < \infty. \quad (8.2)$$

Здесь σ^2 — дисперсия (мощность) помехи.

Нормальный закон при той же дисперсии σ^2 имеет вид

$$W(w_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-w_n^2/2\sigma^2}. \quad (8.3)$$

На рис. 8.1,а и б изображены ПРВ (8.2) (кривая 2) и (8.3) (кривая 1) соответственно в линейном и логарифмическом масштабах при $\sigma^2 = 1$.

Очевидно, логарифм ПРВ Лапласа — это отрезки прямых, и по рис. 8.1,б замечаем увеличение расхождения нормального и лапласова распределений с удалением от начала координат. Например, вероятность превышения уровня 3σ имеет вид

$$P(w_n > 3\sigma) = 1 - P(w_n < 3\sigma) = 1 - F(3\sigma),$$

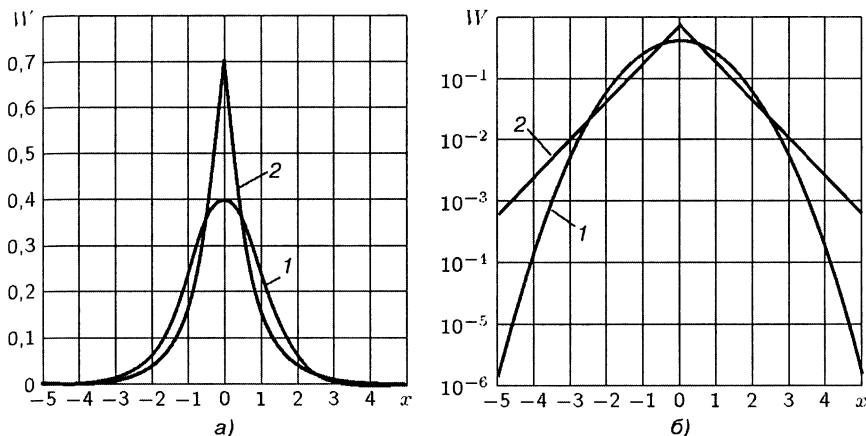


Рис. 8.1

что дает при нормальном распределении $F(3\sigma) = 0,99865$ и $F(w_n > 3\sigma) = 0,00135$, при распределении Лапласа $F(w_n > 3\sigma) = e^{-3\sqrt{2}} = 0,01446$, т.е. вероятность в десять раз большую, чем при нормальном распределении. Такова цена расхождения на «концах» распределения.

Критерием отличия закона распределения от нормального при нулевых средних значениях служит эксцесс

$$Ex = \frac{\mu}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(w_n^4)}{E^2(w_n^2)} - 3. \quad (8.4)$$

Для нормального распределения $Ex = 0$, так как $E(w_n^4) = 3\sigma^4$, $E(w_n^2) = \sigma^2$. В случае распределения Лапласа $E(w_n^2) = \sigma^2$, $E(w_n^4) = 6\sigma^4$ и $Ex = 3$, так как

$$E(w_n^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 W(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x^4 \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-(\sqrt{2}/\sigma)x} dx.$$

Учитывая [59, ф-ла 3.381.4], что

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-ax} dx = \frac{k!}{a^{k+1}}, \quad \text{при } a > 0 \text{ и } k \text{ — целое}, \quad (8.5)$$

получим при $k = 4$ и $a = \sqrt{2}/\sigma$, $E(w_n^4) = 6\sigma^4$.

Распределение Лапласа из класса тех, которые на «концах» распределения убывают медленнее, чем нормальное распределение. У таких распределений эксцесс всегда положителен (иначе: это распределение более «островершинное», чем нормальное).

Менее островершинные (или плосковершинные) распределения имеют отрицательный эксцесс. Например, при равномерном распре-

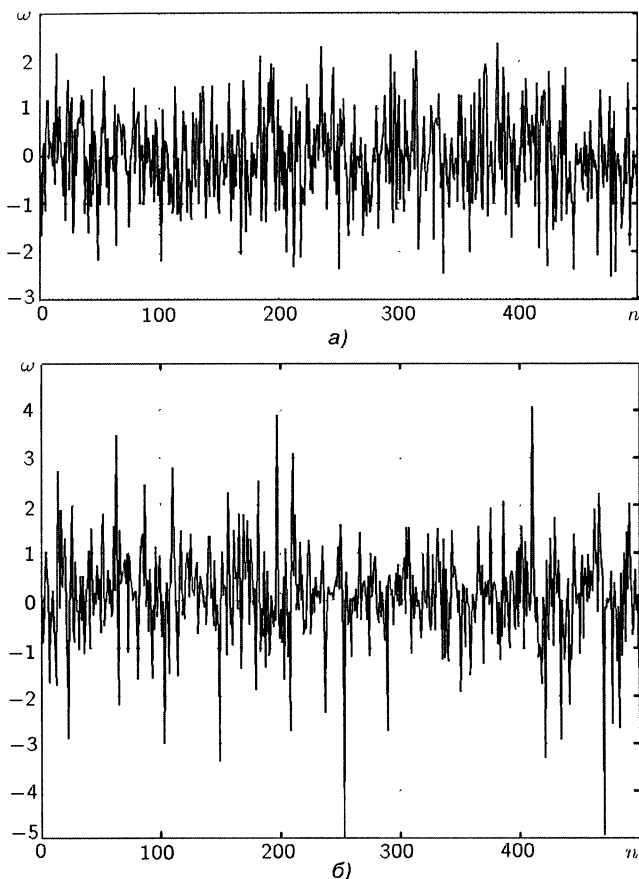


Рис. 8.2

делении с той же дисперсией σ^2 , когда

$$W(w_n) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma\sqrt{3}} & \text{при } |w_n| \leq \sigma\sqrt{3}; \\ 0 & \text{при } |w_n| > \sigma\sqrt{3}, \end{cases} \quad (8.6)$$

получим

$$E(w_n^4) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{3}} \int_{-\sigma\sqrt{3}}^{\sigma\sqrt{3}} x^4 dx = \frac{9}{5}\sigma^4,$$

и, следовательно, $E\chi = -1,2$.

На рис. 8.2,а и б изображены реализации СП соответственно с гауссовским и лапласовским распределением при $\sigma^2 = 1$. На рис. 8.2,б видны выбросы, отсутствующие на рис. 8.2,а.

Так называемое обобщенное распределение Гаусса включает в се-

Таблица 8.1

β	-0,5	-0,75	-0,99
c_1	0,3207	0,2978	0,2887
c_2	0,1142	0,0098	0

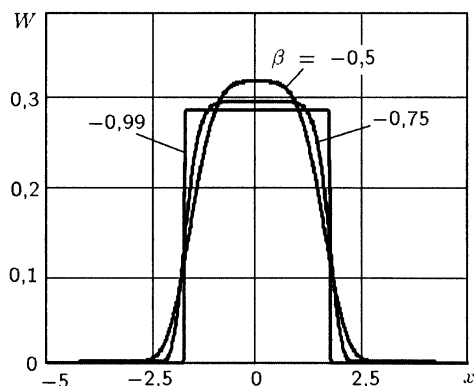


Рис. 8.3

бн нормальное распределение, а также распределение Лапласа и равномерное.

Обобщенная ПРВ Гаусса имеет вид

$$W(x) = \frac{c_1(\beta)}{\sigma} \exp \left[-c_2(\beta) \left| \frac{x}{\sigma} \right|^{2/(1+\beta)} \right], \quad (8.7)$$

где

$$c_1(\beta) = \frac{\sqrt{\Gamma \left[\frac{3}{2}(1+\beta) \right]}}{(1+\beta) \sqrt{\Gamma^3 \left[\frac{1}{2}(1+\beta) \right]}}; \quad c_2(\beta) = \left\{ \frac{\Gamma \left[\frac{3}{2}(1+\beta) \right]}{\Gamma \left[\frac{1}{2}(1+\beta) \right]} \right\}^{1/(1+\beta)},$$

$\beta > -1$; $\Gamma(z)$ — гамма-функция

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du. \quad (8.8)$$

Таким образом, при $\beta = 0$ ПРВ (8.7) — нормальная, поскольку $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$; $\Gamma(3/2) = \Gamma(1 + 1/2) = (1/2)\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$; $c_1(0) = 1/\sqrt{2\pi}$; $c_2(0) = 1/2$; при $\beta = 1$ — лапласова, поскольку здесь $\Gamma(3) = 2! = 2$; $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$; $c_1(1) = 1/\sqrt{2}$; $c_2(1) = \sqrt{2}$. Если $\beta \rightarrow -1$, то (8.7) стремится к равномерному распределению. На рис. 8.3 изображены ПРВ $W(x)$ при $\beta = -0,5$; $-0,75$; $-0,99$ при $\sigma = 1$.

В табл. 8.1 приведены значения c_1 и c_2 в зависимости от β .

8.2. Обнаружение детерминированных сигналов

Пример 8.1. Найти алгоритм обнаружения постоянного сигнала величиной A , $A > 0$ при негауссовском шуме, имеющим ПРВ $W(x)$,

когда гипотезы H_0 и H_1 имеют вид

$$\begin{aligned} H_0 : \quad x[n] &= w[n]; \\ H_1 : \quad x[n] &= A + w[n], \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Решение. Наблюдатель принимает гипотезу H_1 , если ОП $\Lambda(\mathbf{X}_n)$ превышает порог:

$$\Lambda(\mathbf{X}_n) = \frac{W(\mathbf{X}_n | H_1)}{W(\mathbf{X}_n | H_0)} > \gamma,$$

где $\mathbf{X}_n = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})^T$.

По предположению, отсчеты $x[n] = x_n$ независимы, поэтому ОП записывается как отношение произведений

$$\Lambda(\mathbf{X}_n) = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} W(x_n | H_1)}{\prod_{n=0}^{N-1} W(x_n | H_0)} = \frac{\prod_{n=0}^{N-1} W(x_n - A)}{\prod_{n=0}^{N-1} W(x_n)} = \prod_{n=0}^{N-1} \frac{W(x_n - A)}{W(x_n)}.$$

Таким образом, принимается гипотеза H_1 , если

$$\ln \Lambda(\mathbf{X}_n) = \sum_{n=0}^{N-1} \ln \frac{W(x_n - A)}{W(x_n)} > \ln \gamma = \gamma'. \quad (8.9)$$

Если положить

$$g(x) = \ln[W(x - A)/W(x)],$$

то гипотеза H_1 будет приниматься при условии

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(x_n) > \gamma'. \quad (8.10)$$

Если ПРВ $W(x)$ нормальная, как в (8.3), то

$$g(x) = \ln \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - A)^2\right]}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]} = \frac{Ax}{\sigma^2} - \frac{A^2}{2\sigma^2}. \quad (8.11)$$

Таким образом, при нормальной ПРВ функция $g(x)$ — линейная, и правило решения (8.10) принимает вид

$$\frac{A}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x_n - N \frac{A^2}{2\sigma^2} > \gamma',$$

или

$$\bar{x} > \gamma'', \quad (8.12)$$

где $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n$ — выборочное среднее; $\gamma'' =$
 $= \frac{A}{2} + \frac{\sigma^2}{NA} \gamma'.$

В общем случае функция $g(x)$ является нелинейной. Получим значения этой функции, когда ПРВ $W(x)$ — распределение Лапласа (8.2). Тогда

$$g(x) = \ln \frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x - A|\right)}{\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x|\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sigma} (|x| - |x - A|).$$

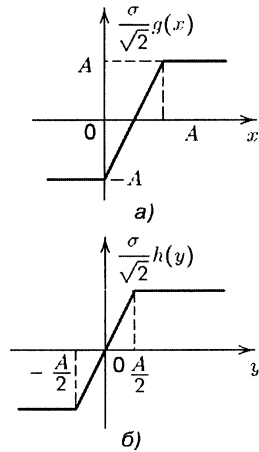


Рис. 8.4

График этой функции изображен на рис. 8.4,а.

Если ввести отсчет $y_n = x_n - A/2$, когда при H_0 $E(y_n) = -A/2$; а при H_1 $E(y_n) = A/2$, то нелинейность становится симметричной, так что по (8.10) принимается гипотеза H_1 , если

$$\sum_{n=0}^{N-1} g(y_n + A/2) > \gamma',$$

или

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(y_n) > \gamma',$$

где $h(y) = g(y + A/2) = \ln \frac{W(y - A/2)}{W(y + A/2)}.$

Таким образом, при распределении Лапласа (8.2) нелинейность $h(y)$ принимает вид рис. 8.4,б.

Схема обнаружения постоянного сигнала изображена на рис. 8.5.

Нелинейность приводит к амплитудному ограничению, значительных по амплитуде отсчетов. Без ограничителя вероятность обнаружения Q_d уменьшилась бы значительно.

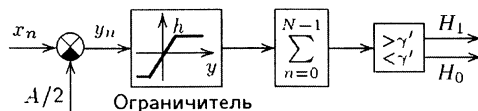


Рис. 8.5

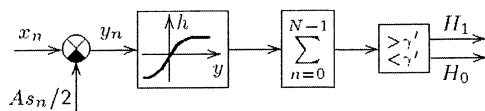


Рис. 8.6

Пример 8.2. Пусть наблюдается аддитивная смесь, такая что

$$\begin{aligned} H_0: & \quad x_n = w_n; \\ H_1: & \quad x_n = As_n + w_n \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $A > 0$, s_n — известные отсчеты сигнала. Найти алгоритм обнаружения сигнала известной формы.

Решение. Как и предыдущем примере, принимается гипотеза H_1 , если

$$\sum_{n=0}^{N-1} g_s(x_n) > \gamma', \quad (8.13)$$

где

$$g_s(x) = \ln \frac{W(x - As_n)}{W(x)}. \quad (8.14)$$

Полагая $y_n = x_n - As_n/2$, получим условия принятия гипотезы H_1 :

$$\sum_{n=0}^{N-1} h_s(y_n) > \gamma', \quad (8.15)$$

где

$$h_s(x) = \frac{W(y - As_n/2)}{W(y + As_n/2)}. \quad (8.16)$$

Снова пришли к симметричному ограничению, как показано на рис. 8.6.

Вычисление ВЛТ Q_0 и вероятности обнаружения Q_d по статистике (8.14) затруднено из-за нелинейного характера функции $h_s(y)$. Поэтому, как правило, рассматривается асимптотический случай слабого сигнала, когда $A \ll 1$. При этом функции $g_s(x)$ (8.14) представляются линейным членом (отрезком) ряда Маклорена в точке $A = 0$.

Положим

$$g_s = \ln \frac{W(x - As_n)}{W(x)} = \ln W(x - As_n) - \ln W(x).$$

Тогда

$$g_s(x) \approx \ln \left. \frac{W(x - As_n)}{W(x)} \right|_{A=0} + \left. \frac{1}{W(z)} W'_A(z) \right|_{z=x-As_n, A=0} \cdot A =$$

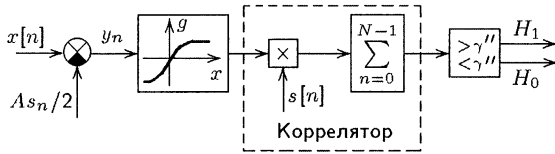


Рис. 8.7

$$= 0 + \frac{1}{W(x)} W'_z z'_A|_{A=0} \cdot A = \frac{1}{W(x)} \frac{dW}{dx}(-s_n)A = -B(x)As_n, \quad (8.17)$$

$$\text{где } B(x) = \frac{1}{W(x)} \frac{dW(x)}{dx}.$$

Таким образом, принимается гипотеза H_1 , если

$$\sum_{n=0}^{N-1} g_s(x_n) \approx - \sum_{n=0}^{N-1} B(x_n)As_n > \gamma_1,$$

или эквивалентно

$$T(\mathbf{X}_n) = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{W(x_n)} \frac{dW(x_n)}{dx_n} s_n > \gamma'', \quad (8.18)$$

где $\gamma'' = \gamma'/A$, $A > 0$.

Обнаружитель со статистикой $T(\mathbf{X}_n)$ (8.18) называется локально оптимальным (ЛО-обнаружитель), его схема изображена на рис. 8.7, где

$$g(x) = - \frac{1}{W(x)} \frac{dW(x)}{dx}. \quad (8.19)$$

Нетрудно показать, что если ПРВ $W(x)$ является четной функцией, то функция $g(x)$ (8.19) будет функцией нечетной, когда $g(-x) = -g(x)$.

В частном случае, когда помеха распределена по нормальному закону (8.3), то

$$g(x) = - \frac{1}{W(x)} \frac{dW(x)}{dx} = - \frac{d \ln W(x)}{dx} = - \frac{d}{dx} \ln \left(\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right) = \frac{x}{\sigma^2}.$$

Тогда по (8.18) получим статистику

$$T(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]s[n],$$

которая является линейной функцией наблюдаемых отсчетов $x[n]$ и схема рис. 8.7 вырождается просто в коррелятор.

Найдем ПРВ статистики (8.18)

$$T(\mathbf{X}_n) = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{d \ln W(x_n)}{dx_n} s_n. \quad (8.20)$$

На основании центральной предельной теоремы будем полагать, что статистика $T(\mathbf{X}_n)$ асимптотически имеет нормальное распределение, поэтому остается найти ее среднее значение и дисперсию, как при гипотезе H_0 , так и при гипотезе H_1 .

При гипотезе H_0 находим среднее значение

$$\begin{aligned} E \left[\frac{d \ln W(x_n)}{dx_n} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln W(x)}{dx} W(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW(x)}{dx} dx = \\ &= W(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $E[T(\mathbf{X}_n) \mid H_0] = 0$.

Найдем дисперсию статистики $T(\mathbf{X}_n)$:

$$D(T(\mathbf{X}_n) \mid H_0) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 D \left[\frac{d \ln W(x_n)}{dx_n} \right].$$

В силу нулевого среднего значения статистики $T(\mathbf{X}_n)$ ее дисперсия равна второму начальному моменту:

$$\begin{aligned} D \left[\frac{d \ln W(x_n)}{dx_n} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d \ln W(x_n)}{dx_n} \right)^2 W(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{W(x)} \left(\frac{dW(x)}{dx} \right)^2 dx = i(A). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$D[T(\mathbf{X}_n) \mid H_0] = i(A) \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 = i(A) \mathcal{E}_1.$$

При гипотезе H_1

$$E \left[- \frac{d \ln W(x_n)}{dx_n} \right] = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln W(x)}{dx} W(x - A s_n) dx.$$

Используя разложение, аналогичное (8.17), получим

$$W(x - A s_n) \approx W(x) - \frac{dW(x)}{dx} A s_n.$$

С учетом этого разложения находим

$$E \left[- \frac{d \ln W(x_n)}{dx_n} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln W(x)}{dx} W(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln W(x)}{dx} \frac{W(x)}{dx} A s_n dx = \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dW(x)}{dx} dx + A s_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{W(x)} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx = A s_n i(A).
\end{aligned}$$

Таким образом, среднее значение статистики

$$E(T(\mathbf{X}_n) | H_1) = A i(A) \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 = A \mathcal{E}_1 i(A).$$

Найдем дисперсию статистики

$$D[T(\mathbf{X}_n) | H_1] = \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 D \left(\frac{d \ln W(x)}{dx} \right).$$

Здесь второй начальный момент

$$\begin{aligned}
m_2 &= E \left[\left(\frac{d \ln W(x)}{dx} \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d \ln W(x)}{dx} \right)^2 W(x - A s_n) dx \approx \\
&\approx \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d \ln W(x)}{dx} \right)^2 \left[W(x) - \frac{dW(x)}{dx} A s_n \right] dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d \ln W(x)}{dx} \right)^2 W(x) dx - A s_n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d \ln W(x)}{dx} \right)^2 \frac{dW(x)}{dx} dx.
\end{aligned}$$

Первое слагаемое равно $i(A)$, вторым можно пренебречь при $A \ll 1$. Следовательно,

$$m_2 = E \left[\left(\frac{d \ln W(x)}{dx} \right)^2 \right] \approx i(A).$$

Тогда дисперсия с учетом малости A

$$D \approx m_2 - m_1^2 = i(A) - A^2 s_n^2 i^2(A) \approx i(A).$$

Таким образом,

$$D[T(\mathbf{X}_n) | H_1] = i(A) \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 = \mathcal{E}_1 i(A) = D[T(\mathbf{X}_n) | H_0].$$

В результате получаем

$$T(\mathbf{X}_n) \sim \begin{cases} N(0; \mathcal{E}_1 i(A)) & \text{при } H_0; \\ N(A \mathcal{E}_1 i(A); \mathcal{E}_1 i(A)) & \text{при } H_1. \end{cases} \quad (8.21)$$

Можно показать, что величина $i(A)$ является информацией по Фишеру.

Найдем характеристики обнаружения, в частности, ВЛТ Q_0 имеет вид:

$$Q_0 = P\{T > \gamma'' \mid H_0\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma''}^{\infty} e^{-u^2/2\sigma^2} du,$$

где $\sigma^2 = \mathcal{E}_1 i(A)$. В результате получим

$$Q_0 = Q\left(\frac{\gamma''}{\sigma}\right); \quad \frac{\gamma''}{\sigma} = Q^{-1}(Q_0).$$

Вероятность обнаружения

$$Q_d = P\{T > \gamma'' \mid H_1\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma''}^{\infty} e^{-(u-m_T)^2/2\sigma^2} du,$$

где $m_T = A\mathcal{E}_1 i(A)$. Поэтому

$$Q_d = Q\left(\frac{\gamma'' - m_T}{\sigma}\right) = Q[Q^{-1}(Q_0) - \sqrt{d^2}]; \quad (8.22)$$

$$d^2 = \frac{m_T^2}{\sigma^2} = \frac{A^2 \mathcal{E}_1^2 i^2(A)}{\mathcal{E}_1 i(A)} = A^2 \mathcal{E}_1 i(A) = \mathcal{E} i(A). \quad (8.23)$$

где $\mathcal{E} = A^2 \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2$ — энергия сигнала; d^2 — ОСШ.

Пример 8.3. Найти статистику $T(\mathbf{X}_n)$ при обнаружении постоянного сигнала в лапласовом шуме.

Решение. По (8.18) при $s_n = 1$ находим, что принимается гипотеза H_1 , если

$$T(\mathbf{X}_n) = - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{W(x_n)} \frac{d \ln W(x_n)}{dx_n} > \gamma''. \quad (8.24)$$

По (8.2) получим

$$g(x) = - \frac{1}{W(x_n)} \frac{dW(x)}{dx} = - \frac{d \ln W(x)}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{d|x|}{dx}.$$

Учтем равенство

$$\frac{d|x|}{dx} = \operatorname{sgn} x,$$

тогда получим выражение для статистики

$$T(\mathbf{X}_n) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{sgn} x_n. \quad (8.25)$$

Таким образом, получили знаковый обнаружитель — обнаружитель слабого сигнала попросту суммирует знаки наблюдаемых выбо-

рок. При этом нелинейность

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}g(x) = \frac{d|x|}{dx} = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ -1 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

что соответствует предельному ограничителю входного сигнала.

Характеристики обнаружителя находятся по (8.22) и (8.23). Найдем величину $i(A)$:

$$\begin{aligned} i(A) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{W(x_n)} \left(\frac{dW(x)}{dx} \right)^2 dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{dW}{dx} dx = - \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d|x|}{dx} \frac{dW}{dx} dx = \\ &= - \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} x \frac{dW}{dx} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{dW}{dx} dx - \int_0^{\infty} \frac{dW}{dx} dx \right] = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sigma} 2W(0) = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} 2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} = \frac{2}{\sigma^2}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Тогда ОСШ $d^2 = \mathfrak{E}i(A) = \frac{2\mathfrak{E}}{\sigma^2} = \frac{2A^2}{\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} s_n = \frac{2NA^2}{\sigma^2}$, так как здесь $s_n = 1$.

При нормальном распределении (8.3) $g(x) = x/\sigma^2$, тогда

$$i(A) = - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{dW}{dx} dx = - \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{dW}{dx} dx = \frac{1}{\sigma^2}; \quad i(A) = \frac{1}{\sigma^2}. \quad (8.27)$$

Следовательно,

$$d^2 = NA^2/\sigma^2,$$

т.е. ОСШ при нормальной ПРВ в два раза меньше, чем при лапласовом распределении.

Таким образом, асимптотически характеристики обнаружителя при лапласовом шуме лучше, чем при гауссовском шуме.

Можно показать, что и в общем случае, среди всех ПРВ $W(x)$ при нулевом среднем значении и дисперсии, равной единице, величина $i(A)$ минимальна при гауссовском ПРВ (8.3). Для доказательства воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d \ln W(x)}{dx} x W(x) dx \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d \ln W(x)}{dx} \right)^2 W(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} x^2 W(x) dx.$$

Это неравенство переходит в равенство тогда и только тогда, если

$$\frac{d \ln W(x)}{dx} = kx, \quad k = \text{const}.$$

Для гауссовской ПРВ последнее соотношение выполняется при $k = -1$. Утверждение доказано. Следует отметить, что, как было доказано в [4], гауссовское распределение обладает максимальной энтропией $H = \ln(\sigma\sqrt{2\pi e})$, что согласуется с минимальным значением информации по Фишеру. Из неравенства Коши–Буняковского следует соотношение $i(A) \geq 1/\sigma^2$ при $\sigma^2 \neq 1$.

8.3. Обнаружение детерминированных сигналов с неизвестными параметрами

Пусть необходимо проверить гипотезы

$$\begin{aligned} H_0: & \quad x_n = w_n; \\ H_1: & \quad x_n = As_n + w_n, \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где A — неизвестная амплитуда; отсчеты $s_n = s[n]$ известны; $w_n = w[n]$ — негауссовский шум с известной ПРВ $W(w_n)$.

По критерию ОП $\Lambda(\mathbf{X}_n)$ принимается гипотеза H_1 , если

$$\Lambda(\mathbf{X}_n) = \frac{W(\mathbf{X}_n, \hat{A} | H_1)}{W(\mathbf{X}_n | H_0)} > \gamma, \quad (8.28)$$

где \hat{A} — оценка максимального правдоподобия при гипотезе H_1 ;

$$W(\mathbf{X}_n; A | H_1) = \prod_{n=0}^{N-1} W(x_n - As_n); \quad W(\mathbf{X}_n | H_0) = \prod_{n=0}^{N-1} W(x_n). \quad (8.29)$$

Следовательно,

$$2 \ln \Lambda(\mathbf{X}_n) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} \ln \frac{W(x_n - \hat{A}s_n)}{W(x_n)} = 2 \max_A \sum_{n=0}^{N-1} \ln \frac{W(x_n - As_n)}{W(x_n)}. \quad (8.30)$$

Можно показать, что асимптотически (при больших N) справедливы соотношения

$$2 \ln \Lambda(\mathbf{X}_n) \sim \begin{cases} \chi_{1,2}^2 & \text{при } H_0; \\ \chi_1^2 & \text{при } H_1. \end{cases} \quad (8.31)$$

где $\lambda = A^2 I(A=0)$, $I(A)$ — информация Фишера.

Статистика Рао не требует вычисления оценки \hat{A} , при гипотезе H_1 статистика Рао имеет вид

$$T_R(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{I(A=0)} \left(\left. \frac{\partial \ln W(\mathbf{X}_n, A | H_1)}{\partial A} \right|_{A=0} \right)^2.$$

С учетом (8.29) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln W(\mathbf{X}_n, A | H_1)}{\partial A} &= \frac{\partial}{\partial A} \sum_{n=0}^{N-1} \ln W(x_n - As_n) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{W(z)} \frac{dW(z)}{dz} \bigg|_{z=x_n - As_n} (-s_n). \end{aligned} \quad (8.32)$$

Тогда получим статистику Рао в виде

$$T_R(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{I(A=0)} \left(- \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{W(x_n)} \frac{dW(x_n)}{dx_n} s_n \right)^2. \quad (8.33)$$

Статистика Рао отличается от статистики локально оптимального обнаружителя (8.18) наличием квадрата статистики $T(\mathbf{X}_n)$ (8.18) и нормировочным делителем $I(A=0)$, причем

$$I(A) = -E \left[\frac{\partial^2 \ln W(\mathbf{X}_n, A | H_1)}{\partial A^2} \right] = I(A=0) = i(A) \mathcal{E}_1, \quad (8.34)$$

где

$$i(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{W(\mathbf{X}_n)} \frac{dW(x)}{dx} dx; \quad \mathcal{E}_1 = \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2.$$

Таким образом, принимается гипотеза H_1 , если

$$T_R(\mathbf{X}_n) = \frac{[T(\mathbf{X}_n)]^2}{i(A) \mathcal{E}_1} > \gamma', \quad (8.35)$$

где $T(\mathbf{X}_n)$ — статистика (8.18).

Асимптотические характеристики обнаружения находятся по (8.31) с коэффициентом нецентральности

$$\lambda = A^2 \mathcal{E}_1 i(A) = \mathcal{E} i(A).$$

Пример 8.4. Обнаружение постоянного сигнала неизвестного значения A в лапласовом шуме.

Найти критерий обнаружения по ОП, используя соотношение (8.30), при $s_n = 1$.

Решение. Согласно (8.30) требуется максимизировать по множеству A ПРВ

$$W(\mathbf{X}_n, A | H_1) = \left(\frac{1}{2\sigma^2} \right)^{N/2} \exp \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - A| \right). \quad (8.36)$$

Максимизация функции (8.36) эквивалентна минимизации суммы

$$J(A) = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - A|.$$

Чтобы упростить дальнейший вывод, предположим, что число N — четное, и заметим, что функция $J(A)$ дифференцируема за исключением точек $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$. Исключая эти точки, получим

$$\frac{dJ(A)}{dA} = - \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{sgn}(x_n - A).$$

Замечая, что $\operatorname{sgn}(x_n - A) = 1$ при $A < x_n$ и $\operatorname{sgn}(x_n - A) = -1$ при $A > x_n$, приходим к выводу, что равенство $\frac{dJ}{dA} = 0$ достигается, если в качестве A берется медиана отсчетов данных x_n $A = x_{\text{мед}}$. Таким образом, половина отсчетов имеет отрицательный знак: $\operatorname{sgn}(x_n - A) = -1$, а другая половина имеет положительный знак $\operatorname{sgn}(x_n - A) = 1$.

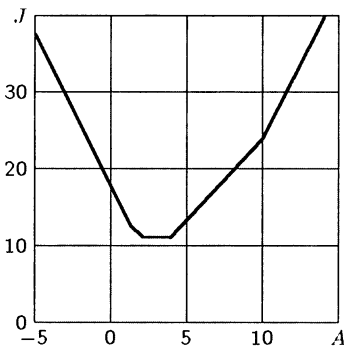


Рис. 8.8

Следует отметить, что значение медианы не единственно. Например, если $x_n = 1, 2, 4, 10$, тогда медиана лежит между 2 и 4.

Функция, подлежащая минимизации, изображена на рис. 8.8.

Можно убедиться, что $J(A)$ достигает минимума при $2 < A < 4$ и $J(A) = 11$.

Таким образом, оценкой максимального правдоподобия величины A является медиана, т.е. $\hat{A} = x_{\text{мед}}$ и ОП

имеет вид

$$\ln \Lambda(\mathbf{X}_n) = \ln \frac{W(\mathbf{X}_n, x_{\text{мед}} | H_1)}{W(\mathbf{X}_n)} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sigma} \sum_{n=0}^{N-1} (|x_n - x_{\text{мед}}| - |x_n|) > \ln \gamma.$$

Можно упростить статистику, если ранжировать наблюдаемые отсчеты. Пусть, например, эти отсчеты имеют вид $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$, где x_0 — наименьшее значение отсчетов $x[n]$, а x_{N-1} — наибольшее значение отсчетов. Если N — четное число, то в качестве медианы $x_{\text{мед}}$ можно взять среднее между отсчетами в точках $N/2 - 1$ и $N/2$, тогда

$$x_{\text{мед}} = \frac{x_{N/2-1} + x_{N/2}}{2}.$$

Тогда статистика приводится к виду

$$\begin{aligned}
 2 \ln \Lambda(x_n) &= \frac{\sqrt{8}}{\sigma} \sum_{n=0}^{N-1} \left[|x_n| - \left| x_n - \frac{1}{2}(x_{N/2-1} + x_{N/2}) \right| \right] = \\
 &= \frac{\sqrt{8}}{\sigma} \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ |x_n| + \left[x_n - \frac{1}{2}(x_{N/2-1} + x_{N/2}) \right] \right\} + \\
 &+ \frac{\sqrt{8}}{\sigma} \sum_{n=N/2}^{N-1} \left\{ |x_n| - \left[x_n - \frac{1}{2}(x_{N/2-1} + x_{N/2}) \right] \right\} = \\
 &= \frac{\sqrt{8}}{\sigma} \sum_{n=0}^{N/2-1} (|x_n| + x_n) + \frac{\sqrt{8}}{\sigma} \sum_{n=N/2}^{N-1} (|x_n| - x_n).
 \end{aligned}$$

Если $x_{\text{мед}} > 0$, то все отсчеты $\{x_{N/2}, x_{N/2+1} \dots x_{N-1}\}$ положительны, следовательно, второе слагаемое равно нулю, и вклад в статистику дают лишь положительные слагаемые первого слагаемого. Аналогично, при $x_{\text{мед}} < 0$ только отрицательные слагаемые второй суммы остаются в статистике.

Окончательно получим

$$2 \ln \Lambda(x_n) = \begin{cases} \frac{\sqrt{32}}{\sigma} \sum_{\{n: 0 < x_n < x_{\text{мед}}\}} x_n & \text{при } x_{\text{мед}} > 0; \\ -\frac{\sqrt{32}}{\sigma} \sum_{\{n: x_{\text{мед}} < x_n < 0\}} x_n & \text{при } x_{\text{мед}} < 0. \end{cases}$$

Обнаружитель с точностью до постоянного множителя суммирует величины тех отсчетов, которые находятся в интервале между нулем и медианой. Таким образом, если медиана положительна, то суммируются значения x_n от нуля до $x_{\text{мед}}$ и отбрасываются отсчеты, превышающие по своему значению величину медианы. Любые выбросы не имеют значения, так как любой отсчет, больший медианы, может быть сколь угодно большим и не оказывать действие на сумму. В то время как при гауссовском шуме суммируются все отсчеты.

Асимптотические характеристики обнаружения ясны из (8.31):

$$2\Lambda(x_n) \approx \begin{cases} \chi^2_{l_2} & \text{при } H_0; \\ \chi^2_{l_2}(\lambda) & \text{при } H_1, \end{cases} \quad (8.37)$$

где показатель нецентральности

$$\lambda = A^2 I[A = 0] = A^2 i(A) \sum_{n=0}^{N-1} s_n^2 = 2N \frac{A^2}{\sigma^2},$$

так как по (8.26) $i(A) = 2/\sigma^2$.

Пример 8.5. Статистика Рао для обнаружения постоянного сигнала с неизвестным значением A в лапласовом шуме.

По (8.35) запишем статистику Рао в виде

$$T_R(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{2N/\sigma^2} \left(- \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{W(x_n)} \frac{dW(x_n)}{dx_n} \right)^2 > \gamma',$$

так как здесь $s_n = 1$, $i(A) = 2/\sigma^2$ (см. (8.26)).

С учетом закона Лапласа (8.2) получим

$$-\frac{1}{W(x_n)} \frac{dW(x_n)}{dx_n} = -\frac{d \ln W(x_n)}{dx_n} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \frac{d|x_n|}{dx_n} = \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \operatorname{sgn} x_n,$$

при этом исключается $x_n = 0$, при котором производная не существует. Поскольку вероятность получить точно значение $x_n = 0$ равна нулю, то можно не считаться с этой возможностью.

Следовательно, статистика Рао принимает вид

$$T_R(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{2N/\sigma^2} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \operatorname{sgn} x_n \right)^2 = N \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{sgn} x_n \right)^2. \quad (8.38)$$

С точностью до постоянного множителя по статистике Рао необходимо сначала вычислить среднее значение знаков наблюдаемых отсчетов и затем это число возвести в квадрат. Асимптотические характеристики обнаружения те же, что и при (8.37). Но по сравнению с алгоритмом при (8.37) обнаружитель Рао суммирует не отсчеты, а лишь их знаки. Это также позволяет избежать влияния выбросов суммы.

Сформулируем полезную в дальнейшем теорему [24].

Теорема 8.1. Статистика Рао для линейной модели сигнала в негаусовском шуме.

Пусть уравнение наблюдения имеет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{W},$$

где \mathbf{H} — известная $N \times p$ -матрица наблюдения ранга p , $N > p$; $\boldsymbol{\theta}$ — $(p \times 1)$ -вектор параметров, \mathbf{W} — $(N \times 1)$ -вектор шума, координаты которого — одинаково распределенные СВ с известной ПРВ $W(w_n)$.

Испытываются две гипотезы.

$$H_0 : \quad \boldsymbol{\theta} = 0;$$

$$H_1 : \quad \boldsymbol{\theta} \neq 0.$$

Статистика Рао при принятии гипотезы H_1 подчиняется нера-

венству

$$T_R(\mathbf{X}_n) = \frac{\mathbf{Y}^T \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y}}{i(A)} > \gamma', \quad (8.39)$$

где $\mathbf{Y} = \{y[0], y[1] \dots y[N-1]\}^T$, причем $y[n] = g(x[n])$;

$$g(z) = -\frac{1}{W(z)} \frac{dW(z)}{dz}; \quad (8.40)$$

$$i(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{W(z)} \left(\frac{dW(z)}{dz} \right)^2 dz. \quad (8.41)$$

Асимптотически (при $N \rightarrow \infty$) характеристики обнаружения имеют вид

$$Q_0 = Q_{\chi_p^2(\lambda)}(\gamma'); \quad Q_d = Q_{\chi_p'^2(\lambda)}(\gamma'), \quad (8.42)$$

где показатель нецентральности

$$\lambda = i(A) \boldsymbol{\theta}_1^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}_1; \quad (8.43)$$

$\boldsymbol{\theta}_1$ — истинное значение параметра $\boldsymbol{\theta}$ при гипотезе H_1 .

Заметим, что статистика Рао для сигнала известной формы с неизвестной амплитудой A получена ранее и имеет вид (8.35).

Пример 8.6. Обнаружение гармонического сигнала с неизвестной амплитудой и фазой в негауссовском шуме.

Решение. Проблема обнаружения следующая:

$$\begin{aligned} H_0: & \quad x[n] = w[n]; \\ H_1: & \quad x[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \Phi) + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где A и Φ — неизвестные параметры, $A > 0$, $\Phi \in (0, 2\pi)$; f_0 — известная частота, $0 < f_0 < 1/2$; $w[n]$ — отсчеты шума, имеющего обобщенную гауссовскую ПРВ (8.7).

В линейной модели наблюдения в данном случае имеем

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2\pi f_0 & \sin 2\pi f_0 \\ \dots & \dots \\ \cos 2\pi f_0(N-1) & \sin 2\pi f_0(N-1) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

где $\alpha_1 = A \cos \Phi$; $\alpha_2 = -A \sin \Phi$.

Поскольку $0 < f_0 < 1/2$, то, следовательно, $\mathbf{H}^T \mathbf{H} \approx (N/2) \mathbf{I}$, где \mathbf{I} — единичная матрица. Тогда по (8.39)

$$\begin{aligned} T_R(\mathbf{X}_n) &= \frac{2\mathbf{Y}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{Y}}{Ni(A)} = \\ &= \frac{2}{Ni(A)} \left[\left(\sum_{n=0}^{N-1} y[n] \cos 2\pi f_0 n \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{N-1} y[n] \sin 2\pi f_0 n \right)^2 \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{Ni(A)} \left| \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-i2\pi f_0 n} \right|^2 = \frac{2}{i(A)} \Gamma_y(f_0), \quad (8.44)$$

где $\Gamma_y(f_0)$ — периодограмма в точке $f = f_0$.

Чтобы найти отсчеты $y[n]$, используем значение функции $g(z)$ (8.40) и ПРВ (8.7):

$$g(z) = -\frac{1}{W(z)} \frac{dW(z)}{dz} = -\frac{d \ln W(z)}{dz} = c_2(\beta) \frac{d}{dz} \left| \frac{z}{\sigma} \right|^{2/(1+\beta)}.$$

Запишем производную

$$\frac{d|z|^{2/(1+\beta)}}{dz} = \begin{cases} \frac{d}{dz} z^{2/(1+\beta)} & \text{при } z > 0; \\ \frac{d}{dz} (-z)^{2/(1+\beta)} & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Взяв производные, получим

$$\frac{d|z|^{2/(1+\beta)}}{dz} = \begin{cases} \frac{2}{1+\beta} z^{(1-\beta)/(1+\beta)} & \text{при } z > 0; \\ -\frac{2}{1+\beta} (-z)^{(1-\beta)/(1+\beta)} & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

Окончательно находим

$$\frac{d|z|^{2/(1+\beta)}}{dz} = \frac{2}{1+\beta} |z|^{(1-\beta)/(1+\beta)} \operatorname{sgn} z.$$

Таким образом,

$$g(z) = \frac{2c_2(\beta)}{(1+\beta)(\sigma^2)^{1/(1+\beta)}} |z|^{(1-\beta)/(1+\beta)} \operatorname{sgn} z.$$

Следовательно,

$$y[n] = \frac{2}{1+\beta} \left\{ \frac{\Gamma\left[\frac{3}{2}(1+\beta)\right]}{\sigma^2 \Gamma\left(\frac{1+\beta}{2}\right)} \right\}^{1/(1+\beta)} |x[n]|^{(1-\beta)/(1+\beta)} \operatorname{sgn} x[n]. \quad (8.45)$$

Нормализованная нелинейная функция $h(x)$ принимает вид

$$h(x) = |x|^{(1-\beta)/(1+\beta)} \operatorname{sgn} x, \quad (8.46)$$

Графики функции $h(x)$ изображены на рис. 8.9.

Можно показать, что функция $i(A)$ (8.41) имеет вид [24]

$$i(A) = \frac{4/\sigma^2}{(1+\beta)^2} \frac{\Gamma\left(\frac{3+\beta}{2}\right) \Gamma\left[\frac{3(1-\beta)}{2}\right]}{\Gamma^2\left(\frac{1+\beta}{2}\right)}. \quad (8.47)$$

Схема обнаружителя Рао гармонического сигнала с неизвестной амплитудой и фазой изображена на рис. 8.10.

Характеристики обнаружителя являются частным случаем (8.42) при $p = 2$:

$$Q_0 = Q_{\chi^2_2(\lambda)}(\gamma') = e^{-\gamma'/2}; \quad (8.48)$$

$$Q_d = Q_{\chi^2_2(\lambda)}(\gamma'). \quad (8.49)$$

Показатель нецентральности

$$\begin{aligned} \lambda &= i(A) \|\mathbf{H}\mathbf{\theta}_1\|^2 \approx i(A) \left[\sum_{n=0}^{N-1} \alpha_1^2 \cos^2(2\pi f_0 n) + \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_2^2 \sin^2(2\pi f_0 n) \right] \approx \\ &\approx i(A) \frac{N}{2} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) = \frac{NA^2 i(A)}{2}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

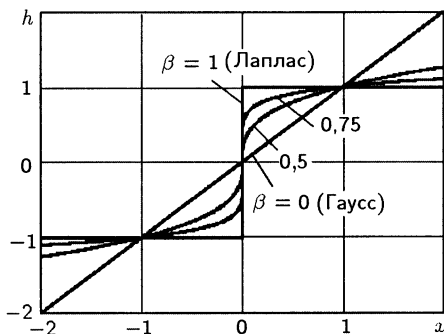
По (8.49) следует, что на вероятность обнаружения Q_d вид ПРВ оказывает влияние только через функцию $i(A)$. Для гауссовского шума согласно (8.27) $i(A) = 1/\sigma^2$ и показатель нецентральности $\lambda = NA^2/2\sigma^2$. С ростом λ увеличивается вероятность обнаружения Q_d . Поэтому показателем выигрыша при обнаружении в негауссовском шуме по сравнению с гауссовским является величина $R = \sigma^2 i(A)$, или в децибелах

$$R_{\text{дБ}} = 10 \lg \sigma^2 i(A) = 10 \lg \frac{4}{(1+\beta)^2} \frac{\Gamma\left[\frac{3(1+\beta)}{2}\right] \Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1+\beta}{2}\right)}.$$

График $R(\beta)_{\text{дБ}}$ изображен на рис. 8.11 при $-1 < \beta < 3$. Минимум этого показателя, как и следовало ожидать, соответствует $\beta = 0$ (при гауссовском шуме).



Рис. 8.10



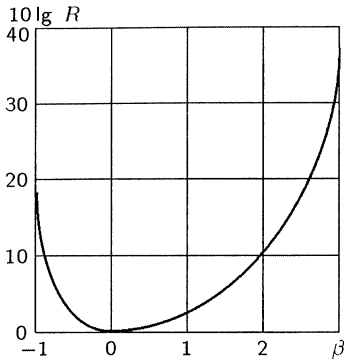


Рис. 8.11

Если в статистике $T(\mathbf{x}_N)$ (8.18) оставить множителем амплитуду A , то получим

$$T(\mathbf{x}_n) = A \sum_{i=1}^n g(x_i) s_i. \quad (8.51)$$

Пусть $A = \gamma/\sqrt{n}$, где γ — произвольная положительная ограниченная постоянная, пропорциональная ОСШ. Тогда статистику (8.51) можно записать в виде

$$T(\mathbf{x}_n) = \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n g(x_i) s_i. \quad (8.52)$$

После разложения в ряд Маклорена логарифм ОП (8.9) принимает вид [43, 54]

$$\ln \Lambda(\mathbf{x}_n) \approx \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n s_i g(x_i) - \frac{\gamma^2}{2} I_f P_s, \quad (8.53)$$

где $I_f = i(A)$ — информация Фишера; P_s — мощность сигнала,

$$P_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^2.$$

Обозначая $x_i = t_i/T$, $\Delta x_i = (t_{i+1} - t_i)/T = 1/n$, получим при $n \gg 1$ [43]

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^2(t_i) = \sum_{i=1}^n s^2(T x_i) \Delta x_i \approx \int_0^1 s^2(T x) dx = \frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt.$$

Прежде чем рассматривать асимптотику статистики (8.53), найдем параметры статистики

$$T(\mathbf{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n g(x_i) s_i. \quad (8.54)$$

При гипотезе H_0

$$I_f = E(g^2(x) | H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) W(x | H_0) dx;$$

$$E(g(x) | H_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) W(x | H_0) dx = 0.$$

Поэтому при гипотезе H_0

$$E[T(\mathbf{x}_n) | H_0] = 0; \quad D[T^2(\mathbf{x}_n) | H_0] = D(g | H_0) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^2 \sim I_f P_s.$$

Можно показать, что при гипотезе H_1 среднее значение статистики [43,54]

$$E[T(\mathbf{x}_n) | H_1] \approx \gamma I_f P_s; \quad D[T(\mathbf{x}_n) | H_1] \approx D[T(\mathbf{x}_n) | H_0] \approx I_f P_s.$$

В результате получаем асимптотические параметры статистики (8.53)

$$\ln \Lambda(\mathbf{X}_n) = \begin{cases} N(-\gamma^2 I_f P_s / 2; \gamma^2 I_f P_s) & \text{при } H_0; \\ N(\gamma^2 I_f P_s / 2; \gamma^2 I_f P_s) & \text{при } H_1. \end{cases} \quad (8.55)$$

При статистике (8.54) асимптотически оптимальное (АО) правило для обнаружения детерминированного сигнала $As(t)$ на фоне независимых помех с распределением $W_i(x, H_i)$ можно сформулировать следующим образом: при $n \gg 1$ принимается решение о наличии сигнала (справедлива гипотеза H_1), если

$$T(\mathbf{x}_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n g(x_i) s_i \geq C, \quad (8.56)$$

и в противном случае при $T(\mathbf{x}_n) < C$ принимается гипотеза H_0 (сигнал отсутствует).

Учтем асимптотическую гауссовость статистики $T(\mathbf{x}_n)$ и значения параметров этой статистики:

$$T(\mathbf{x}_n) \sim \begin{cases} N(0, I_f P_s) & \text{при } H_0; \\ N(\gamma I_f P_s, I_f P_s) & \text{при } H_1. \end{cases} \quad (8.57)$$

В результате получим характеристики обнаружения. В частности, ВЛТ имеет вид

$$\begin{aligned} Q_0 = \alpha = P\{T \geq C | H_0\} &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_C^\infty e^{-(z-m)^2/2\sigma} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{C/\sigma}^\infty e^{-z^2/2} dz = Q(\gamma/\sigma), \end{aligned}$$

где $m = 0$, $\sigma^2 = I_f P_s$. Следовательно, ВЛТ

$$Q_0 = \alpha = Q(C/\sqrt{I_f P_s}). \quad (8.58)$$

Вероятность обнаружения

$$Q_d = P\{T \geq C | H_1\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(C-m_1)/\sigma}^\infty e^{-z^2/2} dz =$$

$$= Q \left(\frac{\gamma' - \gamma I_f P_s}{\sqrt{I_f P_s}} \right) = Q \left(\frac{C - \gamma I_f P_s}{\sqrt{I_f P_s}} \right). \quad (8.59)$$

Найдем процентные точки

$$t_d = \frac{C - \gamma I_f P_s}{\sqrt{I_f P_s}} = Q^{-1}(Q_d); \quad t_\alpha = Q^{-1}(Q_0) = \frac{C}{\sqrt{I_f P_s}}.$$

Отсюда получим соотношение

$$t_d = t_\alpha - \gamma \sqrt{I_f P_s}, \quad (8.60)$$

или

$$\gamma = (t_\alpha - t_d) / \sqrt{I_f P_s}, \quad Q_0 < Q_d.$$

Запишем соотношения (8.59), (8.60) в виде

$$Q_d = Q[Q^{-1}(Q_0) - \gamma \sqrt{I_f P_s}]. \quad (8.61)$$

Таким образом, характеристики обнаружения асимптотически оптимального (АО) алгоритма (8.56) обнаружения детерминированного сигнала при фиксированном γ и $n \rightarrow \infty$ аналогичны характеристикам оптимального (по критерию Неймана–Пирсона) алгоритма обнаружения полностью известного сигнала (см. гл. 2, 3) (при той же постоянной γ), если величину $I_f P_s$ рассматривать как обобщенное ОСШ.

Действительно, при гауссовской помехе, когда $I_f = i(A) = 1/\sigma^2$ получим $I_f P_s = P_s/\sigma^2$, что совпадает с определением стандартного ОСШ. Структурная схема асимптотически оптимального (АО) обнаружителя изображена на рис. 8.12. Устройство обнаружения состоит из трех блоков: первый представляет собой безынерционный нелинейный преобразователь наблюдаемой выборки x в величину $g(x)$, второй блок — коррелятор, выполняющий операцию перемножения напряжения выхода первого блока и сигнального напряжения и операцию суммирования. Третий блок вслед за коррелятором предназначен для установки порога, и в случае его превышения выносится решение о наличии сигнала.

Устойчивость АО алгоритма обнаружения детерминированного сигнала. Предположим, что ПРВ помехи изменилась и возникла помеха с новой ПРВ $u_0(x | H_0)$ вместо $W_0(x | H_0)$, для которой АО алгоритм (8.56) асимптотически оптимален.

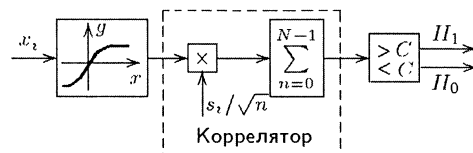


Рис. 8.12

Очевидно, что статистика (8.54), на которой основан алгоритм (8.56), асимптотически гауссова и в том случае, когда она принадлежит ПРВ $u_0(x | H_0)$. Изменяются лишь параметры асимптотического нормального распределения.

Новая статистика будет иметь вид, аналогичный (8.56) при замене функции $g(x_i)$ на функцию $f(x_i)$, где

$$f(x) = \frac{1}{u_0(x)} \frac{\partial}{\partial A} u_0(x, A)|_{A=0}. \quad (8.62)$$

Выразим коэффициент асимптотической оптимальной эффективности (АОЭ) старого алгоритма по отношению к новому при том, что ПРВ $W_0(x)$ и $u_0(x)$ симметричны относительно нуля, когда выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) u_0(x) dx = 0.$$

Коэффициент АОЭ имеет вид [43]

$$\text{АОЭ} = \rho = \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) u_0(x) dx \right)^2}{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) u_0(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x) u_0(x) dx}, \quad (8.63)$$

причем $\rho \leq 1$ и $\rho = 1$ при $g(x) \equiv f(x)$.

Пример 8.7. Пусть $g(x) = x/\sigma^2$, когда АО алгоритм совпадает с принятым алгоритмом, оптимальным при гауссовской аддитивной помехе

$$W_0(x | H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2},$$

и предположим, что линейный алгоритм используется для обнаружения детерминированного сигнала на фоне аддитивной помехи с распределением Лапласа с той же дисперсией σ^2 , когда

$$u_0(x | H_0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|/\sigma}.$$

В этом случае

$$f(x) = (\sqrt{2}/\sigma) \operatorname{sgn} x.$$

Найти АОЭ.

Решение. При лапласовой помехи АОЭ линейного алгоритма по отношению к АО алгоритму для этой (лапласовой) помехи находят

по (8.63):

$$\text{АОЭ}_{1.3} = \frac{\left(\frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\sqrt{2}|x|/\sigma} \operatorname{sgn} x dx \right)^2}{\frac{1}{\sigma^6} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{2}|x|/\sigma} dx \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\sqrt{2}|x|/\sigma} dx} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, АОЭ линейного алгоритма АО гауссовой помехе снижается в два раза при его использовании для обнаружения сигнала на фоне лапласовой помехи.

Задачи

8.1. Рассмотреть проблему обнаружения

$$\begin{aligned} H_0: & \quad x[n] = w[n]; \\ H_1: & \quad x[n] = A + w[n], \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где A — известно и $w[n]$ имеет ПРВ Коши

$$W(w) = \frac{1}{\pi(1+w^2)}, \quad -\infty < w < \infty.$$

Найти статистику Неймана-Пирсона и изобразить ее при нелинейности

$$g(x) = \ln \frac{w(x-A)}{w(x)}$$

при $A = 1$.

8.2. Пусть задана проблема обнаружения

$$\begin{aligned} H_0: & \quad x[n] = w[n]; \\ H_1: & \quad x[n] = As[n] + w[n], \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где A — неизвестная амплитуда, $A > 0$, $s[n]$ — известная форма сигнала; $w[n]$ — негауссовский шум с ПРВ $W(w_n)$. Показать, что локально наиболее мощный обнаружитель эквивалентен (8.18) с точностью до постоянного множителя.

8.3. Показать, что если ПРВ шума функция четная, тогда функция

$$g(x) = -\frac{1}{W(x)} \frac{dW(x)}{dx}$$

будет нечетной.

8.4 В условиях задачи 8.1 найти статистику Неймана-Пирсона при слабом сигнале, полагая $A > 0$. Изобразить схему обнаружителя.

8.5. Рассмотреть проблему обнаружения

$$\begin{aligned} H_0: & \quad x[n] = w[n]; \\ H_1: & \quad x[n] = A + w[n], \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где A — известная величина, $A > 0$, $w[n]$ — одинаково распределенные и независимые СВ с ПРВ $W(w_n)$, $w_n = w[n]$, причем $E(w_n) = 0$, $E(w_n^2) = \sigma^2$. Линейный обнаружитель принимает решение в пользу гипотезы H_1 на основе статистики выборочного среднего

$$T(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] > \gamma'.$$

Найти ВЛТ Q_0 и вероятность обнаружения Q_d для такого обнаружителя, используя центральную предельную теорему. Рассмотреть робастность данного обнаружителя, т.е. как изменяются его характеристики, если форма ПРВ $W(w_n)$ изменяется, а среднее значение и дисперсия остаются теми же.

Если w_n имеет лапласово распределение (8.2), то каковы максимальные потери этого обнаружителя при наличии слабого сигнала в случае обнаружителя Неймана-Пирсона примера 8.3.

8.6. Рассмотреть эффективность статистики $T(\mathbf{X}_n)$ (т.е. обнаружителя) для односторонней проблемы проверки гипотез

$$H_0 : \theta = 0;$$

$$H_1 : \theta > 0.$$

Принимается гипотеза H_1 , если $T(\mathbf{X}_n) > \gamma'$. Рассмотреть эффективность статистики T в случае слабо сигнальной модели при значительном объеме выборки N . Выбор между гипотезами $\theta = 0$ и $\theta > 0$ при большом объеме выборки определяется следующей величиной (эффективностью).

$$\xi(T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d\xi(T, \theta)^2}{N \text{var}(T, \theta)},$$

где $E(T, \theta)$ и $\text{var}(T, \theta)$ — соответственно среднее значение и дисперсия статистики T при усреднении с весом $W(\mathbf{X}_n, \theta)$. Для статистики (8.18) положить $\theta = A$ и $s[n] = 1$, чтобы найти эффективность. Затем, используя (8.21), определить соотношение ее с девиацией

$$d^2 = \frac{[E(T | H_1) - E(T | H_0)]^2}{\text{var}(T | H_0)}.$$

8.7. Как известно, асимптотическая относительная эффективность (АОЭ, англ. ARE — *asymptotic relative efficiency*) является критерием сравнения двух различных статистик для проблемы испытания аналогичной, проблеме задачи 8.6. АОЭ определяется как соотношение отсчетов, необходимых для достижения заданных ВЛТ Q_0 и вероятности обнаружения Q_d , когда объем выборки $N \rightarrow \infty$. Иначе АОЭ статистики T_2 по отношению к статистике T_1 определяется соотношением

$$\text{АОЭ}_{2,1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N_2},$$

где $N_1 < N_2$, так что $0 < \text{АОЭ}_{2,1} < 1$.

Рассмотреть проблему обнаружения

$$\begin{aligned} H_0 : x[n] &= w[n]; \\ H_1 : x[n] &= A + w[n], \end{aligned} \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где A — известная величина, $A > 0$; $w[n] = w_n$ — одинаково распределенные и независимые СВ, имеющие ПРВ $W(w_n)$, причем $E(w_n) = 0$, $E(w_n^2) = \sigma^2$. Локально оптимальный (ЛО) обнаружитель определяется алгоритмом (8.18). Обозначим эту статистику через $T_1(\mathbf{X}_n)$. Сравнить ее характеристики (8.21) со статистикой выборочного среднего (т.е. с линейным обнаружителем), когда принимается гипотеза H_1 , если

$$T_2(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] > \gamma'.$$

Сравнение провести по критерию АОЭ. Предположить, что при достаточно большом объеме выборки N статистика $T_2(\mathbf{X}_n)$ имеет нормальное распределение. Пока-

зять, что АОЭ является отношением эффективностей

$$\text{АОЭ}_{2,1} = \frac{\xi(T_2)}{\xi(T_1)}.$$

8.8. Показать, что статистика (8.38) асимптотически имеет ПРВ (8.31) при гипотезе H_0 . Использовать центральную предельную теорему и оценить как среднее, так и дисперсию данной статистики, полагая, что отсчеты $w[n] = w_n$ подчиняются лапласовой ПРВ.

8.9. Оценить статистику Рао, определяемую по (8.39), если $w[n]$ — ГБШ с дисперсией σ^2 . Необходимо получить те же результаты, что и в теореме 8.1 для ОП, полагая $\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Объяснить результат.

8.10. Получить соотношение (8.47).

Указание. Использовать формулу [59, ф-ла 3.381.4]

$$\int_0^\infty x^\nu e^{-ax} dx = \frac{1}{a^{\nu+1}} \Gamma(\nu+1), \quad \nu > 0, a > 0.$$

8.11. Для сигнала в примере 8.6 рассмотреть обнаружитель, в котором принимается гипотеза H_1 , если

$$\frac{\Gamma_x(f_0)}{\sigma^2/2} > \gamma',$$

где $\Gamma_x(f_0) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi f_0 n} \right|^2$ — периодограмма отсчетов $x[n]$. Такой обнаружитель, как показано в гл. 7 [см. (7.10)], действует на основе ОП в случае ГБШ. Здесь, однако, шум $w_n = W[n]$ негауссовский с ПРВ $W(w_n)$, имеющий нулевое среднее значение и дисперсию σ^2 .

Доказать, используя центральную предельную теорему, что при $N \rightarrow \infty$

$$\frac{\Gamma_x(f_0)}{\sigma^2/2} \approx \begin{cases} \chi_2^2 & \text{при } H_0; \\ \chi_2'^2(\lambda) & \text{при } H_1, \end{cases}$$

где $\lambda = NA^2/(2\sigma^2)$ — показатель нецентральности.

Показать это при значительном объеме выборки N потери относительно обнаружителя (8.41) равны $10 \lg \sigma^2 i(A)$ дБ.

Указание. Использовать п. 2 гл. 7.

8.12. Найти АОЭ АО алгоритма обнаружения детерминированного сигнала на фоне лапласовой помехи, если этот алгоритм используется при аддитивной гауссовской помехе с той же дисперсией σ^2 .

Ответ: АОЭ = $2/\pi \approx 0,637 \approx 0,64$.

9 Непараметрические методы обнаружения сигналов

Посвящается памяти Павла Сергеевича Акимова (16.09.31–12.09.02)

9.1. Статистики непараметрических алгоритмов обнаружения сигналов

В последнее время в задачах обнаружения сигналов все чаще привлекают внимание непараметрические методы. Статистический метод называется непараметрическим, если его применение не предполагает знания функционального вида распределений. В теории обнаружения обнаружитель принято называть непараметрическим, если он обеспечивает постоянную вероятность ложной тревоги Q_0 независимо от статистических характеристик помехи. Качество обнаружителя определяется двумя показателями: вероятностями ложной тревоги Q_0 и пропуска полезного сигнала β (или вероятностью обнаружения $Q_d = 1 - \beta$). Поэтому задача стабилизации на заданном уровне хотя бы одного из этих показателей (например, α) при изменении помеховой обстановки является весьма важной.

Анализ качества известных непараметрических тестов для случая гауссовской помехи показывает, что некоторые из них (например, ранговые) незначительно уступают по эффективности оптимальному правилу. В то же время при изменении вида помехи ранговые алгоритмы оказываются в общем случае более эффективными, чем классические, которые в новых условиях становятся уже неоптимальными. Это полезное свойство непараметрических тестов сохранять в определенных пределах свои характеристики при изменении помеховой обстановки принято называть устойчивостью. Поэтому применение непараметрической обработки особенно целесообразно с точки зрения, как стабилизации вероятности ложной тревоги, так и эффективности (вероятности) обнаружения в том случае, когда распределение помехи отлично от нормального.

Помимо того, что реально существуют помехи, отличные от гауссовской, в ряде случаев приходится отказываться от гауссовской модели помехи, которая традиционно считается нормальной. Известно, что точность аппроксимации нормальным законом реального распределения оказывается на практике достаточно высокой для средней части кривой распределения (плотности вероятности), на «хвостах»

же кривой точность быстро убывает по мере удаления от ее средней части (см. гл. 8).

Специфика некоторых систем обнаружения такова, что вероятность ложной тревоги выражается весьма малой величиной ($10^{-3} \dots 10^{-2}$), не характерной для вероятностей ошибок, с которыми имеет дело классическая статистика. Столь малым вероятностям соответствуют «хвосты» распределения помехи, где нормальная аппроксимация распределения неудовлетворительна.

Применение непараметрической обработки оказывается целесообразным и в случае обнаружения сигнала на фоне гауссовской помехи неизвестной интенсивности. В обнаружителях наблюдается весьма критическая зависимость вероятности ложной тревоги α от мощности помехи σ^2 , коэффициента усиления приемника и порогового уровня обнаружения. Незначительное (на 10...20 %) изменение одной из этих величин приводит к изменению α на несколько порядков [96]. Поддерживать стабильность работы приемника или измерять мощность помехи следует, поэтому с точностью, которую трудно реализовать на практике.

С позиции теории проверки статистических гипотез задача обнаружения формулируется как проверка гипотезы H_0 о том, что наблюдаемый процесс является только помехой против альтернативной гипотезы (альтернативы) H_1 о том, что этот процесс смесь сигнала с помехой. Иными словами, задача обнаружения представляет собой статистическую задачу различения двух типов распределений (плотностей) — гипотетического $F_0(t)$ и альтернативного $F_1(t)$.

Знаковые статистики. Для наиболее часто встречающихся альтернатив, таких как альтернатива сдвига $F_1(t) = F_0(t-a)$ (a — некоторая постоянная), характерная, в частности, для задачи когерентного обнаружения, альтернатива масштаба $F_1(t) = F_0(t/a)$ или альтернатива более общего вида $F_1(t) < F_0(t/a)$, характерная для задачи некогерентного обнаружения, проще и зачастую эффективнее оказываются правила, основанные на знаковых и ранговых статистиках.

Знаковый тест является одним из наиболее простых непараметрических тестов. Статистика его основана на учете полярностей (знаков) независимых наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n :

$$S_1 = \sum_{i=1}^n h(x_i); \quad h(x_i) = h_i = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i > 0, \\ 0 & \text{при } x_i < 0. \end{cases}$$

Тест применяется для проверки гипотезы H_0 о том, что медиана распределения $F_0(t)$ равна нулю, против альтернативной гипотезы о том, что медиана распределения $F_1(t)$ больше нуля. Это соответствует задаче обнаружения постоянного положительного сигнала на

фоне аддитивной помехи с симметричной плотностью распределения $W(x | H_0)$ и нулевым математическим ожиданием.

Когда медиана $F_0(t)$ неизвестна, а известно лишь, что она меньше медианы $F_1(t)$, то приходят к двухвыборному знаковому тесту, основанному на подсчете знаков разностей пар наблюдений помеховой y_1, y_2, \dots, y_n и исследуемой x_1, x_2, \dots, x_n выборок:

$$S_2 = \sum_{i=1}^n h(x_i - y_i); \quad h(x_i - y_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i > y_i, \\ 0 & \text{при } x_i < y_i. \end{cases}$$

Для принятия решения статистики S_1 и S_2 испытываются на порог C , определяемый по заданной вероятности $\alpha = Q_0$ из соотношения $P(S > C | H_0) = \alpha$.

Нетрудно увидеть, что число единиц в суммах S_1 и S_2 эквивалентно числу положительных исходов в схеме Бернулли, поэтому вероятность превышения порога

$$P(S > C) = \sum_{i=C+1}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i},$$

где $p = P(x > y)$ — вероятность события $x > y$ ($x > 0$); C_n^i — число сочетаний из n по i . Для гипотезы H_0 $p = 1/2$, поэтому вероятность ее ложного отклонения

$$\alpha = P(S > C | H_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{i=C+1}^n C_n^i$$

не зависит от распределения $F_0(t)$, что и доказывает непараметричность теста.

Если имеется независимая выборка наблюдений, то можно синтезировать непараметрические алгоритмы обнаружения сигналов, которые сохраняют вероятность ложной тревоги неизменной при любых распределениях стационарной помехи и при произвольных размерах выборки. Вероятность пропуска сигнала при использовании таких алгоритмов, конечно, всегда будет больше минимальной теоретически возможной и будет зависеть от распределения помехи. Рассмотрим непараметрические алгоритмы обнаружения сигналов, использующие знаковые статистики.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — наблюдаемая выборка. Введем *знаковую функцию*

$$\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (9.1)$$

Знаковым вектором выборки назовем вектор $\operatorname{sgn} \mathbf{x}$ с компонентами $(\operatorname{sgn} x_1, \dots, \operatorname{sgn} x_n)$. Произвольную функцию знакового вектора на-

зовем *знаковой статистикой*, а алгоритм, использующий только знаки элементов выборки, — *знаковым алгоритмом*.

Если распределение стационарной помехи симметрично относительно нуля, то число положительных и отрицательных знаков в выборке независимо от вида помехи равновероятно. При появлении постоянного сигнала (положительного) на фоне помехи вероятность положительных знаков выборки становится больше вероятности отрицательных знаков, что позволяет обнаружить сигнал. Таким образом, знаковые алгоритмы реагируют на постоянную составляющую сигнала.

Иногда вместо знаковой функции (9.1) используют функцию единичного скачка. Вектор $\mathbf{u}(x)$ с компонентами $[u(x_1), \dots, u(x_n)]$ назовем *положительным* знаковым вектором выборки. Знаковая функция однозначно связана с функцией единичного скачка, так как

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (9.2)$$

Поэтому

$$2\mathbf{u}(x) = \text{sgn } \mathbf{x} + 1. \quad (9.3)$$

Порядковые статистики. Перегруппируем элементы выборки $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, расставляя их в возрастающем порядке так, что $x^{(k)} \leq x^{(j)}$, если $k < j$. Тогда получим *упорядоченную выборку* (вариационный ряд). Вектор $\mathbf{x}^{(\cdot)}$, элементы которого совпадают с членами вариационного ряда, называют *вектором порядковых статистик*, а элементы этого вектора — *порядковыми статистиками*. Для выборок из распределения, имеющего непрерывную плотность, вероятность совпадения двух и более выборочных значений, а следовательно, и порядковых статистик, равна нулю.

Нетрудно найти интегральную функцию распределения $F_1^{(i)}(x)$ порядковой статистики $x^{(i)}$ для однородной независимой выборки размера n из распределения $F_1(x)$. Так как вероятность того, что в независимой выборке (x_1, x_2, \dots, x_n) имеется ровно k элементов, не превосходящих заданного порога x , равна

$$\binom{n}{k} [F_1(x)]^k [1 - F_1(x)]^{n-k},$$

то

$$\begin{aligned} F_1^{(i)}(x) &= P\{x^{(i)} \leq x\} = \sum_{k=i}^n P\{x^{(k)} \leq x \leq x^{(k+1)}\} = \\ &= \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} [F_1(x)]^k [1 - F_1(x)]^{n-k}, \quad i = 1, \dots, n; x^{(n+1)} = \infty. \end{aligned} \quad (9.4)$$

где $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Из (9.4) дифференцированием по x правой части получим выражение для ПРВ порядковой статистики $x^{(i)}$ [43]

$$W_1^{(i)}(x) = \frac{d}{dx} F_1^{(i)}(x) = \binom{n-1}{i-1} [F_1(x)]^{i-1} [1 - F_1(x)]^{n-i} W_1(x). \quad (9.5)$$

Совместная плотность вероятности r порядковых статистик $y_i = x^{(s_i)}$, $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_r \leq n$, равна [86]

$$W_r(y_1, \dots, y_r) = n! [(s_1 - 1)! (s_2 - s_1 - 1)! \dots (n - s_r)!]^{-1} \times \\ \times F_1^{s_1-1}(y_1) [F_1(y_2) - F_1(y_1)]^{s_2-s_1-1} \dots [1 - F_1(y_r)]^{n-s_r} \prod_{i=1}^r W_1(y_i). \quad (9.6)$$

Из (9.5) и (9.6) следует, что совокупность порядковых статистик $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ представляет простую *марковскую последовательность*, так как

$$W(y_{r+1} | y_r, \dots, y_1) = \frac{W_{r+1}(y_1, \dots, y_{r+1})}{W_r(y_1, \dots, y_r)} = \\ = (n-r) W_1(y_{r+1}) \frac{1 - F_1^{n-r-1}(y_{r+1})}{1 - F_1^{n-r}(y_r)} = \frac{W_2(y_r, y_{r+1})}{W_1(y_r)} = W(y_{r+1} | y_r).$$

Ранговые статистики. Более мощными оказываются ранговые тесты, которые в отличие от знакового учитывают не только факт, но и степень отклонения элементов исследуемой выборки от некоторого уровня или элементов опорной выборки.

Рангом R_i элемента выборки x_i называется порядковый номер этого элемента в вариационном ряду, составленном из элементов x и y , упорядоченных по какому либо признаку, например расположенных в порядке возрастания от меньшего к большему. Так, в вариационном ряду $yuyuxxu \dots$ значения рангов соответствующих отсчетов x , образующих ранговый вектор, равны 3, 5, 6...

Поскольку при справедливости гипотезы для однородной независимой выборки значение ранга какого-либо элемента выборки равновероятно (отсчеты x и y равномерно перемешаны в вариационном ряду), то каким бы ни было распределение $F_0(t)$, тест, использующий ранговую статистику (произвольную функцию от рангового вектора), оказывается непараметрическим.

Когда справедлива альтернатива $F_1(t) < F_0(t)$, в частности альтернатива сдвига $F_1(t) = F_0(t-a)$, отсчеты x располагаются преимущественно в правой части ряда, т.е. значения их рангов статистически больше, чем при гипотезе H_0 . Эти различия в значениях рангов слу-

жат мерой, характеризующей контраст между опорной и исследуемой выборками.

Укажем на одно замечательное свойство ранговых статистик – их инвариантность относительно нелинейных монотонных преобразований. Действительно, любое преобразование указанного типа не нарушает порядок расположения отсчетов в вариационном ряду, а значит, и не изменяет значения их рангов. Поэтому мощность теста (Q_d) и его значимость (Q_0) остаются такими же, как до преобразования.

Применение ранговых процедур неизбежно приводит к потере части информации, однако при увеличении объема наблюдений эти потери уменьшаются и некоторые ранговые алгоритмы оказываются столь же эффективными, как и оптимальные, т.е. асимптотически оптимальными.

Поскольку рангом R_i элемента x_i выборки называется порядковый номер этого элемента в вариационном ряду, или, другими словами, число элементов выборки x , меньших или равных x_i , то, следовательно, выборочному значению x_i соответствует порядковая статистика $x^{(R_i)}$ вариационного ряда.

Ранговым вектором $\mathbf{R}(x) = (R_1, \dots, R_n)$ выборки x называется перестановка чисел $1, 2, \dots, n$, которая получается при замене элементов выборки их рангами. Ранговой статистикой называется произвольная функция от рангового вектора. Ранговый алгоритм предписывает сравнение некоторой ранговой статистики с порогом.

Исходную выборку x можно восстановить, если известен вектор $x^{(\cdot)}$ порядковых статистик и ранговый вектор \mathbf{R} . По отдельности любой из этих двух векторов представляет необратимое нелинейное преобразование исходной выборки. Для однородной независимой выборки x случайные векторы $x^{(\cdot)}$ и \mathbf{R} независимы.

Ранг R_i элемента x_i выборки объема n можно при помощи функции единичного скачка $u(x)$ или знаковой функции представить следующим образом:

$$\begin{aligned} R_i &= \sum_{k=1}^n u(x_i - x_k), \quad i = 1, \dots, n; \\ R_i &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn}(x_i - x_k) + \frac{n}{2}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Из (9.7) следует, что ранги являются знаковыми статистиками от разностей выборочных значений.

Для однородной независимой выборки функция правдоподобия инвариантна к группе перестановок аргументов. Отсюда следует, что для указанной выборки все ранговые векторы равновероятны, каково

бы ни было распределение, которому принадлежит выборка. Общее число возможных ранговых векторов, соответствующих выборке объема n , равно числу перестановок n чисел, т.е. равно $n!$. Иначе говоря, выборочное пространство ранговых векторов состоит из $n!$ дискретных точек n -мерного евклидова пространства. Вероятность попадания рангового вектора \mathbf{R} наблюдаемой выборки в любую точку \mathbf{r}_i , $i = 1, \dots, n!$, этого дискретного множества равна $1/n!$, т.е. для любого $i = 1, \dots, n!$ и для любого распределения однородной независимой выборки

$$P\{\mathbf{R} = \mathbf{r}_i \mid H_0\} = 1/n!.$$

Отсюда следует, что при использовании рангового алгоритма обнаружения сигнала сохраняется неизменной вероятность ложной тревоги для стационарной независимой помехи с произвольным распределением. Таким образом, ранговый алгоритм — непараметрический по отношению к стационарной независимой помехе.

При появлении изменяющегося во времени сигнала ранги перестают быть равновероятными из-за возникающей при этом неоднородности выборки*. Расположение по величине элементов выборки уже определяется формой сигнала, и это позволяет обнаружить сигнал. Таким образом, ранговый алгоритм реагирует на нестационарность, вносимую переменным сигналом в стационарную помеху.

Ранговый вектор стационарной помехи *инвариантен* к безынерционному преобразованию выборки:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{f}_x),$$

где \mathbf{f}_x — вектор с компонентами $f(x_1), \dots, f(x_n)$ и $f(x)$ — неубывающая функция, так как такое преобразование не изменяет относительного расположения элементов выборки. Ранговый алгоритм сохраняет свойство *непараметричности* относительно стационарной независимой помехи и после *указанного нелинейного преобразования*.

В некоторых задачах используются вектор абсолютных величин наблюдений $|\mathbf{x}| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ и вектор *положительных рангов* $\mathbf{R}^+ = (R_1^+, \dots, R_n^+)$, представляющих порядковые номера элементов вариационного ряда $|x|^{(1)}, \dots, |x|^{(n)}$ выборки абсолютных величин наблюдений. Ясно, что $x_i = |\mathbf{x}|^{(R_i)} \operatorname{sgn} x_i$. Аналогично (9.7) \mathbf{R}^+ можно представить в виде суммы:

$$R_i^+ = \sum_{k=1}^n u(|x_i| - |x_k|), \quad i = 1, \dots, n.$$

* Например, при $n = 2$ для неоднородной независимой выборки $w_2(x_1, x_2) = W_{11}(x_1)W_{12}(x_2) \neq W_{11}(x_2)W_{12}(x_1)$.

Знаково-ранговый алгоритм использует знаково-ранговую статистику, зависящую как от вектора рангов \mathbf{R} , так и от вектора знаков $\text{sgn } x$ наблюдаемой выборки.

Ранговые и знако-ранговые алгоритмы используются для повышения эффективности непараметрического обнаружения. Несмотря на простоту реализации знаковый обнаружитель использует сравнительно мало информации, содержащейся во входных данных. В частности, при его использовании не учитывается удаление элементов выборки x_i от начала координат. В ряде случаев вместо статистики

$$S = \sum_{i=1}^n u(x_i)$$

целесообразнее использовать взвешенные статистики

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i),$$

где весовые коэффициенты λ_i зависят от расстояния наблюдений x_i от начала координат.

Обнаружитель Вилкоксона. К знако-ранговому алгоритму относится обнаружитель Вилкоксона (F. Wilcoxon, 1945), в котором выполняется ранжирование выборочных данных и их упорядочивание по величине абсолютных значений x_i так, чтобы выполнялись неравенства [88]

$$|x_{i_1}| < |x_{i_2}| < \dots < |x_{i_n}|. \quad (9.8)$$

При этом алгоритм обнаружения имеет вид [47, 88]

$$S_y = \sum_{k=1}^n d_k \gtrless C, \quad (9.9)$$

где $d_k = \begin{cases} 0 & \text{при } x_{i_k} \leq 0, \\ k & \text{при } x_{i_k} > 0. \end{cases}$

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — наблюдаемая независимая выборка. В знако-ранговом алгоритме Вилкоксона берутся абсолютные величины наблюдений $|x_1|, \dots, |x_n|$ и рассматривают их в порядке возрастания $|x|^{(1)} < |x|^{(2)} < \dots < |x|^{(n)}$, затем определяется ранг R_i^+ , $i = \overline{1, n}$, который равен обычному рангу для $|x_i|$ в этой возрастающей последовательности $|x|^{(1)}, \dots, |x|^{(n)}$.

Таким образом, алгоритм Вилкоксона обнаружения положительного сигнала состоит в сравнении с порогом суммы тех компонент вектора положительных рангов, которые соответствуют положительным выборочным значениям $x_{i_k} > 0$.

Выносится решение о наличии сигнала, если

$$S_y = S_n(\mathbf{x}) = \sum_{x_i > 0} R_i^+ = \sum_{i=1}^n R_i^+ u(x_i) \geq C, \quad (9.10)$$

где порог C определяется заданной ВЛТ $Q_0 = \alpha$.

Поскольку [87]

$$\sum_{i=1}^n R_i^+ = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

то с учетом (9.3) статистику Вилкоксона (9.10) можно выразить в виде

$$S_y = S_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n R_i^+ \operatorname{sgn} x_i + \frac{n(n+4)}{4} \geq C. \quad (9.11)$$

Структурная схема обнаружителя Вилкоксона (рис. 9.1) включает выпрямитель, устройство ранжирования абсолютных значений элементов выборки (верхняя ветвь структурной схемы), идеальный ограничитель, сумматор и устройство сравнения с порогом (ПУ).

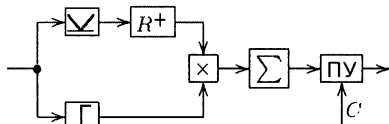


Рис. 9.1

Алгоритм Вилкоксона можно записать более компактно, если учесть, что и $(x_i + x_j) = 1$ тогда и только тогда, когда $x_i \geq |x_j|$, $x_i > 0$ или $x_j \geq |x_i|$, $x_j > 0$. В результате вместо (9.9) получим [43, 88]

$$S_y = S_n(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u(x_i + x_j) \geq C. \quad (9.12)$$

Эквивалентными записями статистики Вилкоксона являются [22]

$$S_y = \sum_{k=1}^n k u(x_{i_k}), \quad (9.13)$$

с учетом ранжирования (9.8), а также [22]

$$S_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^j u(x_i + x_j). \quad (9.14)$$

В силу ранжирования (9.8) можно положить

$$|x_1| < |x_2| < \dots < |x_n|$$

и рассмотреть сумму в правой части (9.14)

$$t_j = \sum_{i=1}^j u(x_i + x_j).$$

Если $x_j > 0$, то сумма $x_i + x_j$ также положительна, так как $|x_i| < |x_j|$ и $u(x_i + x_j) = 1$ и всех i , поэтому $t_j = j$. С другой стороны, если $x_j < 0$, то $x_i + x_j < 0$ для всех i и $t_j = 0$. Следовательно, $t_j = ju(x_j)$, таким образом, приходим к (9.13) с учетом ранжировки (9.15).

Отсюда следует эквивалентность записи статистики Вилкоксона в виде (9.12), (9.13), (9.14).

Пример 9.1. Пусть $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$, т.е. здесь $n = 3$. Найти ранги отсчетов и статистику Вилкоксона.

Решение. ранги отсчетов имеют значение соответственно 3, 2, 1. По (9.9) и (9.10) статистика Вилкоксона равна сумме рангов положительных наблюдений

$$S_y = S_3(x) = \sum_{k=1}^3 d_k = \sum_{x_k > 0} R_k^+ = 2.$$

С другой стороны, для вычисления статистики Вилкоксона можно использовать (9.12), тогда

$$S_y = S_3(x) = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 u(x_i + x_j).$$

Для вычисления по этой формуле составим таблицу:

$$\begin{array}{lll} i = 1, & j = 1: & u(x_1 + x_1) = 0, \\ i = 1, & j = 2: & u(x_1 + x_2) = 0, \\ i = 1, & j = 3: & u(x_1 + x_3) = 0, \\ i = 2, & j = 2: & u(x_2 + x_2) = 1, \\ i = 2, & j = 3: & u(x_2 + x_3) = 1, \\ i = 3, & j = 3: & u(x_3 + x_3) = 0 \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u(x_i + x_j) = 2.$$

Наконец, по формуле (9.13) получим с учетом (9.2)

$$S_y = \sum_{j=1}^n ju(x_j) = u(x_1) + 2u(x_2) + 3u(x_3) = 2.$$

Таким образом,

$$S_y = \sum_{k=1}^n d_k = \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 u(x_i + x_j) = \sum_{j=1}^n ju(x_j) = 2.$$

Поскольку справедлива нормализация статистики Вилкоксона, то потребуется знание о ее среднем значении и дисперсии.

В случае гипотезы H_0 по (9.11) находим

$$E(S_y | H_0) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n E(R_i^+) E(\operatorname{sgn} x_i) + \frac{n(n+1)}{4}. \quad (9.15)$$

При симметричном распределении помехи $E(\operatorname{sgn} x_i) = 0$, поэтому

$$E(S_y | H_0) = \frac{n(n+1)}{4}. \quad (9.16)$$

Дисперсия статистики Вилкоксона имеет вид [49, 88]

$$D(S_y | H_0) = \operatorname{var}(S_y | H_0) = \frac{1}{24} n(n+1)(2n+1). \quad (9.17)$$

Недостатком обнаружителя Вилкоксона, так же как эквивалентного ему [86] обнаружителя Манна–Уитни, является необходимость запомнить выборку для ее ранжирования прежде, чем вычислить саму статистику. Этого недостатка лишены знаковый обнаружитель и статистика Стьюдента (t -статистика).

Статистика Стьюдента (t -статистика). Обычно непараметрические статистики сравниваются со статистикой линейного обнаружителя и как следствие с t -статистикой. Поэтому рассмотрим кратко следующую проблему обнаружения постоянного сигнала:

$$H_0 : x[n] = w[n], \quad n = 0, 1 \dots N-1,$$

$$H_1 : x[n] = A + w[n], \quad n = 0, 1 \dots N-1,$$

где A — неизвестная постоянная, принимающая положительные и отрицательные значения, $-\infty < A < \infty$; $w[n]$ — ГБШ с неизвестной дисперсией σ^2 .

Здесь РНМ статистики не существует, так как задача эквивалентна следующей:

$$H_0 : A = 0; \quad \sigma^2 > 0,$$

$$H_1 : A \neq 0; \quad \sigma^2 > 0,$$

которая в свою очередь является двусторонней. В данном случае паразитным параметром является неизвестная дисперсия σ^2 .

Как известно (см. гл. 6) решающим правилом является

$$L(\mathbf{X}_N) = \frac{W_1(\mathbf{X}_N, \hat{A}_1 \hat{\sigma}_1^2 \mid H_1)}{W_0(\mathbf{X}_N, \hat{\sigma}_0^2 \mid H_0)} > \gamma,$$

где $(\hat{A}, \hat{\sigma}_1^2)^T$ — оценка максимального правдоподобия вектора $(A, \sigma^2)^T$ при гипотезе H_1 , а $\hat{\sigma}_0$ — оценка максимального правдоподобия параметра σ^2 при гипотезе H_0 .

Для нахождения оценок \hat{A} и $\hat{\sigma}_1^2$ необходимо максимизировать ПРВ

$$W_1(\mathbf{X}_N, A, \sigma^2 \mid H_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - A)^2 \right].$$

В результате получим (см. гл. 6)

$$\hat{A} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]; \quad \hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \bar{x})^2.$$

После преобразований получим

$$W(\mathbf{X}_N, \hat{A}, \hat{\sigma}_1^2 \mid H_1) = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma}_1^2)^{N/2}} e^{-N/2}.$$

Аналогично максимизацией ПРВ

$$W_0(\mathbf{X}_N, \sigma^2 \mid H_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] \right)$$

получим оценку дисперсии

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n].$$

Таким образом,

$$W(\mathbf{X}_N, \hat{\sigma}_0^2 \mid H_0) = \frac{1}{(2\pi\hat{\sigma}_0^2)^{N/2}} e^{-N/2}.$$

В результате получим ОП в виде

$$\Lambda(\mathbf{X}_N) = (\hat{\sigma}_0^2 / \hat{\sigma}_1^2)^{N/2},$$

или эквивалентно ЛОП

$$2 \ln \Lambda(\mathbf{X}_N) = N \ln(\hat{\sigma}_0^2 / \hat{\sigma}_1^2).$$

Преобразуем оценку $\hat{\sigma}_1^2$:

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \bar{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x^2[n] - 2x[n]\bar{x} + \bar{x}^2) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] - \bar{x}^2 = \hat{\sigma}_0^2 - \bar{x}^2.$$

Тогда ЛОП принимает вид

$$2 \ln \Lambda(\mathbf{X}_N) = N \ln \left(\frac{\hat{\sigma}_1^2 + \bar{x}^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right) = N \ln \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{\hat{\sigma}_1^2} \right).$$

Поскольку $\ln(1+x)$ является монотонно возрастающей функцией с ростом x , то эквивалентной статистикой в решении данной задачи является статистика

$$T(\mathbf{X}_N) = \bar{x}^2 / \hat{\sigma}_1^2.$$

Можно показать, что

$$T_1(\mathbf{X}_N) = (N-1)T(\mathbf{X}_N) = t^2 = t^2(\mathbf{X}_N),$$

где

$$t = \frac{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=0}^{N-1} x_i}{\sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \left(x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x_i \right)^2}} = t(\mathbf{X}_N)$$

— t -статистика (статистика Стьюдента). Случайная величина t имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенью свободы. Решающим правилом при проверке гипотез является: применяется гипотеза H_1 , если $T_1(\mathbf{X}_N) > \gamma'$. Тогда (см. гл. 6)

$$Q_0 = Q_{F_{1,N-1}}(\gamma'); \quad Q_d = Q_{F_{1,N-1}}'(\lambda) (\gamma'),$$

где показатель нецентральности $\lambda = NA^2/\sigma^2(\cdot)$ распределения Фишера.

Как показано в гл. 6, Q -функция Фишера выражается через сумму распределений Стьюдента. Однако, если при постановке задачи ограничиться только положительными значениями амплитуды $A > 0$, то решающим правилом будет $t > t_0$. При этом ВЛТ $Q_0 = \alpha$ имеет вид

$$\alpha = P(t > t_0 | H_0); \quad Q_d = P(t > t_0 | H_1).$$

В первом случае используется центральное распределение Стьюдента, во втором — нецентральное распределение Стьюдента при показателе нецентральности $\delta = \sqrt{\lambda} = \sqrt{N}A/\sigma$.

При $A > 0$ равномерно наиболее мощным (РНМ) является такое правило, при котором критическая область определяется неравен-

ством $t \geq t_\alpha$, где t_α — процентная точка, определяемая по формуле

$$\int_{t_\alpha}^{\infty} S_{n-1}(t) dt = \alpha,$$

где $S_{n-1}(t)$ — распределение Стьюдента с $n - 1$ степенью свободы.

При $A > 0$ гипотеза H_1 выбирается, когда t превосходит порог t_0 . Это известно как односторонний t -тест. Если $-\infty < A < \infty$, то требуется, чтобы абсолютные значения превышали порог t'_0 ($t^2 > t_0$; $|t| > t'_0$). Это процедура двустороннего теста.

Когда число отсчетов N значительно, распределение t -статистики приблизительно гауссовское. Тогда при заданном ВЛТ $Q_0 = \alpha$ пороги определяются из соотношений

$$Q_0 \approx Q(t_0); \quad Q_0 = 2Q(t'_0),$$

где Q — Q -функция нормального распределения $N(0, 1)$. При этом в пределе при $N \gg 1$ ВЛТ будет одна и та же для всех распределений, поэтому говорят, что обнаружитель является асимптотически непараметрическим.

Когда N значительно, выборочная дисперсия приблизительно равна истинной дисперсии шума и среднее значение t -статистики при гипотезе H_1

$$E(t | H_1) \approx \frac{A\sqrt{N}}{\sigma} = d\sqrt{N},$$

где $d^2 = A^2/\sigma^2$ — ОСШ.

Дисперсия t -статистики при этом приблизительно равны единице, т.е.

$$D(t | H_1) = D(t | H_0) \approx 1.$$

Тогда вероятность обнаружения соответственно для одностороннего и двустороннего теста определяется соотношениями (см. гл. 6)

$$Q_d = Q(t_0 - d\sqrt{N}); \quad Q_d = Q(t'_0 - d\sqrt{N}) + Q(t'_0 + d\sqrt{N}).$$

Таким образом, в пределе при больших N обнаружитель, основанный на t -статистике, аналогичен стандартному приемнику Неймана-Пирсона.

Асимптотическая относительная эффективность (АОЭ) обнаружителя с t -статистикой по отношению к стандартному приемнику равна единице. Но это только при условии значительных объемов выборки N . Если N мало, то указанные обнаружители ведут себя совершенно отлично, чем в асимптотическом случае. При конечных N обнаружитель с t -статистикой не является непараметрическим, его ВЛТ при фиксированных порогах зависит от истинной ПРВ шума.

Существует несколько модификаций и обобщений статистики Вилкоксона. В частности, к ним относятся знаковые статистики Фишера–Иейтса (называемый иногда критерием нормальных меток или c_1 -критерием), а также статистика Ван дер Вардена.

Статистика Фишера–Иейтса. Допустим, что имеются n независимых и одинаково распределенных наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n . Эти данные ранжируются по абсолютной величине x_i , так, что

$$|x_{k_1}| < |x_{k_2}| < \dots < |x_{k_n}|.$$

Пусть эти наблюдения заменяются на преобразованные по закону Гаусса значения

$$|y_{k_1}| < |y_{k_2}| < \dots < |y_{k_n}|.$$

В результате получается алгоритм обнаружителя Фишера–Иейтса (обнаружителя нормальных меток)

$$S_{\text{ФИ}} = \sum_{i=1}^n d_i > T,$$

если выполняется гипотеза H_1 .

Величина d_i имеет вид

$$d_i = \begin{cases} 0, & \text{если } x_{k_i} < 0, \\ E(z_i), & \text{если } x_{k_i} > 0, \end{cases} \quad (9.18)$$

где z_i соответствует порядку величин $|y_{k_i}|$. Поскольку последние (y_k) являются результатом гауссовского преобразования при нулевом среднем и единичной дисперсии нормальной ПРВ, то z_i — упорядоченная выборка объема n из стационарного нормального распределения. Величина $E(z_i)$ находится по таблицам усредненных нормальных меток [49, табл. В-5].

Обнаружитель Фишера–Иейтса со статистикой $S_{\text{ФИ}}$ является локально наиболее мощным среди обнаружителей, основанных на знакоранговых статистиках при проверке гипотез:

H_7 : $W(x)$ — нормальная ПРВ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 , против альтернативы K_7 — нормальная ПРВ со средним значением $\mu > 0$ и дисперсией σ^2 .

Пример 9.2. Пусть даны 12 наблюдений: 5,1; 4,2; −3,6; 0,8; −2,1; 3,7; 6,4; −2,5; −1,1; −0,5; 3,9; 4,8. Найти ранги наблюдений и вычислить статистику

$$S_{\text{ФИ}} = \sum_{i=1}^n d_i,$$

где d_i определяется по (9.18).

Решение. Запишем наблюдения вместе с их рангами в виде табл. 9.1.

Таблица 9.1

Наблюдения x_i	5,1	4,2	-3,6	0,8	-2,1	3,7	6,4	-2,5	-1,1	-0,5	3,9	4,8
Ранг $R(x_i)$	11	9	6	2	4	7	12	5	3	1	8	10

Средние значения $E(z_i)$ для рангов $i = 1, 2, \dots, 12$ могут быть вычислены по таблице усредненных нормальных меток [49, табл. В-5] (фрагмент табл. В-5 для данного примера дан в табл. 9.2). В результате находится ряд значений, приведенных в табл. 9.3.

Таблица 9.2

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,56419	0,84628	1,02938	1,16296	1,26721	1,35218	1,42360	1,48501	1,53875
2		0,00000	0,29701	0,49502	0,64176	0,75737	0,85222	0,93230	1,00136
3				0,00000	0,20155	0,35271	0,47282	0,57197	0,65606
4						0,00000	0,15251	0,27453	0,37576
5								0,00000	0,12267
	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1,58644	1,62923	1,66799	1,70338	1,73591	1,76599	1,79394	1,82003	1,84448
2	1,06192	1,11573	1,16408	1,20790	1,24794	1,28474	1,31878	1,35041	1,37994
3	0,72884	0,79284	0,84983	0,90113	0,94769	0,99027	1,02946	1,06573	1,09945
4	0,46198	0,53684	0,60285	0,66176	0,71488	0,76317	0,80738	0,84812	0,88586
5	0,22489	0,31225	0,38833	0,45557	0,51570	0,57001	0,61946	0,66479	0,70661
6	0,00000	0,10259	0,19052	0,26730	0,33530	0,39622	0,45133	0,50158	0,54771
7			0,00000	0,08816	0,16530	0,23375	0,29519	0,35084	0,40164
8					0,00000	0,07729	0,14599	0,20774	0,26374
9							0,00000	0,06880	0,13072
10									0,00000

Таблица 9.3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$E(z_i)$	-1,63	-1,12	-0,79	-0,54	-0,31	-0,10	0,10	0,31	0,54	0,79	1,12	1,63

Каждому наблюдению соответственно его рангу приписывается величина $E(z_i)$. Так, например, наблюдению 5,1 с рангом 11 соответствует $E(z_{11}) = 1,12$. Чтобы получить величину статистики $S_{\text{Фи}}$, необходимо просуммировать значения $E(z_i)$ для каждого положительного значения наблюдения.

В результате находятся семь слагаемых

$$S_{\text{Фи}} = 1,63 + 1,12 + 0,79 + 0,54 + 0,31 + 0,10 - 1,12 = 3,37.$$

Статистика Фишера-Иейтса имеет по отношению к t -статистике АОЭ

$$\text{АОЭ}_{\text{Фи},t} \geq 1$$

при симметричном шуме на входе. Такая эффективность достигается за счет усложнения алгоритма обнаружения.

Другим знако-ранговым алгоритмом более эффективным, чем алгоритм Вилкоксона, но за то и более сложным в реализации, является алгоритм Ван дер Вардена.

Этот алгоритм использует обращение нормальной функции распределения и называется также статистикой инверсных нормальных меток (inverse normal scores test).

В таком обнаружителе принимается гипотеза H_1 , если

$$S_{WdW} = \sum_{i=1}^n d_i > T, \quad (9.19)$$

где T — порог;

$$d_i = \begin{cases} 0 & \text{при } x_{k_i} < 0, \\ \xi_p = \Phi^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right) & \text{при } x_{k_i} > 0, \end{cases} \quad (9.20)$$

где x_{k_i} — наблюдение, имеющее i -ю наименьшую абсолютную величину.

Пример 9.3. Используя наблюдения примера 9.2, найти величину статистики Ван дер Вардена S_{WdW} .

Решение. Сначала составим таблицу значений $p = i/(n+1)$ — аргумента обратной функции $\Phi^{-1}(p)$, затем по таблице нормальных процентных точек вычислим величины ξ_p [38, 58], когда $\Phi(d_i) = p$. В результате получим табл. 9.4.

Таблица 9.4

i	1	2	3	4	5	6
p	0,0769	0,1538	0,2308	0,3077	0,3846	0,4615
ξ_p	-1,43	-1,02	-0,74	-0,50	-0,29	-0,10
i	7	8	9	10	11	12
p	0,5385	0,6154	0,6923	0,7692	0,8262	0,9231
ξ_p	0,10	0,29	0,50	0,74	1,02	1,43

При вычислениях использовалось равенство [38]

$$\psi(p) + \psi(1-p) = 0,$$

где $\psi(p) = N^{-1}(p, 0, 1)$ и $\Phi[\psi(p)] = p$, $0 < p < 1$.

Статистика S_{WdW} определяется суммой тех величин ξ_p , которые соответствуют положительным наблюдениям. В результате получаем 7 слагаемых в соответствии с таблицей примера 9.2:

$$S_{WdW} = 1,43 + 1,02 + 0,74 + 0,50 + 0,29 + 0,10 - 1,02 = 3,06$$

Количественной мерой сравнения качества двух тестов (обнаружителей), как уже отмечалось, служит коэффициент эффективности одного теста по сравнению с другим: $n_2(\alpha_1, D_1, d)/n_1(\alpha_1, D_1, d)$, где через n_i , $i = 1, 2$, обозначено наименьшее число наблюдений, необходимое для того, чтобы i -й обнаружитель обеспечивал вероятность обнаружения Q_d гипотезы H_1 при вероятности ложного обнаружения $Q_0 = \alpha$ для гипотезы H_0 и заданном «расстоянии» d между гипотезами.

Вычислить это отношение для произвольных α , Q_d , H_1 и H_0 весьма сложно. Вычисления удастся проделать лишь при неограниченном возрастании n_1 и n_2 , когда статистики сравниваемых тестов нормализуются. Однако при неограниченном возрастании n_1 и n_2 для состоятельных тестов вероятность Q_d стремится к единице. Чтобы она осталась постоянной при $n_1, n_2 \rightarrow \infty$, необходимо, чтобы одновременно «расстояние» между гипотезами стремилось к нулю. Таким образом, получаем коэффициент асимптотической относительной эффективности (АОЭ) первого теста относительно второго:

$$\text{АОЭ}_{1,2} = \lim_{\substack{n_1, n_2 \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0 \text{ (} H_1 \rightarrow H_0 \text{)}}} \frac{n_2(\alpha_1, D_1, d)}{n_1(\alpha_1, D_1, d)}.$$

Неограниченное увеличение числа наблюдений и связанное с этим стремление H_1 к H_0 соответствует обнаружению слабых сигналов. В частности, для нормальной альтернативы сдвига, характерной для задачи обнаружения когерентного сигнала, расстояние d определяется отношением сигнал-помеха. Поэтому стремление его к нулю означает стремление к нулю значения сигнала. Коэффициент АОЭ любого обнаружителя по сравнению с оптимальным всегда меньше единицы. Отклонение его от единицы служит мерой качества обнаружителя для рассматриваемых условий (H_1 и H_0). В то же время для некоторых других H_1 и H_0 , для которых тест оказывается неоптимальным, коэффициент АОЭ может превысить единицу.

Коэффициент АОЭ знакового теста при обнаружении постоянно-положительного сдвига (сигнала) в гауссовской помехе по сравнению с обычным линейным обнаружителем, использующим в качестве статистики сумму отсчетов, составляет 0,64. Это значит, что число наблюдений, требуемое линейному тесту для обнаружения слабого сигнала с заданными α_1 и Q_d , составляет 64 % числа наблюдений, которое требуется знаковому тесту, работающему в тех же условиях и реализующему те же показатели качества. В то же время при помехе с распределением Лапласа знаковый обнаружитель лучше линейного в 2 раза, т.е. АОЭ = 2.

Коэффициент АОЭ рангового алгоритма обнаружения постоян-

ного сигнала в гауссовской помехе, в которой используется статистика Вилкоксона, по отношению к линейному накопителю составляет $3/\pi \approx 0,955$, т.е. ранговый обнаружитель лишь незначительно уступает линейному. Грубо говоря, ранговому тесту требуется 32 наблюдения, а линейному — 30. В то же время для помехи с распределением Лапласа $АОЭ = 1,5$. Асимптотическая эффективность рангового теста Вилкоксона по отношению к линейному накопителю при альтернативе сдвига выше, чем у тестов согласия типа Колмогорова, Смирнова, Крамера-Мизеса и др.

Тест Ван-дер-Вардена при альтернативе сдвига имеет эффективность в гауссовской помехе, равную единице, т.е. этот тест является асимптотически оптимальным.

В практике обнаружения объем выборки n является ограниченным, поэтому использование коэффициента АОЭ для оценки теста носит лишь приблизительный характер в том смысле, что большое его значение позволяет лишь предположить высокую эффективность алгоритма при конечном числе испытаний, но не более. Суждение об эффективности обнаружителя можно вынести лишь на основании расчета и анализа его рабочих характеристик.

9.2. Свойства знакового алгоритма обнаружения сигналов

Пример 9.4. Пусть X — СВ с произвольной и непрерывной функцией распределения $F(x) = P(X \leq x)$. Медиана θ СВ (или эквивалентно F) определяется соотношением

$$P(X \leq \theta) = P(X \geq \theta) = 1/2.$$

Предполагается, что медиана θ — единственная. Выборочной моделью является случайная выборка X_1, \dots, X_n независимых, одинаково распределяемых СВ, каждая из которых распределена по закону $F(x - \theta)$.

Проверяются гипотезы:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad \theta &= 0, \\ H_1 : \quad \theta &> 0. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Рассмотрим знаковую статистику

$$S = \sum_{i=1}^n u(X_i), \tag{9.22}$$

где

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x \leq 0. \end{cases}$$

Гипотеза H_0 отклоняется в пользу H_1 , если $S \geq k$, причем порог k определяется на основе ВЛТ

$$P(S \geq k \mid H_0) = \alpha. \quad (9.23)$$

Найдем вначале распределение статистики S в случае гипотезы H_0 . При H_0 $u(X_1), \dots, u(X_n)$ — независимые, одинаково распределенные СВ, причем каждая из них биномиальная с параметрами 1 и $p = P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F(0) = 1/2$. Обозначим это распределение через $B(1; 1/2)$. Тогда S — это сумма n независимых, одинаково распределенных по $B(1; 1/2)$ СВ, и, следовательно, имеет распределение $B(n; 1/2)$. Порог k можно найти по таблице биномиального распределения.

Поскольку распределение СВ S не зависит от распределения F элементов выборки, то порог k можно найти, не зная F . Таким образом, СВ S — свободная от распределения или непараметрическая СВ при выполнении гипотезы H_0 : $\theta = 0$. С другой стороны, при выполнении гипотезы H_1 : $\theta = \theta' > 0$ СВ S имеет $B(n, p)$ распределение, но теперь

$$p = P(X > 0) = 1 - F(-\theta') \quad (9.24)$$

зависит от F . Следовательно, S не свободно от распределения при выполнении гипотезы H_1 .

Поскольку при обеих гипотезах СВ S (9.22) сумма независимых одинаково распределенных СВ с распределением $B(1, p)$, $\text{var}[u(X_i)] = p(1 - p)$ и согласно центральной предельной теореме можно утверждать, что СВ

$$\xi = [S - E(S)]/\sqrt{\text{var } S} \quad (9.25)$$

имеет приближенно стандартное нормальное распределение с нулевым средним значением и единичной дисперсией при $0 < p < 1$. Таким образом,

$$\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z \approx N(0, 1). \quad (9.26)$$

При гипотезе H_0

$$E(S \mid H_0) = n/2; \quad \text{var}(S \mid H_0) = n/4. \quad (9.27)$$

Тогда при такой аппроксимации можно приближенно вычислить величину порога k при отсутствии таблицы биномиального распределения получим

$$\alpha = P(S \geq k) = P\left(\xi \geq \frac{k - n/2}{\sqrt{n/4}}\right) = 1 - P\left(\xi < \frac{k - n/2}{\sqrt{n/4}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{k - n/2}{\sqrt{n/4}}\right) = Q\left(\frac{k - n/2}{\sqrt{n/4}}\right). \quad (9.28)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du; \quad Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-u^2/2} du.$$

Пусть Z_α — верхняя α -процентная точка нормального распределения, т.е. $\alpha = 1 - \Phi(Z_\alpha)$, тогда $(k - n/2)/\sqrt{n/4} = Z_\alpha$, или $k = n/2 + Z_\alpha\sqrt{n/2}$.

С учетом дискретности биномиального распределения можно уточнить величину порога вычитанием 0,5 из k ; в результате получим [87]

$$k = n/2 + 1/2 + Z_\alpha\sqrt{n/2}. \quad (9.29)$$

Удовлетворительное приближение к α в (9.28) достигается при малых объемах выборки, равных 3 или 4. В табл. 9.5 дается сравнение при вычислении порога k при использовании нормального и биномиального распределения с поправкой при $p = 1/2$, $n = 5$. Причем при расчете по нормальному распределению используется формула Муавра-Лапласа

$$P\{S \leq k \mid n, p\} \approx \Phi\left(\frac{k - np + 1/2}{\sqrt{np(1-p)}}\right). \quad (9.30)$$

По этой формуле рассчитываются данные второй строки табл. 9.5.

Расчет данных первой строки осуществляется по формуле

$$F = P\{S \leq k\} = \sum_{i=0}^k C_n^i p^i q^{n-i} = p^5 \sum_{i=0}^k C_n^i.$$

При $k = 0$ $F = p^5 = 0,03125$; при $k = 1$ $F = 0,03125(1 + 5) = 0,1875$ и при $k = 2$ $F = 0,1875 + 0,3125 = 0,5$.

Очевидно, что при $k = 2$ и $\Phi(0) = 1/2$. Таким образом, в [87, табл. 1.1] допущена опечатка: в последнем столбце вместо $k = 3$ должно быть $k = 2$ и табл. 9.5 выглядит следующим образом:

Таблица 9.5

Функция	k			
	0	1	2	3
$F = P(S \leq k)$	0,03125	0,1875	0,5	1
$\Phi(\cdot)$	0,0367	0,1867	0,5	0,9099

При $k = 5$ $F = 1$; $\Phi(3/\sqrt{5}) = \Phi(1,341) = 0,9099 \approx 0,91$.

В [87] в частности доказывается, что «критерий знаков — равнономерно наиболее мощный» (PHM). Следуя [87], проведем это доказательство. Начнем с обозначений. Нулевая гипотеза H_0 обозначает, что выборка берется из $F \in \Omega_0$, а альтернативная гипотеза означает, что выборка берется из $G(x) = K(x - \theta)$, где $K \in \Omega_0$ и $\theta > 0$. Здесь используются различные обозначения для нулевой гипотезы и альтернативы (F и K), чтобы показать их сложную природу. Гипотезы записываются в виде

$$\begin{aligned} H_0 : F(0) &= 1/2, \\ H_1 : 1 - G(0) &> 1/2. \end{aligned}$$

Любую функцию распределения G можно представить в виде суммы

$$\begin{aligned} G(x) &= P(X \leq x) = \\ &= P(X \leq x \mid X \leq 0)P(X \leq 0) + P(X \leq x \mid X > 0)P(X > 0). \end{aligned} \quad (9.31)$$

Согласно (9.24)

$$p = 1 - G(0). \quad (9.32)$$

Определим две функции $g_-(x)$ и $g_+(x)$ (рис. 9.2):

$$g_-(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} P(X \leq x \mid X \leq 0) & \text{при } x \leq 0; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (9.33)$$

$$g_+(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} P(X \leq x \mid X > 0) & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (9.34)$$

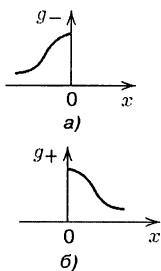


Рис. 9.2

В результате по (9.31) получим ПРВ

$$g(x) = (1 - p)g_-(x) + pg_+(x). \quad (9.35)$$

Это позволяет отличить проверяемый параметр (медиану) от параметра формы распределения и сформировать гипотезу в терминах вероятности p .

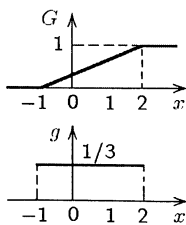


Рис. 9.3

Пример 9.5. Положим

$$g(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{при } -1 < x < 2; \\ 0 & \text{при других } x. \end{cases}$$

При этом (рис. 9.3)

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -1; \\ (x + 1)/3 & \text{при } -1 < x < 2; \\ 1 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

При $-1 < x < 0$

$$G_1(x) = P(X \leq x | X \leq 0) = x + 1.$$

$G_1(x)$ — функция распределения вероятности; $G_1(-1) = 0$; $G_1(0) = 1$, тогда

$$g_-(x) = \frac{d}{dx} G_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (-1, 0); \\ 0 & \text{при других } x. \end{cases}$$

Аналогично при $0 < x < 2$

$$G_2(x) = P(X \leq x | X > 0) = \frac{x}{2} [G_2(0) = 0; G_2(2) = 1],$$

тогда ПРВ (рис 9.4)

$$g_+(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } x \in (0, 2); \\ 0 & \text{при других } x. \end{cases}$$

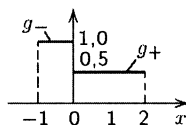


Рис. 9.4

Теперь $p = 1 - G(0) = 1 - 1/3 = 2/3 > 1/2$. Следовательно, ПРВ $g(x)$ можно рассматривать как равномерные ПРВ, взятые с весом $p = 2/3$.

В общем случае можно определить распределение выборок тройки (p, g_+, g_-) . В примере 9.5 — это $(2/3, g_+, g_-)$.

Гипотезы принимают вид

$$\begin{aligned} H_0 : & (1/2, g_+, g_-); \\ H_1 : & (p, h_+, h_-), \quad p > 1/2, \end{aligned} \quad (9.36)$$

где G и H — произвольные функции распределения соответствующей ПРВ.

На основе критерия Неймана-Пирсона в [87] находится РНМ критерий на основе наименее благоприятных распределений.

Процедура доказательства состоит из четырех этапов.

1. Устанавливается альтернативное распределение и по этому распределению выбирается сложная нулевая гипотеза так, чтобы её как можно труднее было отличить от установленной (фиксированной) альтернативы. Если распределение выбрано правильно, то это будет наименее благоприятное распределение.

2. Находится критерий Неймана-Пирсона размера α для этой простой гипотезы против простой альтернативы.

3. Показывается, что критерий сохранит размер α и в случае нулевой гипотезы.

4. Устанавливается независимость критерия от фиксированной альтернативы, и таким образом доказывается, что критерий равномерно наиболее мощный (РНМ).

В процессе доказательства следует:

1. Выбрать $p = p' > 1/2$ и h_+, h_- так, что альтернативой станет (p, h_+, h_-) .

2. Предположить, что наименее благоприятным будет распределение $(1/2, h_+, h_-)$ и проверить

$$H_0 : (1/2, h_+, h_-)$$

против

$$H_1 : (p', h_+, h_-)$$

с определенными $p' > 1/2, h_+, h_-$.

Пример 9.6.

1. Принимая во внимание пример 9.4, предположить, что наименее благоприятным распределением является распределение

$$\frac{1}{2}g_+(x) + \frac{1}{2}g_-(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } -1 < x < 0; \\ 1/4 & \text{при } 0 < x < 2; \\ 0 & \text{при других } x. \end{cases}$$

2. Согласно критерию Неймана-Пирсона гипотеза H_0 должна быть отклонена, если

$$\frac{\prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{2}h_-(x) + \frac{1}{2}h_+(x) \right]}{\prod_{i=1}^n [(1-p')h_-(x) + ph_+(x)]} \leq K. \quad (9.37)$$

Пусть x_i — i -я порядковая статистика и для выборки справедливы неравенства

$$x_{(1)} < \dots < x_{(t)} < 0 < x_{(t+1)} < \dots < x_{(n)}. \quad (9.38)$$

Тогда (9.37) можно записать в виде

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \prod_{i=1}^t h_-(x_{(i)}) \prod_{i=t+1}^n h_+(x_{(i)})}{(1-p')^n \prod_{i=1}^t h_-(x_{(i)}) \prod_{i=t+1}^n \left(\frac{p'}{1-p'}\right) h_+(x_{(i)})} \leq K. \quad (9.39)$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{(1/2)^n}{(1-p')^n} \left(\frac{1-p'}{p'}\right)^{n_+} \leq K. \quad (9.40)$$

где $n_+ = \sum_{i=t+1}^n u(x_i)$ — число положительных наблюдений.

Поскольку $p' > 1/2$, логарифмируя с учетом того, что K — требуемая постоянная, находим, что данный критерий эквивалентен отклонению H_0 при $S \geq k$, где S — статистика критерия знаков.

3. Критерий знаков — критерий размера α для сложной нулевой гипотезы, поскольку он свободен от распределения.

4. Критерий знаков — равномерно наиболее мощный (РНМ), поскольку критическая область не изменяется для всех $p' > 1/2$ и любых других h_+ , h_- .

Это означает, что для любой фиксированной альтернативы с положительной медианой нет критерия размера α с большей мощностью.

Рассмотрим другое решение задачи (9.39) применительно к непараметрическому обнаружению постоянного положительного сигнала. Этот подход отражен в работах [47, 49, 88].

Пример 9.7 [47, 49]. Непараметрическое обнаружение постоянно-положительного сигнала. Пусть задан вектор $\mathbf{X}_n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ наблюдений, $\{x_i\}$ — независимые СВ с одинаковой функцией распределения $F(x) = P(x_i \leq x)$.

Найти рабочую характеристику обнаружителя (РХО) непараметрического типа, рассматривая две непараметрические гипотезы:

$$\begin{aligned} H_0 : p &= 1/2; \\ H_1 : p &> 1/2, \end{aligned} \quad (9.41)$$

где

$$p = P(x_i > 0) = 1 - F(0). \quad (9.42)$$

Замечание. При гипотезе H_0 случайные величины представляют собой независимые наблюдения шума, имеющие нулевые медианы, а при альтернативе H_1 медианы этих независимых наблюдений больше нуля из-за присутствия в шуме аддитивного положительного сигнала.

Решение. Пусть $W = W_1(x_i)$ — некоторая ПРВ в случае, когда сигнал присутствует. Обозначим через W^+ и W^- — условные ПРВ СВ x_i при $x_i > 0$ и $x_i < 0$ соответственно.

Из определения условной ПРВ следует (9.35)

$$W = pW^+ + (1 - p)W^-. \quad (9.43)$$

Введем новую ПРВ W_0 , равную

$$W_0 = \frac{(W^+ + W^-)}{2}, \quad (9.44)$$

причем W_0 — это ПРВ СВ с нулевой медианой, так как она удовлетворяет (9.43) при $p = 1/2$.

Отношение правдоподобия (ОП) имеет вид

$$\Lambda(x) = \prod_{i=1}^n \frac{W_1(x_i)}{W_0(x_i)}. \quad (9.45)$$

Отношение $W_1(x_i)/W_0(x_i)$ принимает одно из двух возможных значений в зависимости от того, какое из неравенств $x_i > 0$ или $x_i < 0$ выполняется. Таким образом,

$$\frac{W_1(x_i)}{W_0(x_i)} = \frac{pW^+}{0,5W^+} = 2p \text{ при } x_i > 0; \quad (9.46)$$

$$\frac{W_1(x_i)}{W_0(x_i)} = \frac{(1-p)W^-}{0,5W^-} = 2(1-p) \text{ при } x_i < 0. \quad (9.47)$$

Поэтому ОП (9.45) принимает вид

$$\Lambda(x) = 2^n p^{n_+} (1-p)^{n-n_+}, \quad (9.48)$$

где $n_+ = \sum_{i=1}^n u(x_i)$; $u(x_i)$ — функция Хевисайда,

$$u(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i > 0; \\ 0 & \text{при } x_i < 0. \end{cases} \quad (9.49)$$

Формула (9.48) совпадает с (9.40), найденной несколько иначе.

Сравнение ОП $\Lambda(x)$ с порогом эквивалентно сравнению суммы

$$n_+ = \sum_{i=1}^n u(x_i) \quad (9.50)$$

с некоторой константой C .

По (9.48) получим

$$2^n p^{n_+} (1-p)^{n-n_+} > C_0,$$

если выполняется гипотеза H_1 . Отсюда находим

$$[2(1-p)]^n [p/(1-p)]^{n_+} > C_0,$$

или

$$[p/(1-p)]^{n_+} > [2(1-p)]^{-n} C_0 = C_1.$$

Взяв логарифм по основанию $p/(1-p)$, окончательно получим решающее правило

$$n_+ = \sum_{i=1}^n u(x_i) > \log_{p/(1-p)} C_1 = C. \quad (9.51)$$

Таким образом, обнаружитель Неймана–Пирсона в данном случае

представляет собой знаковый обнаружитель

$$n_+ = \sum_{i=1}^n u(x_i) \begin{cases} < C & \rightarrow H_0; \\ > C & \rightarrow H_1, \end{cases} \quad (9.52)$$

где постоянная C определяется заданной вероятностью ложной тревоги $Q_0 = \alpha$.

Случайная величина (9.50) равна числу k положительных (успешных) наблюдений и имеет биномиальное распределение с параметром p . Таким образом, распределение вероятностей при гипотезе H_1 определяется законом Бернулли

$$b(k, n, p) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (9.53)$$

Гипотезе H_0 соответствует распределение

$$b(k, n, 1/2) = C_n^k (1/2)^n, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (9.54)$$

Характеристика обнаружения имеет вид [49, 57]

$$Q_d = \sum_{k=c+1}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad (9.55)$$

где c (порог) — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству [49]

$$\alpha \geq \sum_{k=c}^n C_n^k (1/2)^n, \quad (9.56)$$

где $\alpha = Q_0$ — заданная вероятность ложной тревоги.

По (9.56) замечаем, что величина c в данном случае одинакова для всех распределений, соответствующих гипотезе H_0 , т.е. для всех распределений входного шума, имеющих нулевую медиану. Таким образом, знаковый обнаружитель является непараметрическим обнаружителем для гипотезы H_0 .

Пример 9.8. Рассмотрим проблему обнаружения постоянного сигнала в общем виде при наличии аддитивного шума, который имеет симметричную, а в остальном неизвестную ПРВ. Гипотезы принимают следующие:

$$\begin{aligned} H_0: p &= \frac{1}{2} \text{ или } \mu = 0, \text{ ПРВ } W \text{ симметрична, в остальном неизвестна,} \\ H_1: p &> \frac{1}{2} \text{ или } \mu > 0, \text{ ПРВ } W \text{ симметрична, в остальном неизвестна.} \end{aligned} \quad (9.57)$$

Здесь μ — среднее значение для ПРВ W и $p = P(x > 0) = 1 - F(0)$.

Сравним знаковый и линейный обнаружители по критерию АОЭ,

предварительно вычислив асимптотические значения ВЛТ Q_0 и вероятности обнаружения Q_d для двух обнаружителей и на этой основе определим объемы выборок n_1 и n_2 , соответственно для линейного и знакового обнаружителей, необходимых каждому из них для достижения одной и той же надежности (Q_0, Q_d) .

Алгоритм линейного обнаружения при объеме выборки n_1 , если принимается гипотеза H_1 , имеет вид

$$T = \sum_{k=1}^{n_1} x_k > T_1,$$

где x_i , $i = \overline{1, n_1}$, — входная выборка.

Статистика T асимптотически при $n_1 \gg 1$ имеет гауссовскую ПРВ со средним значением и дисперсией

$$E(T) = n_1 \mu; \quad D(T) = n_1 \sigma^2.$$

Тогда вероятность обнаружения Q_d находится по формуле

$$\begin{aligned} Q_{d1} &= \int_{T_1}^{\infty} W_1(x | H_1) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi n_1}} \int_{T_1}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - n_1 \mu}{\sigma \sqrt{n_1}} \right)^2 \right] dx = \\ &= Q(\gamma) = \Phi(-\gamma), \end{aligned} \quad (9.58)$$

где $\gamma = (T_1 - n_1 \mu) / \sigma \sqrt{n_1}$.

Аналогично находим асимптотическое значение ВЛТ Q_0 :

$$\begin{aligned} Q_{01} &= \int_{T_1}^{\infty} W_0(x | H_0) dx = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi n_1}} \int_{T_1}^{\infty} \exp \left(-\frac{x^2}{2n_1 \sigma^2} \right) dx = \\ &= Q(\gamma_1) = 1 - \Phi(\gamma_1), \end{aligned} \quad (9.59)$$

где $\gamma_1 = T_1 / \sigma \sqrt{n_1}$.

По (9.59) находим значение порога T_1 :

$$\frac{T_1}{\sigma \sqrt{n_1}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha_1), \quad \text{или} \quad T_1 = \sigma \sqrt{n_1} \Phi^{-1}(1 - \alpha_1), \quad (9.60)$$

где $\alpha_1 = Q_{01}$.

Подставляя величину T_1 в (9.58), получим

$$Q_{d1} = \Phi \left[\frac{n_1 \mu - \sigma \sqrt{n_1} \Phi^{-1}(1 - \alpha_1)}{\sigma \sqrt{n_1}} \right] = \Phi \left[\sqrt{n_1} \frac{\mu}{\sigma} - \Phi^{-1}(1 - \alpha_1) \right]. \quad (9.61)$$

В знаковом обнаружителе принимается гипотеза H_1 , если выполняется неравенство (9.51)

$$\sum_{i=1}^{n_2} u(x_i) > T_2. \quad (9.62)$$

Пусть k равно $n_+ = \sum_{i=1}^{n_2} u(x_i)$ — числу положительных отсчетов в выборке. При гипотезе H_1 $u(x_i)$ принимает значение, равное единице с вероятностью p , и, следовательно, $k = n_+$ — СВ, имеющая биномиальное распределение с параметрами (n_2, p) . Это распределение имеет вид

$$b(k; n_2, p) = C_{n_2}^k p^k (1-p)^{n_2-k}, \quad k = \overline{1, n_2}, \quad (9.63)$$

причем среднее значение и дисперсия СВ k таковы:

$$E(k) = n_2 p; \quad D(k) = n_2 p(1-p). \quad (9.64)$$

При значительных объемах выборки n_2 распределение (9.63) приближается к гауссовскому со средним значением и дисперсией (9.64).

Аналогично (9.58) находим вероятность обнаружения

$$\begin{aligned} Q_{d2} &= \int_{T_2}^{\infty} W_1(x | H_1) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D(k)}} \int_{T_2}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - E(k)}{\sqrt{D(k)}} \right)^2 \right] dx = Q(\gamma_3) = \Phi(-\gamma_3), \end{aligned}$$

$$\text{где } \gamma_3 = \frac{T_2 - E(k)}{\sqrt{D(k)}} = \frac{T_2 - n_2 p}{\sqrt{n_2 p(1-p)}}.$$

Таким образом, вероятность обнаружения

$$Q_{d2} = \Phi \left[\frac{n_2 p - T_2}{\sqrt{n_2 p(1-p)}} \right]. \quad (9.65)$$

При гипотезе H_0 $p = 1 - p = 1/2$, и СВ k подчиняется распределению

$$b(k; n_2, 1/2) = C_{n_2}^k (1/2)^{n_2}. \quad (9.66)$$

При значительных объемах выборки n_2 распределение вероятности СВ k (9.66) близко к нормальному при среднем значении и дисперсии СВ k (9.27)

$$E(k) = \frac{n_2}{2}; \quad D(k) = \frac{n_2}{4}. \quad (9.67)$$

Тогда асимптотическое значение ВЛТ Q_0 принимает вид

$$\begin{aligned} Q_{02} &= \int_{T_2}^{\infty} W_0(x | H_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n_2/4}} \int_{T_2}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - n_2/2}{\sqrt{n_2/2}} \right)^2 \right] dx = \\ &= Q(\gamma_4) = 1 - \Phi(\gamma_4). \end{aligned} \quad (9.68)$$

где $\gamma_4 = \frac{T_2 - n_2/2}{\sqrt{n_2}/2} = \frac{2T_2 - n_2}{\sqrt{n_2}}$. При $Q_{02} = \alpha_2$ получим

$$1 - \alpha_2 = \Phi(\gamma_4) \quad \text{или} \quad \gamma_4 = \frac{2T_2 - n_2}{\sqrt{n_2}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha_2).$$

Таким образом, величина порога

$$T_2 = \frac{1}{2}[n_2 + \sqrt{n_2}\Phi^{-1}(1 - \alpha_2)]. \quad (9.69)$$

Подставляя это значение T_2 в (9.65), получим

$$\begin{aligned} Q_{d2} &= \Phi \left\{ \frac{n_2 p - 0,5[n_2 + \sqrt{n_2}\Phi^{-1}(1 - \alpha_2)]}{\sqrt{n_2 p(1 - p)}} \right\} = \\ &= \Phi \left\{ \frac{\sqrt{n_2}(2p - 1) + \Phi^{-1}(1 - \alpha_2)}{2\sqrt{p(1 - p)}} \right\}. \end{aligned} \quad (9.70)$$

Найдем отношение n_1/n_2 при одинаковой надежности обнаружителя

$$Q_{d1} = Q_{d2} = Q_d; \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha. \quad (9.71)$$

По (9.61) и (9.70) получим равенство

$$\Phi \left[\frac{\sqrt{n_1}\mu}{\sigma} - \Phi^{-1}(1 - \alpha) \right] = \Phi \left[\frac{\sqrt{n_2}(2p - 1) + \Phi^{-1}(1 - \alpha)}{2\sqrt{p(1 - p)}} \right],$$

которому соответствует равенство аргументов

$$\frac{\sqrt{n_1}\mu}{\sigma} - \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \frac{\sqrt{n_2}(2p - 1) + \Phi^{-1}(1 - \alpha)}{2\sqrt{p(1 - p)}},$$

или

$$\frac{\sqrt{n_1}\mu}{\sigma} - \frac{\sqrt{n_2}(2p - 1)}{2\sqrt{p(1 - p)}} = h\Phi^{-1}(1 - \alpha),$$

$$\text{где } h = \frac{1 + 2\sqrt{p(1 - p)}}{2\sqrt{p(1 - p)}}.$$

Преобразуя левую часть равенства, получим

$$\sqrt{n_2} \left[\sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \frac{\mu}{\sigma} - \frac{2p - 1}{2\sqrt{p(1 - p)}} \right] = h\Phi^{-1}(1 - \alpha).$$

После деления на $\sqrt{n_2}$ находим

$$\sqrt{\frac{n_1}{n_2}} \frac{\mu}{\sigma} - \frac{2p - 1}{2\sqrt{p(1 - p)}} = \frac{1}{\sqrt{n_2}} h\Phi^{-1}(1 - \alpha),$$

или

$$\sqrt{\frac{n_1}{n_2}} = \frac{\sigma}{\mu\sqrt{n_2}} h\Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{(2p - 1)\sigma}{2\mu\sqrt{p(1 - p)}}.$$

Возведем в квадрат левую и правую части этого равенства:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sigma^2}{\mu^2 n_2} [h\Phi^{-1}(1 - \alpha)]^2 + \frac{(2p - 1)\sigma^2}{\mu^2 \sqrt{n_2 p(1 - p)}} h\Phi^{-1}(1 - \alpha) + \frac{(2p - 1)^2 \sigma^2}{4\mu^2 p(1 - p)}. \quad (9.72)$$

Используем определение асимптотической относительной эффективности (АОЭ)

$$\text{АОЭ}_{2,1} = \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty \\ H_1 \rightarrow H_0}} \frac{n_1}{n_2}. \quad (9.73)$$

В результате по (9.72) получим

$$\text{АОЭ}_{2,1} = \frac{(2p - 1)^2 \sigma^2}{4\mu^2 p(1 - p)}. \quad (9.74)$$

Полученное выражение для $\text{АОЭ}_{2,1}$ не является наглядным. Чтобы сделать его полезным необходимо учесть ряд факторов: симметричность ПРВ, $p > 1/2$ (при гипотезе H_1), малое значение величины μ (поскольку в (9.73) $H_1 \rightarrow H_0$).

Из определения величины p следует

$$p = P(x_i > 0) = 1 - F(0) = 1 - \int_{-\infty}^0 W(x) dx,$$

где $W(x)$ — симметричная ПРВ при среднем значении μ и дисперсии σ^2 .

После подстановки $y = x - \mu$ получим

$$\begin{aligned} p &= 1 - \int_{-\infty}^{-\mu} W_1(y) dy = 1 - \int_{\mu}^{\infty} W_1(y) dy = \int_{-\infty}^{\mu} W_1(y) dy = \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^{\mu} W_1(y) dy. \end{aligned}$$

Здесь $W(y)$ — симметричная ПРВ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 .

При малом μ величина p аппроксимируется выражением

$$p \approx \frac{1}{2} + \mu W_1(0).$$

Подставляя это значение p в (9.74), получим

$$\text{АОЭ}_{2,1} = \frac{[1/2 + \mu W(0) - 1/2]^2 \sigma^2}{\mu^2 [1/2 + \mu W(0)][1 - 1/2 - \mu W(0)]} = \frac{\mu^2 \sigma^2 W^2(0)}{\mu^2 [1/4 - \mu^2 W^2(0)]} =$$

$$= \frac{4\sigma^2 W^2(0)}{1 - 4\mu^2 W^2(0)}.$$

Здесь W_1 заменяется на W в силу незначительной величины μ . При $\mu \rightarrow 0$ $H_1 \rightarrow H_0$ и АОЭ знакового обнаружителя по отношению к линейному принимает вид [47, 49, 88]

$$\text{АОЭ}_{2,1} \approx 4\sigma^2 W^2(0) \quad (9.75)$$

при испытании гипотезы H_0 против альтернативности H_1 . По (9.75) видна независимость АОЭ от уровня ВЛТ α .

Чтобы получить конкретные числовые результаты, необходимо задаться видом ПРВ. Пусть шум является гауссовским СП с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 , тогда

$$W(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

и по (9.75) получим

$$\text{АОЭ}_{2,1} = 4\sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^2 = \frac{2}{\pi}. \quad (9.76)$$

Следовательно, эффективность обнаружителя составляет лишь 63,7 % эффективности линейного обнаружителя, когда шум на входе гауссовский с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 .

Допустим, что шум на входе лапласов с ПРВ

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-|x|\sqrt{2}/\sigma},$$

так что $W(0) = 1/\sigma\sqrt{2}$. Тогда по (9.75) получим

$$\text{АОЭ}_{1,2} = 4\sigma^2 \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \right)^2 = 2. \quad (9.77)$$

В этом случае эффективность знакового обнаружителя в 2 раза выше эффективности линейного обнаружителя.

Таким образом, оптимальный обнаружитель может быть хуже квазиоптимального в том случае, если условия, при которых проводилась оптимизация, изменяются.

В заключение следует отметить, что предел (9.73) может достигаться очень медленно. Для иллюстрации этого, можно привести графики зависимости $\delta = S_1/S_2$ от объема выборки n при достижении одной и той же надежности (Q_0, Q_d) при S_1 – ОСШ, требуемое приемником Неймана–Пирсона, S_2 – ОСШ, требуемое знаковым обнаружителем. На рис. 9.5 и 9.6 изображены соответствующие зависимости, когда $\delta = 10 \lg(S_1/S_2)$, $Q_d = 0,99$; $Q_0 = 10^{-3}$ и $Q_0 = 10^{-6}$.

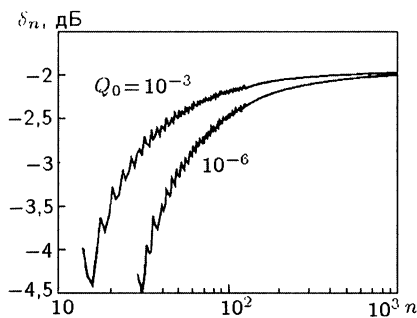


Рис. 9.5

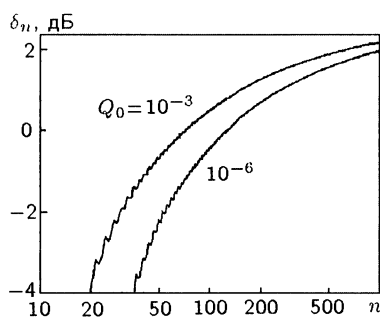


Рис. 9.6

На рис. 9.5 представлен результат [22] сравнения при гауссовском шуме на входе, когда пределом является величина

$$\delta_n = 10 \lg(2/\pi) = -1,9612.$$

На рис. 9.6 дан результат [22], когда на вход воздействует лапласов шум

$$\delta_n = 10 \lg 2 = 3,0103.$$

В этом и другом случаях отмечается медленное нарастание величины δ , причем во втором случае более медленное, чем в первом. В [22] отмечается, что даже при $n = 10^5$ относительная эффективность достигает величины лишь 2,91 дБ при $Q_d = 0,99$; $Q_0 = 10^{-6}$. Даже при $n = 100$ отношение δ значительно меньше предельной величины.

9.3. Свойства обнаружителя Вилкоксона

Согласно [86] критерий с критической областью $\{S^+ \geq C\}$, где

$$S^+ = S_y = \sum_{x_i > 0} R_i^+,$$

является локально наиболее мощным ранговым критерием для проверки H_0 против $\theta > 0$, когда ПРВ $W(x)$ логистического типа. Кроме того, этот критерий асимптотически оптимален для такой ПРВ.

Для сравнения линейного обнаружителя и обнаружителя Вилкоксона используем определение АОЭ в виде

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{1}{\text{var } S} \left\{ \frac{d}{d\theta} [E(S)]|_{\theta=\theta_0} \right\}^2, \quad (9.78)$$

где S — статистика обнаружителя; $\theta = \theta_0$ — испытываемый параметр.

Для рассматриваемой проблемы обнаружения $\theta = \mu$.

Для того чтобы определить АОЭ, необходимо сначала найти среднее значение и дисперсию той и другой статистик и по (9.78) вычислить эффективность ξ каждого обнаружителя.

Среднее значение и дисперсия статистики $S_1 = \sum_{n=1}^{n_1} x_k$ линейного обнаружителя имеет вид

$$E(S_1) = n_1\mu; \quad D(S_1) = \text{var } S_1 = n_1\sigma^2. \quad (9.79)$$

Подставляя эти значения в (9.78), получим

$$\xi = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{n_1\sigma^2} \left\{ \left. \frac{d}{d\mu} [n_1\mu] \right|_{\mu=0} \right\}^2 = \frac{1}{\sigma^2}. \quad (9.80)$$

Найдем эффективность ξ_2 статистики S_2 Вилкоксона. Для нахождения среднего значения $E(S_2)$ воспользуемся представлением статистики $S_2 = S_y$ в виде (9.14), предварительно обозначив $u(x_i + x_j) = V_{ij}$, где [88]

$$U_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i > 0 \text{ и } x_i > |x_j|, \\ 0 & \text{при других значениях } x_i \text{ и } x_j. \end{cases}$$

Тогда статистику Вилкоксона запишем в виде

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} V_{ij}.$$

Ее среднее значение

$$E(S_2) = \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} E(V_{ij}). \quad (9.81)$$

Поскольку x_i и x_j — элементы случайной выборки, то среднее значение в (9.81) становится равным [88]

$$E(S_2) = \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} \rho = n_2^2 \rho, \quad (9.82)$$

где ρ — вероятность того, что x_i больше x_j или, эквивалентно, вероятность неравенства $x_i - x_j < 0$.

Известно, что ПРВ суммы независимых СВ равна свертке ПРВ слагаемых. Тогда, если $z = u + y$, то

$$W_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} W_u(z-y) W_y(y) dy.$$

Функция распределения $F_z(z)$ имеет вид

$$\begin{aligned} F_z(z) &= \int_{-\infty}^z W_z(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\lambda - y) W_y(y) dy d\lambda = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_u(z - y) W_y(y) dy. \end{aligned}$$

Отсюда находим ПРВ разности $x_j - x_i$, полагая $z = x_j - x_i$, в $F(\cdot)$ — $y \equiv x - \mu$ и вместо y в $W_y(\cdot)$ взяв x . Таким образом, получим

$$F(x_j - x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x_j - x_i + x - \mu) W(x) dx. \quad (9.83)$$

По определению,

$$\rho = P(x_j - x_i < 0) = F(0).$$

Следовательно, по (9.83) находим

$$\rho = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F(0 + x - \mu) W(x) dx. \quad (9.84)$$

Подставляя этот результат в (9.82) с последующим взятием частной производной, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} [E(S_2)] &= \frac{\partial}{\partial \mu} [n_2^2 \rho] = \\ &= n_2^2 \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F(x - \mu) W(x) dx \right\} = n_2^2 \left[- \int_{-\infty}^{\infty} W(x - \mu) W(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (9.85)$$

Дисперсия статистики Вилкоксона известна [47, 86]:

$$D(S_2) = \text{var } S_2 = \frac{1}{24} n_2 (n_2 + 1) (2n_2 + 1). \quad (9.86)$$

В результате с учетом (9.78), (9.85), (9.86) находится эффективность обнаружителя Вилкоксона:

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{24}{n_2^2 (n_2 + 1) (2n_2 + 1)} \times \\ &\times \left\{ n_2^2 \left[- \int_{-\infty}^{\infty} W(x - \mu) W(x) dx \right] \Big|_{\mu=0} \right\}^2 = \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{24 n_2^2}{(n_2 + 1) (2n_2 + 1)} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [W(x)]^2 dx \right\}^2 = 12 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [W(x)]^2 dx \right\}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, АОЭ обнаружителя Вилкоксона по отношению к

линейному обнаружителю определяется соотношением

$$\text{АОЭ}_{2,1} = 12\sigma^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [W(x)]^2 dx \right\}^2, \quad (9.87)$$

где $W(x)$ — ПРВ шума.

Рассмотрим два частных случая.

Пример 9.9. Пусть аддитивный шум — гауссовский СП с нулевым средним значением, тогда

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$$

При этом

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [W(x)]^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\sigma^2} dx = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (9.88)$$

Тогда по (9.87) получим

$$\text{АОЭ}_{2,1} = 12\sigma^2 \left(\frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \right)^2 = \frac{12\sigma^2}{4\sigma^2\pi} = \frac{3}{\pi}. \quad (9.89)$$

Следовательно, эффективность обнаружителя Вилкоксона по отношению к линейному обнаружителю составляет 95,5 %. Это является достаточно существенным, учитывая, что линейный детектор при гауссовском шуме является оптимальным. Таким образом, обнаружитель Вилкоксона не существенно проигрывает оптимальному обнаружителю.

Пример 9.10. Второй частный случай: шум лапласовый,

$$W(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|/\sigma}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [W(x)]^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-2\sqrt{2}|x|/\sigma} dx = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\infty} e^{-2\sqrt{2}x/\sigma} dx = \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\text{АОЭ}_{2,1} = 12\sigma^2 \left(\frac{1}{2\sigma\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{12\sigma^2}{8\sigma^2} = \frac{3}{2} = 1,5. \quad (9.90)$$

Отсюда следует, что обнаружитель Вилкоксона в 1,5 раза эффектив-

нее линейного обнаружителя в том случае, если шум имеет ПРВ Лапласа.

Можно показать [49], что нижней границей АОЭ_{2,1} является

$$\text{АОЭ}_{2,1} = 0,864. \quad (9.91)$$

Это означает, что обнаружитель Вилкоксона имеет эффективность не ниже 86,4 % эффективности линейного обнаружителя независимо от ПРВ сопутствующего шума.

Воспользуемся еще одним определением АОЭ [22]

$$\text{АОЭ}_{2,1} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{D_2^2}{D_1^2},$$

где D_1^2 и D_2^2 — ОСШ (девиация) для двух обнаружителей, когда на входе имеется сигнал интенсивностью A . Тогда [22, Ф-ла (4.68)]

$$D^2 = \frac{[E(x | H_1, A) - E(x | H_0)]^2}{\text{var}_0 x} \approx \frac{A^2}{\text{var}_0 x} \left[\frac{\partial}{\partial A} E(x | H_1, A) \right]^2 = A^2 \eta,$$

где $\eta = \frac{1}{\text{var}_0 x} \left[\frac{\partial}{\partial A} E(x | H_1, A) \right]^2$. Параметр η называется эффективностью обнаружителя. Тогда [22]

$$\text{АОЭ}_{1,2} = \frac{\eta_2}{\eta_1}.$$

Пример 9.11. Рассмотрим статистику Вилкоксона в виде

$$r = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M u(x_j + x_i).$$

Найдем среднее значение $E(r | H_1)$, разбивая двойную сумму на два слагаемых: при $i = j$ и $i \neq j$. В первом случае сумма содержит M слагаемых, во втором $M(M-1)/2$ слагаемых. В результате получим

$$E(r | H_1) = ME[u(x_i) | H_1] + \frac{1}{2}M(M-1)E[u(x_j + x_i) | H_1, i \neq j].$$

В первом слагаемом

$$\begin{aligned} E[u(x_j) | H_1] &= \int_0^\infty W_1(x) dx = \int_0^\infty W_0(x - A) dx = \\ &= 1 - F_0(-A) = F_0(A), \end{aligned}$$

где $F_0(x) = \int_{-\infty}^x W_0(z) dz$. Для второго слагаемого в сумме $E(r | H_1)$ получим

$$E[u(x_j + x_i) | H_1, i \neq j] = \int_{-\infty}^\infty dx_i \int_{-x_i}^\infty W_1(x_i) W_1(x_j) dx_j =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x_1 - A) dx_1 \int_{-x_1}^{\infty} W_0(x_2 - A) dx_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x_1 - A) dx_1 \int_{-x_1 - A}^{\infty} W_0(x) dx.
\end{aligned}$$

После подстановки $x_1 - A = y$ находим

$$\begin{aligned}
E[u(x_j + x_i) | H_1, i \neq j] &= \int_{-\infty}^{\infty} W_0(y) dy \int_{-y-2A}^{\infty} W_0(x) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} W_0(y) dy \int_{-\infty}^{y+2A} W_0(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(y) F_0(y + 2A) dy.
\end{aligned}$$

Найдем числитель девиации D^2 :

$$\begin{aligned}
E(r | H_1) - E(r | H_0) &= \frac{1}{2} M(M-1) \int_{-\infty}^{\infty} W_0(y) [F_0(y+2A) - F_0(y)] dy + \\
&\quad + F_0(0) + M[F_0(A) - F_0(0)].
\end{aligned}$$

При малых значениях A , $A \ll \sigma$, справедливо приближенное равенство

$$F_0(y + 2A) - F_0(y) \approx F'_0(y) 2A = 2A W_0(y).$$

В результате получим

$$E(r | H_1) - E(r | H_0) \approx M(M-1)A \int_{-\infty}^{\infty} [W_0(y)]^2 dy + O(M),$$

где $O(M)$ слагаемое порядка M , которым можно пренебречь при $M \gg 1$.

Найдем знаменатель девиации D^2 , а именно дисперсию статистики Вилкоксона при отсутствии сигнала. Воспользуемся представлением статистики Вилкоксона

$$r = \sum_{k=1}^M k u(x_k) = \sum_{k=1}^M k w_k,$$

причем известно, что СВ w_k независимы и

$$P\{w_k = 1 | H_0\} = P\{w_k = 0 | H_0\} = \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\text{var}_0 r = \sum_{k=1}^M k^2 \text{var}_0 w_k = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^M k^2 = \frac{1}{24} M(M+1)(2M+1).$$

В последнем случае использовалось равенство [59, ф-ла 0.121.2; 87,

Теорема А.21]

$$\sum_{k=1}^M k^2 = \frac{1}{6}M(M+1)(2M+1).$$

Таким образом, девиация статистики Вилкоксона

$$D_r^2 = 12MA^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} [W_0(y)]^2 dy \right]^2 = D_2^2.$$

Для сравнения при вычислении АОЭ_{2,1} используется статистика линейного обнаружителя

$$G = \sum_{i=1}^M x_i,$$

причем $E(G | H_0) = 0$; $E(G | H_1) = MA$; $\text{var}_0 G = M\sigma^2$. В результате девиация здесь совпадает с ОСШ

$$D_G^2 = MA^2/\sigma^2 = D_1^2.$$

Окончательно получим

$$\text{АОЭ}_{2,1} = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{D_r^2}{D_G^2} = 12\sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} [W_0(x)]^2 dx \right]^2.$$

Найдем надежность (Q_0, Q_d) обнаружителя Вилкоксона.

При значительных объемах выборки n при гипотезе H_0 получим по (9.19) и (9.86)

$$E(S_2 | H_0) \approx n^2/4; \quad D(S_2 | H_0) \approx n^3/12. \quad (9.92)$$

Тогда при условии нормализации статистики Вилкоксона, получим ВЛТ $Q_0 = \alpha$:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi D(S_2)}} \int_C^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - n^2/4)^2}{2D(S_2)} \right] dx = Q \left(\frac{C - n^2/4}{\sqrt{n^3/12}} \right) = \\ &= 1 - \Phi \left(\frac{C - n^2/4}{\sqrt{n^3/12}} \right). \end{aligned} \quad (9.93)$$

Порог C в алгоритме Вилкоксона $S_2 \geq C$ находится из уравнения

$$\frac{C - n^2/4}{\sqrt{n^3/12}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha).$$

Отсюда находим

$$C = \frac{n}{2} \left[\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{3}} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \right]. \quad (9.94)$$

Таблица 9.6

ПРВ помехи	АОЭ для обнаружителя	
	линейного	знакового
Гаусса	0,955	1,5
Лапласа	1,5	0,75
Равномерная	1	3
$W_H(x)$	0,864	1,94

Уточненное значение порога T имеет вид [49]

$$T = \mu_n + \sigma_n \Phi^{-1}(1 - \alpha),$$

где $\mu = n(n+1)/4$; $\sigma_n^2 = n(n-1)(2n-1)/24$.

Вероятность обнаружения Q_d найдем, если согласно (9.82) и (9.92) положим

$$E(S_2 | H_1) = n^2 \rho; \quad D(S_2 | H_1) \approx \frac{n^3}{12}.$$

Тогда получим

$$Q_d = Q\left(\frac{C - n^2 \rho}{\sqrt{n^3/12}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{C - n^2 \rho}{\sqrt{n^3/12}}\right),$$

где C определяется по (9.94).

В заключение приведем таблицу [43], в которой приводятся АОЭ обнаружителя Вилкоксона по отношению к линейному и знаковому обнаружителям (табл. 9.6) при указанных в таблице помехах. В последней строке приводится наименее благоприятное распределение помехи, ее ПРВ [43]

$$W_H(x) = \frac{3}{4\sigma\sqrt{5}} \left(1 - \frac{x^2}{5\sigma^2}\right); \quad |x| \leq \sigma\sqrt{5}.$$

В табл. 9.7 приведены АОЭ непараметрических обнаружителей по отношению к линейному оптимальному обнаружителю [49].

Таблица 9.7

Вид обнаружителя	ПРВ помехи				Нижняя граница АОЭ
	Гаусса	Лапласа	Равномерная	Экспоненциальная	
Знаковый	0,637	2,00	0,333	—	0
Вилкоксона	0,955	1,5	1,00	—	0,864
Фишера-Иэйтса	1,00	—	—	—	1,0
Ван дер Вардена	1,00	—	—	—	1,0
Кендалла	0,912	—	—	0,312	—
Спирмена	0,912	—	—	0,312	—

9.4. Двухканальные системы обнаружения сигналов

Обнаружители с двумя входами. До сих пор рассматривались обнаружители с одним входом. Однако на практике встречаются обнаружители с двумя входами. Соответствующие алгоритмы могут быть названы двухвыборочными или двухканальными. Такие обнаружители можно разбить на два класса: 1 — обнаружители с одним входом (сигнальным) и с опорным шумовым вторым входом; 2 — обнаружители с двумя сигнальными входами.

Обнаружители первого класса полезны при испытаниях гипотез на положительный сдвиг ПРВ. К первому классу, в частности, относится двухвыборочная версия t -статистики Стьюдента, которая асимптотически непараметрическая, сюда же примыкает обнаружитель Манна–Уитни (двухвыборочный обнаружитель Вилкоксона), а также обнаружитель нормальных меток (normal scores test).

К второму классу относятся по существу различные корреляторы, вычисляющие корреляцию между двумя входами. Эти обнаружители находят применение в задачах обнаружения случайных сигналов с заданной ПРВ. Сюда относится обычный асимптотически непараметрический коррелятор, ρ -обнаружитель Спирмена и τ -обнаружитель Кендалла.

Двухвыборочный обнаружитель Вилкоксона называется также обнаружителем Манна–Уитни. Он предназначен для обнаружения положительного сдвига ПРВ. На него поступает две последовательно-сти наблюдений; одна из них представляет шумовые отсчеты $\mathbf{X}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ с функцией распределения $F(\mathbf{X}_n)$, а другая — это ряд наблюдений, подлежащих испытанию $\mathbf{Y}_m = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ с функцией распределения $G(\mathbf{Y}_m)$.

Гипотезы и ее альтернативы записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad F(\mathbf{X}_n) = G(\mathbf{Y}_m) \text{ для всех } \mathbf{X}_n \text{ и } \mathbf{Y}_m; \\ H_1 : & \quad F(\mathbf{X}_n) \geq G(\mathbf{Y}_m) \text{ для всех } \mathbf{X}_n \text{ и } \mathbf{Y}_m \text{ и } F(\mathbf{X}_n) > G(\mathbf{Y}_m) \\ & \quad \text{для некоторых } \mathbf{X}_n \text{ и } \mathbf{Y}_m. \end{aligned} \quad (9.95)$$

Сформулированное положение соответствует утверждению о необходимости обнаружить положительный сдвиг ПРВ наблюдений \mathbf{Y}_m .

Иначе говоря, рассматриваемый критерий Вилкоксона (Манна–Уитни) предназначен для проверки гипотезы H_0 об однородности двух случайных выборок: $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ и $\zeta'_1, \zeta'_2, \dots, \zeta'_m$. Предполагается, что элементы обеих выборок взаимно независимы и подчиняются непрерывным распределениям. Основная гипотеза H_0 заключается в предположении, что обе выборки извлечены из одной и той же совокупности, и, значит, функции распределения $F(\mathbf{X}_n)$ и $G(\mathbf{Y}_m)$ случайных

величин ζ и ζ' одинаковы. Эту гипотезу можно также выразить тождеством

$$H_0: P\{\zeta < x\} \equiv P\{\zeta' < x\}, \quad |x| < \infty,$$

и воспользоваться для ее проверки ранговым критерием (без ограничения общности предположения, что $m \leq n$, в противном случае ζ и ζ' можно поменять местами).

Составим из величин ζ_i и ζ'_i один общий вариационный ряд, т.е. расположим ζ_i и ζ'_i в порядке возрастания их значений. В результате получим последовательность типа

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} y & y & x & y & y & y & x & x & x & x & \dots & y & & x & & x \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \dots & N-2 & N-1 & N \end{array}$$

где $N = m + n$, а x и y — члены вариационного ряда, принадлежащие выборкам ζ_i и ζ'_j соответственно. Снизу указаны порядковые номера (ранги).

Обнаружитель предложен Вилкоксоном в 1945 г. и состоит из алгебраического ранжирования $m + n$ доступных наблюдений и последующего суммирования рангов наблюдений x_i и сравнения полученной статистики с порогом

$$S = \sum_{i=1}^n R_{x_i} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T_0. \quad (9.96)$$

Отсюда видно, что гипотеза H_0 принимается, если статистика превышает фиксированный порог.

Поскольку в инженерной практике обычно применяется превышение порога для альтернативы, то статистику можно модифицировать и рассматривать в виде

$$S' = \sum_{j=1}^m R_{y_j} \underset{H_1}{\overset{H_0}{\geq}} T_1. \quad (9.97)$$

где R_{y_j} — ранги случайных величин ζ'_i в общем вариационном ряду. Решение (9.97) эквивалентно решению (9.96).

Статистика Манна–Уитни имеет форму

$$U = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n u(x_i - y_j) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} T_2, \quad (9.98)$$

где $u(x)$ — единичная функция.

По (9.98) U -обнаружитель подсчитывает число раз, которое наблюдение x_n превышает наблюдение y_m и принимается гипотеза H_0 , когда эта статистика превышает порог T_2 .

По той же причине, что и переход к (9.97), можно ввести новую статистику

$$U' = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n u(y_j - x_i) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} T_3,$$

которая эквивалентна статистике U (9.98).

В своей работе Манн и Уитни показали справедливость соотношения

$$U = mn + [m(m+1)/2] - S', \quad (9.99)$$

где статистика S' основана на рангах наблюдений \mathbf{Y}_m и определяется по (9.97).

Для дальнейших расчетов необходимы среднее значение $E(S' | H_0)$ и дисперсия $\text{var}(S' | H_0)$. Эти параметры статистики S' имеют вид [38, 49]

$$E(S' | H_0) = \frac{1}{2}m(N+1); \quad \text{var}(S' | H_0) = \frac{1}{2}mn(N+1), \quad (9.100)$$

где $N = m + n$.

Можно показать [49], что АОЭ обнаружителя Манна-Уитни по отношению к обнаружителю Стьюдента (с t -статистикой) имеет вид

$$\text{АОЭ}_{\text{МУ},t} = 12\sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} W^2(u) du \right]^2. \quad (9.101)$$

В случае нормального распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-u^2/\sigma^2} du = \frac{1}{2\pi\sigma^2} (\sigma\sqrt{\pi}) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}}.$$

Поэтому

$$\text{АОЭ}_{\text{МУ},t} = 3/\pi = 0,955. \quad (9.102)$$

Таким образом, эффективность обнаружителя Манна-Уитни составляет 95,5 % эффективности оптимального параметрического обнаружителя в случае гауссовской помехи. В случае негауссовской помехи этот показатель может превысить единицу.

Пусть $\mathbf{X}_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $\mathbf{Y}_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ представляют собой случайные векторы, координаты которых суть независимые, одинаково распределенные наблюдения, поступающие на два входа двухканального обнаружителя. Если сигнал отсутствует, то X_n и Y_n состоят из отсчетов независимых СП. Если присутствует сигнал, то координаты этих векторов состоят из отсчетов случайного сигнала в аддитивной смеси с независимым СП в каждом канале. Таким образом, при наличии сигнала два процесса на входе обнаружителя становятся коррелированными.

Проблема обнаружения формулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} H_0 : & \text{ ПРВ } W_0(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) \text{ гауссова при } r = 0; \\ H_1 : & \text{ ПРВ } W_0(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) \text{ гауссова при } r < 0; \end{aligned} \quad (9.103)$$

где $W_i(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)|_{i=0,1}$ — совместная ПРВ векторов \mathbf{X}_n и \mathbf{Y}_n ; r — коэффициент корреляции.

Допустим, это каждое наблюдение x имеет функцию распределения $F(x)$ со средним значением μ_x и дисперсией σ_x^2 , аналогично для y имеем $F(y)$ и μ_y и σ_y^2 .

Коэффициент корреляции при гипотезе H_1 имеет вид

$$r = \frac{E[(x - \mu_x)(y - \mu_y) | H_1]}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (9.104)$$

Если оба шумовых процесса имеют нулевые средние значения и одинаковые дисперсии, равные σ_0^2 , а у сигнала среднее значение равно μ_s и неизвестная дисперсия σ_s^2 , то $x = s + n_1$; $y = s + n_2$ и по (9.1) находим

$$r = \frac{E[(s + n_1 - \mu_s)(s + n_2 - \mu_s) | H_1]}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_0^2} \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_0^2}} = \frac{E[(s - \mu_s)^2]}{\sigma_s^2 + \sigma_0^2} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma_0^2}. \quad (9.105)$$

При гипотезе H_0 получим

$$W_0 = (\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n | H_0) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi\sigma_0^2} \exp \left[-\frac{(x_i^2 + y_i^2)}{2\sigma_0^2} \right].$$

Аналогично при гипотезе H_1

$$\begin{aligned} W_1(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n | H_1) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi(\sigma_s^2 + \sigma_0^2)\sqrt{1-r^2}} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_i - \mu_s)^2}{\sigma_s^2 + \sigma_0^2} - \frac{2r(x_i - \mu_s)(y_i - \mu_s)}{\sigma_s^2 + \sigma_0^2} + \frac{(y_i - \mu_s)^2}{\sigma_s^2 + \sigma_0^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Без потери общности можно положить $\mu_s = 0$, тогда ПРВ $W_1(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ принимает вид

$$W_1(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n | H_1) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi(\sigma_s^2 + \sigma_0^2)\sqrt{1-r^2}} \exp \left[-\frac{x_i^2 - 2rx_i y_i + y_i^2}{2(1-r^2)(\sigma_s^2 + \sigma_0^2)} \right].$$

Упростим это выражение, учитывая, что $\sigma_s^2 + \sigma_0^2 = \sigma_0^2/(1-r)$. Тогда получим

$$W_1(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n | H_1) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{2\pi(\sigma_s^2 + \sigma_0^2)\sqrt{1-r^2}} \exp \left[-\frac{x_i^2 - 2rx_i y_i + y_i^2}{2(1+r)\sigma_0^2} \right].$$

В результате деления W_1/W_0 находим ОП

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) &= \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_s^2 + \sigma_0^2)\sqrt{1-r^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{-x_i^2 - y_i^2}{\sigma_0^2} + \frac{x_i^2 - 2rx_iy_i + y_i^2}{\sigma_0^2(1+r)} \right] \right\} = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_s^2 + \sigma_0^2)\sqrt{1-r^2}} \exp \left[\frac{x_i^2 + y_i^2 + rx_i^2 + ry_i^2 - x_i^2 + 2rx_iy_i - y_i^2}{2\sigma_0^2(1+r)} \right] = \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\sigma_0^2}{(\sigma_s^2 + \sigma_0^2)\sqrt{1-r^2}} \exp \left[\frac{r}{2\sigma_0^2(1+r)} (x_i + y_i)^2 \right]. \end{aligned}$$

Взяв логарифм, получим в случае, если справедлива гипотеза H_1 ,

$$\begin{aligned} l(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) &= \ln \Lambda(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) = \\ &= n \ln \left[\frac{\sigma_0^2}{(\sigma_s^2 + \sigma_0^2)\sqrt{1-r^2}} \right] + \frac{r}{2\sigma_0^2(1+r)} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 > T'. \end{aligned}$$

Включая первое слагаемое и множитель у второго слагаемого в величину порога, получим, что принимается гипотеза H_1 , если

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 > T, \quad (9.106)$$

что представляет собой наиболее мощный обнаружитель Неймана–Пирсона при испытании гипотез H_0 и H_1 , при условии все процессы имеют нулевые средние значения.

Структурная схема обнаружителя, реализующего алгоритм (9.106), изображена на рис. 9.7 (ПУ — пороговое устройство).

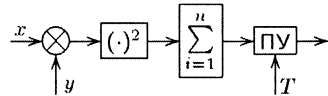


Рис. 9.7

Найдем характеристики обнаружения (Q_0, Q_d) данного обнаружителя. Вычислим среднее значение и дисперсию статистики S (9.106) при гипотезе H_0 :

$$\begin{aligned} m^{(0)} &= E(S | H_0) = \sum_{i=1}^n [E(x_i^2 | H_0) + 2E(x_i y_i | H_0) + E(y_i^2 | H_0)] = \\ &= 2n\sigma_0^2, \end{aligned} \quad (9.107)$$

так как $E(x_i y_i | H_0) = 0$;

$$\begin{aligned} D_0 &= D_{S|H_0} = \text{var}(S | H_0) = E(S^2 | H_0) - E^2(S | H_0) = \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i + y_i)^2 (x_j + y_j)^2 | H_0 \right] - (2n\sigma_0^2)^2 = -4n^2\sigma_0^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n E[(x_i + y_i)^2 (x_j + y_j)^2 \mid H_0] + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n E[(x_i + y_i)^2 (x_j + y_j)^2 \mid H_0] = \\
& = n[E(x_i^4 \mid H_0) + 6E(x_i^2 y_i^2 \mid H_0) + E(y_i^4 \mid H_0)] + n(n-1) \times \\
& \times [E(x_i^2 y_j^2 \mid H_0) + E(y_i^2 y_j^2 \mid H_0) + E(x_j^2 y_i^2 \mid H_0) + E(x_i^2 x_j^2 \mid H_0)] - 4n^2 \sigma_0^4 = \\
& = 12n\sigma_0^4 + 4n(n-1)\sigma_0^4 - 4n^2 \sigma_0^4.
\end{aligned}$$

При вычислениях учтено, что

$$\begin{aligned}
E(x_i^4 \mid H_0) &= E(y_i^4 \mid H_0) = 3\sigma_0^4; \\
E(x_i^2 y_i^2 \mid H_0) &= E(x_i^2 \mid H_0)E(y_i^2 \mid H_0) = \sigma_0^4.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$D_0 = D_{S \mid H_0} = \text{var}(S \mid H_0) = 8n\sigma_0^4. \quad (9.108)$$

Среднее значение статистики S (9.106) при гипотезе H_1

$$m^{(1)} = E(S \mid H_1) = \sum_{i=1}^n [(\sigma_0^2 + \sigma_s^2) + 2\sigma_s^2 + (\sigma_0^2 + \sigma_s^2)] = 2n(\sigma_0^2 + 2\sigma_s^2). \quad (9.109)$$

Дисперсия статистики

$$\begin{aligned}
D_1 &= D_{S \mid H_1} = \text{var}(S \mid H_1) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n E[(x_i + y_i)^2 (x_j + y_j)^2 \mid H_1] + \\
& + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n E[(x_i + y_i)^2 (x_j + y_j)^2 \mid H_1] - [2n(\sigma_0^2 + \sigma_s^2)]^2 = 3n(4\sigma_s^2 + 2\sigma_0^2)^2 + \\
& + n(n-1)[4(\sigma_s^2 + \sigma_0^2) + 8\sigma_s^2(\sigma_s^2 + \sigma_0^2) + 4\sigma_s^4] - 4n^2(2\sigma_s^2 + \sigma_0^2) = \\
& = 8n(2\sigma_s^2 + \sigma_0^2)^2.
\end{aligned}$$

По (9.106) замечаем, что статистика S представляет собой сумму квадратов независимых и одинаково распределенных СВ, тогда согласно центральной предельной теореме при больших n эту сумму можно считать асимптотически нормальной с параметрами $m^{(0)}$ и D_0 при гипотезе H_0 $S_0 \sim N(m^{(0)}, D_0)$ и $m^{(1)}$ и D_1 — при гипотезе H_1 $S_1 \sim N(m^{(1)}, D_1)$. Поэтому ВЛТ

$$Q_0 = \alpha = P\{S > T \mid H_0\} = Q\left(\frac{T - m^{(0)}}{\sqrt{D_0}}\right) = 1 - \Phi\left[\frac{T - 2n\sigma_0^2}{\sqrt{8n\sigma_0^4}}\right]. \quad (9.110)$$

Аналогично находим вероятность обнаружения

$$Q_d = P\{S > T \mid H_1\} = Q\left(\frac{T - m^{(1)}}{\sqrt{D_1}}\right) = 1 - \Phi\left[\frac{T - 2n(\sigma_0^2 + 2\sigma_s^2)}{(\sigma_0^2 + 2\sigma_s^2)\sqrt{8n}}\right].$$

Подставляя сюда значение порога T , определяемого по (9.110):

$$T = \sigma_0^2\sqrt{8n}Q^{-1}(\alpha) + 2n\sigma_0^2 = \sigma_0^2\sqrt{8n}\Phi^{-1}(1 - \alpha) + 2\sigma_0^2n,$$

получим вероятность обнаружения в виде

$$Q_d = Q\left[\frac{Q^{-1}(\alpha) - \sqrt{2n}\sigma_s^2/\sigma_0^2}{1 + 2\sigma_s^2/\sigma_0^2}\right] = 1 - \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \sqrt{2n}\sigma_s^2/\sigma_0^2}{1 + 2\sigma_s^2/\sigma_0^2}\right]. \quad (9.111)$$

К двухканальным системам относится также коррелятор [90,91]. Алгоритм коррелятора при гипотезе H_1 имеет вид

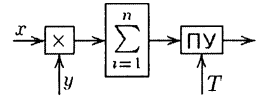


Рис. 9.8 (9.112)

$$S_k = \sum_{i=1}^n x_i y_i \geq T.$$

Схема коррелятора изображена на рис. 9.8.

Статистика S_k (9.112) выражается через сумму n независимых и одинаково распределенных СВ. При значительных объемах выборки n СВ

$$\xi = \frac{S_k - E(S_k)}{\sqrt{\text{var } S_k}}$$

согласно центральной предельной теореме имеет нормальное распределение с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

При обнаружении сигнала рассматриваются следующие гипотезы:

H_0 : \mathbf{X}_n и \mathbf{Y}_n — независимые с нулевым средним значением гауссовские СВ, каждая с дисперсией σ_0^2 ;

H_1 : \mathbf{X}_n и \mathbf{Y}_n — гауссовские СВ с нулевым средним значением, состоящие из сигнала с дисперсией σ_s^2 и аддитивного шума с дисперсией σ_0^2 .

Средние значения и дисперсии статистики S_k имеют вид

$$E(S_k \mid H_0); \quad \text{var}(S_k \mid H_0) = n\sigma_0^4;$$

$$E(S_k \mid H_1) = n\sigma_s^2; \quad \text{var}(S_k \mid H_1) = n(\sigma_0^2 + 2\sigma_0^2\sigma_s^2).$$

В результате находим ВЛТ $Q_0 = \alpha$

$$Q_0 = \alpha = P\{S_k > T \mid H_0\} = Q\left(\frac{T}{\sigma_0^2\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{T}{\sigma_0^2\sqrt{n}}\right). \quad (9.113)$$

Вероятность обнаружения

$$Q_d = P\{S_k > T \mid H_1\} = \\ = Q \left[\frac{T - n\sigma_s^2}{\sqrt{n(\sigma_0^4 + 2\sigma_0^2\sigma_s^2)}} \right] = 1 - \Phi \left[\frac{T - n\sigma_s^2}{\sqrt{n(\sigma_0^4 + 2\sigma_0^2\sigma_s^2)}} \right].$$

Выражая из (9.113) порог T через ВЛТ α , получим

$$T = \sigma_0^2 \sqrt{n} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \quad \text{или} \quad T = \sigma_0^2 \sqrt{n} Q^{-1}(\alpha).$$

Тогда вероятность обнаружения принимает вид

$$Q_d = Q \left[\frac{Q^{-1}(\alpha) - (\sigma_s^2/\sigma_0^2)\sqrt{n}}{\sqrt{1 + 2(\sigma_s^2/\sigma_0^2)}} \right] = 1 - \Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) - (\sigma_s^2/\sigma_0^2)\sqrt{n}}{\sqrt{1 + 2(\sigma_s^2/\sigma_0^2)}} \right]. \quad (9.114)$$

Сравним коррелятор с оптимальным обнаружителем Неймана-Пирсона. По (9.111) и (9.113) соответственно получим

$$\Phi^{-1}(1 - Q_d) = \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \sqrt{2n_1}(\sigma_s^2/\sigma_0^2)}{1 + 2(\sigma_s^2/\sigma_0^2)}; \\ \Phi^{-1}(1 - Q_d) = \frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \sqrt{2n_2}(\sigma_s^2/\sigma_0^2)}{1 + 2(\sigma_s^2/\sigma_0^2)}.$$

Приравнивая правые части этих соотношений, получим равенство $2n_2 = n_1$. Следовательно,

$$\text{АОЭ}_{2,1} = \lim_{\substack{n_1 \rightarrow \infty \\ n_2 \rightarrow \infty}} \frac{n_1}{n_2} = 2.$$

Таким образом, асимптотически коррелятор в два раза меньше требует объема выборки, чем оптимальный обнаружитель при одной и той же надежности (Q_0, Q_d) .

В том случае, если средние значения и дисперсии гауссовских сигнала и помехи неизвестны, то задача обнаружения сигнала (9.95) формулируется как задача проверки гипотезы $H_0: r = 0$ против альтернативы $H_1: r > 0$.

$$H_0: \text{ПРВ } W_0(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) \text{ — гауссова при } r = 0, \\ \mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2 \text{ неизвестны;} \\ H_1: \text{ПРВ } W_1(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) \text{ — гауссова при } r \neq 0, \\ \mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2 \text{ неизвестны.} \quad (9.115)$$

Здесь

$$W_0(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n \mid H_0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi\sigma_x\sigma_y)^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\}; \\
W_1(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n | H_1) &= \quad (9.116) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n [\sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - r^2)]^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1 - r^2)} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2r \left(\frac{x_i - \mu_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{y_i - \mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

При гипотезе H_0 методом максимального правдоподобия находятся оценки параметров ПРВ W_0

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_x &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; & \hat{\mu}_y &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \\
\hat{\sigma}_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_x)^2; & \hat{\sigma}_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}_y)^2.
\end{aligned}$$

В результате ПРВ $W_0(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n | H_0)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
&W_0(X_n, Y_n | H_0) = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n [\hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_y^2]^{n/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i - \hat{\mu}_x}{\hat{\sigma}_x} \right)^2 + \left(\frac{y_i - \hat{\mu}_y}{\hat{\sigma}_y} \right)^2 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем ПРВ

$$\begin{aligned}
W_1(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n | H_1) &= \frac{1}{(2\pi)^n [\hat{\sigma}_x^2 \hat{\sigma}_y^2]^{n/2}} \exp \left\{ \frac{1}{2(1 - \hat{r}^2)} \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{x_i - \hat{\mu}_x}{\hat{\sigma}_x} \right)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\hat{r} \left(\frac{x_i - \hat{\mu}_x}{\hat{\sigma}_x} \right) \left(\frac{y_i - \hat{\mu}_y}{\hat{\sigma}_y} \right) + \left(\frac{y_i - \hat{\mu}_y}{\hat{\sigma}_y} \right)^2 \right] \right\},
\end{aligned}$$

где $\hat{\mu}_x$, $\hat{\mu}_y$, $\hat{\sigma}_x^2$, $\hat{\sigma}_y^2$, \hat{r} — оценки параметров ПРВ (9.116) методом максимального правдоподобия:

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_x &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; & \hat{\mu}_y &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \\
\hat{\sigma}_x^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_x)^2; & \hat{\sigma}_y^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}_y)^2; \quad (9.117)
\end{aligned}$$

$$\hat{r} = \frac{1}{n\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu}_x)(y_i - \hat{\mu}_y). \quad (9.118)$$

После деления ПРВ $W_1(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n | H_1)$ на $W_0(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n | H_0)$ полу-

чим ОП $\Lambda(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$. Поскольку соотношения для оценок совпадают, искомое ОП принимает вид

$$\Lambda(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) = (1 - \hat{r}^2)^{-n/2}. \quad (9.119)$$

Таким образом, принимается гипотеза H_1 , если

$$\Lambda(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) = (1 - \hat{r}^2)^{-n/2} > T_1. \quad (9.120)$$

Это правило эквивалентно двум другим:

$$(1 - \hat{r}^2) < \left(\frac{1}{T_1}\right)^{2/n}, \quad \text{или} \quad \hat{r}^2 > 1 - \left(\frac{1}{T_1}\right)^{2/n}.$$

Окончательно получаем, что принимается гипотеза H_1 , если

$$\hat{r} > |\sqrt{1 - (1/T_1)^{2/n}}| = T. \quad (9.121)$$

Если учесть значение оценки для коэффициента корреляции (9.118), то вместо (9.121) получим

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right) \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \right)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(y_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j \right)^2}} > T. \quad (9.122)$$

Таким образом, алгоритм обнаружения основан на сравнении выборочного коэффициента корреляции \hat{r} с порогом T .

К двухканальным обнаружителям относится также коррелятор совпадения полярностей (КСП, или КП) (англ. РСС — polarity coincidence correlator). Данный коррелятор использует знаковый алгоритм. Принимается решение, что присутствует сигнал (гипотеза H_1), если

$$S_{\text{КП}} = \sum_{i=1}^n \text{sgn } x_i \text{sgn } y_i \geq T, \quad (9.123)$$

где x_i и y_i , $i = \overline{1, n}$, — две последовательности наблюдений, которые состоят из одного шума $x_i = v_{1i}$; $y_i = v_{2i}$ или из сигнала и аддитивного шума $x_i = s_i + v_{1i}$; $y_i = s_i + v_{2i}$. Здесь s_i , v_{1i} , v_{2i} по предположению, случайные независимые стационарные последовательности с одним и тем же законом распределения. Предполагается также, что соответствующие ПРВ имеют нулевую медиану и симметричны относительно начала координат.

Проверке подлежат гипотезы

$$\begin{aligned} H_0 : \quad x_i &= v_{1i}; \quad y_i = v_{2i}; \\ H_1 : \quad x_i &= s_i + v_{1i}; \quad y_i = s_i + v_{2i}, \end{aligned} \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.124)$$

При гипотезе H_0

$$\begin{aligned} P\{\operatorname{sgn} x_i \operatorname{sgn} y_i = +1 \mid H_0\} &= P\{x_i > 0, y_i > 0 \mid H_0\} + \\ &+ P\{x_i < 0, y_i < 0 \mid H_0\} = P\{x_i > 0 \mid H_0\} P\{y_i > 0 \mid H_0\} + \\ &+ P\{x_i < 0 \mid H_0\} P\{y_i < 0 \mid H_0\} = (1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/2. \end{aligned}$$

Аналогично находим

$$P\{\operatorname{sgn} x_i \operatorname{sgn} y_i = -1 \mid H_0\} = 1/2.$$

Если справедлива гипотеза H_1 , тогда [49]

$$\begin{aligned} P\{\operatorname{sgn} x_i \operatorname{sgn} y_i = +1 \mid H_1\} &= P\{x_i > 0, y_i > 0 \mid H_1\} + \\ &+ P\{x_i < 0, y_i < 0 \mid H_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{V_{1i} > -U, V_{2i} > -U\} W_s(U) dU + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} P\{V_{1i} < -U, V_{2i} < -U\} W_s(U) dU. \end{aligned} \quad (9.125)$$

Поскольку оба канала независимы и распределение шума симметрично относительно начала координат, то вероятности под знаком интеграла можно преобразовать к виду

$$P\{V_{1i} > -U, V_{2i} > -U\} = P\{V_{1i} > -U\} P\{V_{2i} > -U\} = [1 - F_v(-U)]^2.$$

Аналогично получаем

$$P\{V_{1i} < -U, V_{2i} < -U\} = P\{V_{1i} < -U\} P\{V_{2i} < -U\} = F_v^2(-U).$$

Тогда по (9.125) находим

$$\begin{aligned} P\{\operatorname{sgn} x_i \operatorname{sgn} y_i = +1 \mid H_1\} &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_v(-U)]^2 W_s(U) dU + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} F_v^2(-U) W_s(U) dU = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - 2F_v(-U) + 2F_v^2(-U)] W_s(U) dU = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 - 2F_v(-u) + 2F_v^2(-u)] W_s(u) du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [1 - 2F_v(\lambda) + 2F_v^2(\lambda)] W_s(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Определим величину

$$P_+ = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - 2F_v(\lambda) + 2F_v^2(\lambda)] W_s(\lambda) d\lambda. \quad (9.126)$$

Поскольку $F_V(x)$ имеет нулевую медиану, эта функция распределения может быть представлена в виде

$$F_V(\lambda) = F_V(0) + Q(\lambda) = \frac{1}{2} + Q(\lambda), \quad (9.127)$$

где $Q(0) = 0$ и $Q(\lambda)$ имеет положительные или отрицательные значения, если λ положительно или отрицательно соответственно. Используя это определение, найдем выражение для P_+ в другой форме:

$$\begin{aligned} P_+ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2Q(\lambda) + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2Q(\lambda) + Q^2(\lambda) \right] W_s(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} Q^2(\lambda) W_s(\lambda) d\lambda > \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (9.128)$$

Таким образом, для любого ненулевого сигнала, присутствующего в том и другом каналах, величина P_+ больше, чем $1/2$.

Заметим, что соотношение для P_+ (9.128), используя (9.127), можно записать в виде

$$P_+ = \frac{1}{2} + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[F_V(\lambda) - \frac{1}{2} \right]^2 W_s(\lambda) d\lambda, \quad (9.129)$$

что отличается от [43, формула (2.173)].

Распределение вероятностей для статистики $S_{\text{КП}}$ (9.123) можно найти, учитывая независимость каждого сомножителя в (9.123). Таким образом, получим

$$P\{S_{\text{КП}} = k - np\} = C_n^k p^k q^{n-k} = b(k, n, p),$$

тогда ВЛТ $\alpha = Q_0$ принимает вид

$$\alpha = P\{S_{\text{КП}} > T \mid H_0\} = \sum_{k=T'}^n C_n^k (1/2)^k (1/2)^{n-k}. \quad (9.130)$$

Это соотношение и равенство $T = T' - np$ могут быть использованы для нахождения порога T , чтобы получить желаемую ВЛТ.

При $P = P_+$ и уже определенном пороге T можно найти вероятность обнаружения.

Пример 9.12. Пусть

$$\begin{aligned} W_v(v) &= \begin{cases} 1 & \text{при } -1/2 < v < 1/2; \\ 0 & \text{при других } v; \end{cases} \\ W_s(s) &= \begin{cases} 1 & \text{при } -1/2 < s < 1/2; \\ 0 & \text{при других } s. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$F_v(U) = \int_{-1/2}^v W_v(\lambda) d\lambda = V + 1/2.$$

Сравнивая полученную функцию распределения с (9.127), находим $Q(V) = V$. Следовательно, по (9.128) [также, как и по (9.129)] вычислим P_+ :

$$P_+ = \frac{1}{2} + 2 \int_{-1/2}^{1/2} \lambda^2 d\lambda = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \lambda^3 \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Допустим, что установлена ВЛТ $\alpha = 0,25$ и $n = 10$, тогда

$$\alpha = \sum_{k=T'}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,25.$$

По табл. [49, табл. В-1] находим, что $\alpha = 0,1719$ при $T' = 7$.

$$\sum_{k=7}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}} (120 + 45 + 10 + 1) = \frac{176}{1024} = 0,171875.$$

Тогда порог $T = T' - np = 7 - 10 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Вероятность обнаружения

$$\begin{aligned} Q_d &= \sum_{k=T'=7}^{10} C_{10}^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} = \\ &= \frac{2^7}{3^{10}} (120 + 45 \cdot 2 + 10 \cdot 4 + 8) = \frac{128 \cdot 258}{59049} = 0,559. \end{aligned}$$

При значительных объемах выборки n статистика

$$S_{\text{ПК}}^{(1)} = \frac{S_{\text{ПК}} - E(S_{\text{ПК}})}{\sqrt{\text{var } S_{\text{ПК}}}} \quad (9.131)$$

подчиняется нормальному распределению с нулевым средним значением и единичной дисперсией.

Среднее значение и дисперсию статистики $S_{\text{ПК}}$ можно найти, если записать ее в виде

$$S_{\text{ПК}} = \sum_{i=1}^n W_i,$$

где W_i — независимые одинаково распределенные СВ. Тогда

$$E(S_{\text{ПК}}) = nE(W_i); \quad \text{var } S_{\text{ПК}} = n \text{var } W_i,$$

причем

$$E(W_i) = (-1)(1-p) + (+1)p = 2p - 1;$$

$$E(W_i^2) = (-1)^2(1-p) + (+1)^2p = 1;$$

$$\text{var } W_i = E(W_i^2) - E(W_i)^2 = 4p(1-p),$$

когда $p = 1/2$ при гипотезе H_0 и $p = p_+$ при гипотезе H_1 .

При гипотезе H_0 $E(S_{\text{ПК}} | H_0) = 0$; $\text{var}(S_{\text{ПК}} | H_0) = n$, тогда ВЛТ

$$Q_0 = \alpha = P\{S_{\text{ПК}} > T | H_0\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_T^\infty e^{-U^2/2n} dU, \quad (9.132)$$

или

$$\alpha = Q(T/\sqrt{n}) = 1 - \Phi(T/\sqrt{n}). \quad (9.133)$$

Если справедлива гипотеза H_1 , то

$$E(W_i | H_1) = 2p_+ - 1; \quad \text{var}(W_i | H_1) = 4p_+(1-p_+).$$

Тогда вероятность обнаружителя

$$Q_d = P\{S_{\text{ПК}} > T | H_1\} =$$

$$= Q\left[\frac{T - n(2p_+ - 1)}{\sqrt{4np_+(1-p_+)}}\right] = 1 - \Phi\left[\frac{T - n(2p_+ - 1)}{\sqrt{4np_+(-p_+)}}\right]. \quad (9.134)$$

причем порог T находится по (9.133):

$$T = \sqrt{n}Q^{-1}(\alpha) = \sqrt{n}\Phi^{-1}(1-\alpha). \quad (9.135)$$

Тогда

$$Q_d = 1 - \Phi\left[\frac{n\Phi^{-1}(1-\alpha) - n(2p_+ - 1)}{\sqrt{4np_+(1-p_+)}}\right] =$$

$$= 1 - \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha) - \sqrt{n}(2p_+ - 1)}{2\sqrt{p_+(1-p_+)}}\right]. \quad (9.136)$$

Пример 9.13. Найти порог T и вероятность обнаружения при заданной ВЛТ 0,25 в условиях примера 9.12.

Решение.

$$\alpha = 1 - \Phi(T/\sqrt{10}) = 0,75.$$

Отсюда при $\Phi(T/\sqrt{10}) = 0,75$ по таблице нормального распределения [38, 58] находим $T/\sqrt{10} = 0,6745$; $T = 2,13$. Тогда по (9.134) получим

$$Q_d = 1 - \Phi\left(\frac{2,13 - 10 \cdot 1/3}{\sqrt{80/9}}\right) = 1 - \Phi(-0,342) = \Phi(0,342) = 0,634.$$

В сравнении с примером 9.12 получили большую вероятность обнаружителя, отчасти по той причине, что использовано значение ВЛТ более близкое к заданному.

Поскольку статистика $S_{\text{ПК}}$ имеет биномиальное распределение при любых ПРВ сигнала и шума, то обнаружитель (КСП) является непараметрическим в данной проблеме проверки гипотезы.

Для того чтобы сравнить по эффективности КСП и другие обнаружители, необходимо вычислить значение P_+ по формуле (9.126).

В [93] показано, что в качестве P_+ можно приближенно принять значение

$$P_+ = 1/2 + 2(F'_V)^2 \sigma_s^2, \quad (9.137)$$

где $F'_v(0) = F'_v(\lambda)|_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda} F_v(\lambda)|_{\lambda=0}$, а $F_v(\lambda)$ — ПРВ шума.

При гауссовом шуме с нулевым средним значением

$$F'_v(0) = 1/\sigma_0 \sqrt{2\pi}.$$

Тогда по (9.137) следует

$$P_+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_0^2}. \quad (9.138)$$

Подставляя это значение P_+ в (9.136), получим

$$\begin{aligned} Q_d &= 1 - \Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \sqrt{n_3}(2/\pi)(\sigma_s^2/\sigma_0^2)}{2\sqrt{1/4 - (1/\pi^2)(\sigma_s^2/\sigma_0^2)^2}} \right] \approx \\ &\approx 1 - \Phi \left[\Phi^{-1}(1 - \alpha) - \frac{2\sqrt{n_3}}{\pi} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (9.139)$$

В последнем случае предполагается, что $\sigma_s^2/\sigma_0^2 \ll 1$, поэтому знаменатель заменяется на единицу.

Согласно определению, АОЭ представляет собой предел объемов выборки двух обнаружителей при которых каждый обнаружитель должен обладать одной и той же ВЛТ $Q_0 = \alpha$ и вероятностью обнаружения Q_d . Приравнивая вероятности обнаружения двух обнаружителей, найдем отношение объемов выборки.

Например, сравним эффективность полярного коррелятора (КСП) с вероятностью обнаружения (9.139) и эффективность обычного коррелятора с вероятностью обнаружителя (9.114). Тогда получим равенство $Q_d(n_1) = Q_d(n_3)$ или

$$1 - \Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(1 - \alpha) - (\sigma_s^2/\sigma_0^2)\sqrt{n_1}}{\sqrt{1 + 2(\sigma_s^2/\sigma_0^2)}} \right] = 1 - \Phi \left[\Phi^{-1}(1 - \alpha) - 2 \frac{\sqrt{n_3}}{\pi} \frac{\sigma_s^2}{\sigma_0^2} \right].$$

Пренебрегая в знаменателе левой части величиной $2\sigma_s^2/\sigma_0^2$ по сравнению с единицей ($\sigma_s^2/\sigma_0^2 \ll 1$), получим равенство

$$(\sigma_s^2/\sigma_0^2)\sqrt{n_1} = (2\sqrt{n_3}/\pi)(\sigma_s^2/\sigma_0^2),$$

или $n_1/n_3 = (2/\pi)^2$. Тогда АОЭ обнаружителя на основе КСП по сравнению с корреляционным обнаружителем

$$\text{АОЭ}_{\text{КСП,К}} = (2/\pi)^2 = 0,405.$$

Таким образом, при гауссовских помехах обнаружитель на основе КСП уступает корреляционному обнаружителю.

Пример 9.14. Найдем эффективность КСП по сравнению с оптимальным по Нейману–Пирсону обнаружителем. Для этого приравняем вероятности обнаружения $Q_d(n_3) = Q_d(n_2)$, когда $Q_d(n_2)$ находится по (9.111). Приходим к равенству при $2\sigma_s^2/\sigma_0^2 \ll 1$

$$\sqrt{2n_2}(\sigma_s^2/\sigma_0^2) = 2(\sqrt{n_3}/\pi)(\sigma_s^2/\sigma_0^2),$$

или $n_2/n_3 = (2/\pi)^2/2 = 2/\pi^2 = 0,202$.

$$\text{АОЭ}_{\text{КСП,НП}} = 2/\pi^2 = 0,202.$$

Коррелятор совпадения полярностей существенно уступает по эффективности оптимальному обнаружителю стохастического сигнала.

Иная картина наблюдается, если помеха отлична от гауссовской. Например, если помеха лапласова, тогда по (9.137) получим

$$P_+ = 1/2 + (\sigma_s^2/\sigma_0^2).$$

Тогда, подставляя это значение P_+ в (9.136), получим вероятность обнаружителя в виде

$$Q_d = 1 - \Phi \left[\frac{\Phi^{-1}(1-\alpha) - 2\sqrt{n_3}\sigma_s^2/\sigma_0^2}{2\sqrt{1/4 - (\sigma_s^2/\sigma_0^2)^2}} \right] \approx 1 - \Phi \left[\Phi^{-1}(1-\alpha) - 2\sqrt{n_3}\frac{\sigma_s^2}{\sigma_0^2} \right].$$

Из равенства $Q_d(n_3) = Q_d(n_2)$, где $Q_d(n_2)$ находится по (9.114), получаем эффективность КСП по отношению к коррелятору

$$1 - \Phi\{\Phi^{-1}(1-\alpha) - 2\sqrt{n_3}(\sigma_s^2/\sigma_0^2)\} = 1 - \Phi\{\Phi^{-1}(1-\alpha) - \sqrt{n_1}(\sigma_s^2/\sigma_0^2)\}.$$

Отсюда находим $n_1/n_3 = 4$.

Таким образом, АОЭ КСП по отношению к коррелятору при лапласовой помехе $\text{АОЭ}_{\text{КСП,К}} = 4$.

Аналогично можно показать, что АОЭ КСП по отношению к оптимальному для гауссовской помехи обнаружителю, когда действительная помеха лапласова имеет вид [43, 93]

$$\text{АОЭ}_{\text{КСП,НП}} = 3,5.$$

Таким образом, КСП более эффективен по сравнению с оптимальным обнаружителем стохастического сигнала в том случае, если нарушаются условия его оптимизации (меняется распределение помехи).

9.5. Ранговые алгоритмы обнаружения стохастического сигнала

Критерий Спирмена. Пусть имеется случайная выборка $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ из генеральной совокупности двумерной непрерывной СВ (X, Y) с функцией распределения $F(t, \tau)$, а $F_X(t)$ и $F_Y(\tau)$ — функции распределения СВ X и Y соответственно.

Если СВ X и Y имеют нормальные распределения, то для проверки статистической гипотезы об их независимости.

$$H_0 : F(t, \tau) = F_X(t)F_Y(\tau) \quad (9.140)$$

можно использовать выборочный коэффициент корреляции r .

Если о распределениях СВ X и Y ничего не известно, то для проверки гипотезы H_0 (9.140) при альтернативе

$$H_1 : F(t, \tau) \neq F_X(t)F_Y(\tau) \quad (9.141)$$

используется ранговый критерий Спирмена.

Обозначим через $R(x_i)$ и $S(y_i)$ ранги элементов x_i и y_i , $i = \overline{1, n}$. В частности, $R(x_i) = 1$, если x_i — наименьшее по величине значение x_i , $i = \overline{1, n}$; $R(x_i) = 2$, тогда x_i — второе по величине малости значения x_i и т.д.; наблюдение x_i с наибольшей величиной имеет ранг n .

Ранговым коэффициентом корреляции Спирмена называется СВ [49]

$$\rho(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R(x_i) - \bar{R})(S(y_i) - \bar{S})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R(x_i) - \bar{R})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (S(y_i) - \bar{S})^2}}. \quad (9.142)$$

Статистика (9.142) является выборочным коэффициентом корреляции последовательности рангов.

Согласно определению рангов

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}. \quad (9.143)$$

Аналогично

$$\bar{S} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(y_i) = \frac{n+1}{2}, \quad (9.144)$$

где использовано равенство [59, 87]

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (9.145)$$

Выборочная дисперсия рангов имеет вид

$$D_R = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R(x_i) - \bar{R})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(i - \frac{n+1}{2} \right)^2 = \frac{(n+1)(n-1)}{12}, \quad (9.146)$$

причем здесь использовано соотношение [59, 87]

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подставляя среднее значение \bar{R} и \bar{S} и дисперсии D_R и D_S в (9.142), получим ρ -статистику Спирмена в виде

$$\rho = \frac{1}{n(n+1)(n-1)/12} \sum_{i=1}^n \left(R(x_i) - \frac{n+1}{2} \right) \left(S(y_i) - \frac{n+1}{2} \right). \quad (9.147)$$

Другую форму ρ -статистике Спирмена можно придать, если ввести вспомогательную величину ρ_T [49]

$$\rho_T = \sum_{i=1}^n \{ [R(x_i) - \bar{R}] - [S(y_i) - \bar{S}] \}^2, \quad (9.148)$$

причем ρ_T можно представить в виде [49]

$$\rho_T = \frac{1}{6} n(n^2 - 1) - \sum_{i=1}^n [R(x_i) - \bar{R}] - [S(y_i) - \bar{S}],$$

В результате получим

$$\rho = \frac{1 - 6\rho_T}{n(n^2 - 1)}. \quad (9.149)$$

Обнаружитель, использующий статистику ρ_T вместо ρ -статистики Спирмена, называется обнаружителем Хотеллинга–Пабста (Hotelling–Pabst). Преимущество ρ_T -статистики перед ρ -статистикой в том, что первая требует меньше арифметических операций. Заметим, что [49] ρ_T велико, когда ρ мало, и наоборот.

Далее можно показать, что [94]

$$\rho = \rho(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n) = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n [R(x_i) - S(y_i)]^2. \quad (9.150)$$

Без ограничения общности можно считать, что значения пар наблюдений (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$, пронумерованы в порядке возрастания их элементов, тогда выполняются неравенства $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. В этом случае реализация r_i ранга $R(x_i)$ равна i , $i = \overline{1, n}$, и значение $\rho(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)$

статистики $\rho(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ вычисляется по формуле [38]

$$\rho(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (s_i - i)^2, \quad (9.151)$$

где s_i — реализация ранга $S(y_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Чтобы найти среднее значение и дисперсию ρ -статистики Спирмена, преобразуем правую часть (9.147) [49]:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{12}{n(n^2 - 1)} \left\{ \sum_{i=1}^n R(x_i)S(y_i) - \frac{n+1}{2} \left[\sum_{i=1}^n R(x_i) - \sum_{i=1}^n S(y_i) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n+1)^2}{4} \right\} = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \left\{ \sum_{i=1}^n R(x_i)S(y_i) - \frac{n(n+1)^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n+1)^2}{4} \right\} = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n R(x_i)S(y_i) - \frac{3(n+1)}{n-1}. \end{aligned} \quad (9.152)$$

В силу независимости рангов $R(x_i)$ и $S(y_i)$ получим

$$E \left[\sum_{i=1}^n R(x_i)S(y_i) \mid H_0 \right] = nE[R(x_i) \mid H_0]E[S(y_i) \mid H_0]; \quad (9.153)$$

$$\begin{aligned} \text{var} \sum_{i=1}^n [R(x_i)S(y_i) \mid H_0] &= n \text{var}[R(x_i) \mid H_0] \text{var}[S(y_i) \mid H_0] + \\ &\quad + n(n-1) \text{cov}[R(x_i)R(x_j) \mid H_0] \text{cov}[S(y_i)S(y_j) \mid H_0]. \end{aligned} \quad (9.154)$$

Если справедлива гипотеза H_0 , то ранги равновероятны, следовательно, [49]

$$E[R(x_i) \mid H_0] = E[S(y_i) \mid H_0] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i = \frac{n+1}{2}; \quad (9.155)$$

$$E[R^2(x_i) \mid H_0] = E[S^2(y_i) \mid H_0] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}; \quad (9.156)$$

Тогда

$$\text{var}[R(x_i) \mid H_0] = \text{var}[S(y_i) \mid H_0] = (n^2 - 1)/12. \quad (9.157)$$

Если справедлива гипотеза H_0 , то ковариация рангов принимает вид [49]

$$\text{cov}[R(x_i)R(x_j) \mid H_0] = E[R(x_i)R(x_j) \mid H_0] - E[R(x_i) \mid H_0] \times$$

$$\times E[R(x_j) | H_0] = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2, \quad i \neq j, \quad (9.158)$$

так как $n(n-1)$ — равновероятная комбинация рангов. Первое слагаемое (9.158) преобразуется к виду

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 - \sum_{i=1}^n i^2, \quad i \neq j.$$

В результате получим [49]

$$\begin{aligned} \text{cov}[R(x_i)R(x_j) | H_0] &= \frac{n \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 - n \sum_{i=1}^n i^2 - (n-1) \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2}{n^2(n-1)} = \\ &= \frac{1}{n^2(n-1)} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(2n+1)(n+1)}{6} \right] = -\frac{n+1}{12}. \end{aligned} \quad (9.159)$$

Таким образом, окончательно по (9.152) получим

$$E(\rho | H_0) = \frac{12nE[R(x_i) | H_0]E[S(y_i) | H_0]}{n(n^2-1)} - \frac{3(n+1)}{n-1} = 0; \quad (9.160)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\rho | H_0) &= \text{var} \left[\frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^n R(x_i)S(y_i) | H_0 \right] = \\ &= \frac{144}{n^2(n^2-1)^2} \text{var} \left[\sum_{i=1}^n R(x_i)S(y_i) | H_0 \right] = \frac{1}{n-1}. \end{aligned} \quad (9.161)$$

При $n > 0$ используется тот факт, что СВ $z = \rho\sqrt{n-1}$ асимптотически имеет нормальное распределение с нулевым средним значением и единичной дисперсией $[N(0, 1)]$.

Пример 9.15. Проверить гипотезу H_0 (9.140) при альтернативе H_1 при объеме выборке $n = 10$ и ВЛТ $Q_0 = \alpha = 0,1$.

Решение. По таблице ρ -статистики Спирмена [49] находим значение порога $T_1 = 0,4424$. Если использовать нормальную аппроксимацию, тогда

$$\alpha = \int_T^\infty N(0, \sigma) dx = Q(T/\sigma) = 1 - \Phi(T/\sigma).$$

При этом $T/\sigma = \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0,9) = 1,282$, полагая $\sigma^2 = \text{var}(\rho | H_0) = 1/(n-1) = 1/9$; $1/\sigma = 3$, получим $T = 0,4273$.

Пример 9.16. Наблюдения со своими рангами при $n = 10$ заданы табл. 9.8.

Принять решение, какую из гипотез следует отвергнуть.

Таблица 9.8

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	5,2	11	9,1	7,3	3,2	6,1	1,2	8,6	7	4,1
$R(x_i)$	4	10	9	7	2	5	1	8	6	3
y_i	3,2	7	8	6,4	6,1	10	4,2	7,2	5,1	3,3
$S(y_i)$	1	7	9	6	5	10	3	8	4	2

Решение. Вычислим величину ρ -статистики Спирмена по формуле (9.152)

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{12}{10(10^2 - 1)} \sum R(x_i)S(x_i) - \frac{3(10 + 1)}{10 - 1} = \\ &= \frac{12(4 + 70 + 81 + 42 + 10 + 50 + 3 + 64 + 24 + 6)}{990} - \frac{33}{9} = \\ &= 4,29 - 3,67 = 0,62.\end{aligned}$$

Ранговый критерий Спирмена отклоняет гипотезу H_0 , если $|\rho| > T$. В данном случае выполняется условие $0,62 > T = 0,4424$. Поэтому следует принять гипотезу H_1 .

Замечание. В общем случае ранговый критерий Спирмена отклоняет гипотезу H_0 на уровне значимости α , если

$$|\rho| > \rho_{1-\alpha/2}, \quad (9.162)$$

где $\rho_{1-\alpha/2}$ — квантиль уровня $1 - \alpha/2$ распределения СВ $\rho(\mathbf{X}_n, \mathbf{Y}_n)$ при истинности гипотезы H_0 .

Пример 9.17. Пусть наблюдения и их ранги заданы табл. 9.9 ($n = 10$).

Таблица 9.9

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	1,5	-0,7	-2,1	0,6	1,1	3,4	0,2	-1	-0,4	-2,3
$R(x_i)$	7	4	8	3	6	10	1	5	2	9
y_i	2,4	0,4	-2,1	-3	-0,6	1,7	1,9	-0,2	2,3	0,5
$S(y_i)$	9	2	7	10	4	5	6	1	8	3

Следует отметить, что из-за наличия отрицательных величин в выборках перед ранжировкой следует образовать вариационный ряд из абсолютных значений наблюдаемых величин. Например, ранг $y_3 = -2,1$ равен $R(y_3) = 7$, а ранг $y_9 = 2,3$ равен $R(y_9) = 8$. Требуется принять решение в пользу той или иной гипотезы.

Решение. Вычислим величину ρ -статистики Спирмена

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{12(63 + 8 + 56 + 30 + 24 + 50 + 6 + 5 + 16 + 27)}{990} - 3,67 = \\ &= 3,45 - 3,67 = -0,22.\end{aligned}$$

Поскольку в данном случае $|\rho| < T = 0,4424$, то принимается гипотеза H_0 .

Пример 9.18. Три способа вычисления ρ -статистики Спирмена.

Пусть наблюдения (реализации) пары СВ \mathbf{X} и \mathbf{Y} ($n = 10$) имеют вид табл. 9.10.

Таблица 9.10

x_i	-1,63	1,11	1,15	-1,93	0,38	-1,08	-0,31	0,60	0,12	0,92
y_i	0,54	0,88	-1,21	0,89	-0,64	-0,21	0,08	-0,74	0,79	0,14

Проверить при уровне значимости (ВЛТ) $\alpha = 0,05$ гипотезу H_0 о независимости СВ \mathbf{X} и \mathbf{Y} .

Решение. Найдем вначале значение ρ -статистики Спирмена тремя способами.

Во-первых, расположим каждую из последовательностей x_i и y_i в порядке возрастания значений (табл. 9.11 и 9.12).

Таблица 9.11

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	-1,93	-1,63	-1,08	-0,31	0,12	0,38	0,60	0,92	1,11	1,15

Таблица 9.12

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_j	-1,21	-0,74	-0,64	-0,21	0,08	0,14	0,54	0,79	0,88	0,89

Тем самым определяются ранги наблюдений.

Сначала воспользуемся формулой (9.151), для чего под последовательностью чисел $i = \overline{1, 10}$ подставим ранги соответствующие наблюдениям $y_j[\cdot]$ и их ранги $S(y_j)$ (табл. 9.13).

Таблица 9.13

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	0,89	0,54	-0,21	0,08	0,79	-0,64	-0,74	0,14	0,88	-1,21
$S(y_i)$	10	7	4	5	8	3	2	6	9	1

Производим расчет по формуле (9.151):

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^{10} (s_i - i)^2 = 1 - \frac{G}{10(10^2 - 1)} [(10-1)^2 + (7-2)^2 + (4-3)^2 + \\ &+ (5-4)^2 + (8-5)^2 + (3-6)^2 + (2-7)^2 + (6-8)^2 + (9-9)^2 + (1-10)^2] = \\ &= 1 - \frac{6}{990} (81 + 25 + 1 + 1 + 9 + 9 + 25 + 4 + 0 + 81) = 1 - \frac{6 \cdot 236}{990} = -0,4303. \end{aligned}$$

Таблица 9.14

$R(x_i)$	2	9	10	1	6	3	4	7	5	8
$S(y_i)$	7	9	1	10	3	4	5	2	8	6

Чтобы вычислить величину ρ -статистики по формуле (9.150), составим последовательность рангов наблюдений табл. 9.14.

В результате по формуле (9.150) получим

$$\begin{aligned}\rho &= 1 - \frac{6}{990} [(2-7)^2 + (9-9)^2 + (10-1)^2 + (1-10)^2 + (6-3)^2 + (3-4)^2 + \\ &\quad + (4-5)^2 + (7-2)^2 + (5-8)^2 + (8-6)^2] = \\ &= 1 - \frac{6}{990} [25 + 0 + 81 + 81 + 9 + 1 + 1 + 25 + 9 + 2] = -0,4303.\end{aligned}$$

Наконец, воспользуемся формулой (9.152):

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{12}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^n R(x_i)S(y_i) - \frac{3(n+1)}{n-1} = \\ &= \frac{12}{990} (14 + 81 + 10 + 10 + 18 + 12 + 20 + 14 + 40 + 48) - \frac{33}{9} = \\ &= 3,23636 - 3,66667 = -0,4303.\end{aligned}$$

По [49, табл. В-8] при $\alpha = 0,05$ находим порог $T = 0,5515$. Следовательно, $|\rho| = 0,4303 < 0,5515$, и следует принять гипотезу H_0 о независимости СВ X и Y , или, что то же самое, — сигнал отсутствует. Аналогичный результат получим, используя [38, табл. 6.10,а]: при $\alpha = 0,048$ порог $T = 0,5636$.

Двухвыборочный τ -обнаружитель Кендалла. Коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла основан на двух последовательностях данных наблюдения X_n и Y_n , каждая из которых состоит из n составляющих:

$$X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}; \quad Y_n = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}. \quad (9.163)$$

Каждая из последовательностей ранжируется сама по себе, в результате находится последовательность рангов

$$\{R_{x1}, R_{x2}, \dots, R_{xn}\}; \quad \{R_{y1}, R_{y2}, \dots, R_{yn}\}. \quad (9.164)$$

Пусть первая пара рангов будет R_{x1}, R_{x2} . Если два ранга слева направо возрастают в этой паре, то этой паре придается метка $+1$, но если убывают ранги в паре, то дается метка -1 для этой пары. Такая же процедура осуществляется и для пары рангов R_{y1}, R_{y2} . Ранговая метка x -пары умножается на ранговую метку y -пары. Если метки x -пары и y -пары совпадают по знаку, то приписывается в результате умножения обобщенной метке величина $+1$, если у x -пары и y -пары

метки разного знака, то обобщенной метке приписывается -1 . Затем ранг R_{x1} образует пару с R_{x3} , а R_{y1} с R_{y3} . Процедура продолжается, пока R_{x1} и R_{y1} не будут сравнены с каждым из последующих рангов. Во втором этапе такое сравнение осуществляется при начальных рангах R_{x2} и R_{y2} , и последующих. После того как $n(n-1)/2$ возможных пар получили свои метки, все метки складываются со своими знаками. Обозначим сумму меток через S и пусть P и Q будут соответственно число положительных и отрицательных меток, тогда $S = P - Q$ и коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла записывают в виде

$$\tau = S/n(n-1)/2 = (P - Q)/n(n-1)/2. \quad (9.165)$$

Поскольку

$$\max S = n(n-1)/2; \quad S = -n(n-1)/2,$$

то согласно (9.165) $-1 \leq \tau \leq 1$.

Пример 9.19. Пусть имеются две последовательности наблюдений $X_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y_3 = \{y_1, y_2, y_3\}$ и определены ранги каждого наблюдения:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & y_1 & y_2 & y_3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

Рассмотрим первую пару x_1-x_2 , их ранги идут в порядке роста, следовательно этой паре приписывается метка $+1$. У первой пары y_1-y_2 аналогично приписывается метка -1 (ранги идут в убывающем порядке). В результате первым парам вместе приписывается метка $(+1)(-1) = -1$. Таким образом, образуется $n(n-1)/2 = 3$ обобщенных пар:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow -1; \\ \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow +1; \\ \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix} &\rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow -1. \end{aligned}$$

Получаем сумму меток $S = -1$. Тогда коэффициент корреляции Кендалла $\tau = S/n(n-1)/2 = -1/3 = -0,333$.

В общем случае при наличии последовательности рангов (9.164) коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла выражается в виде

$$\tau = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \operatorname{sgn}(R_{xi} - R_{xj}) \operatorname{sgn}(R_{yi} - R_{yj}). \quad (9.166)$$

Если результаты ранжирования можно записать в виде подстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_n \end{pmatrix}, \quad (9.167)$$

где r_i — порядковый номер (по второму признаку) того отсчета, который по первой серии имеет номер i . Тогда коэффициент ранговой корреляции τ Кендалла примет вид [38]

$$\tau = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \operatorname{sgn}(r_j - r_i). \quad (9.168)$$

Пример 9.20. Рассмотрим таблицу рангов примера 9.16.

Таблица 9.15

	A	B	C	D	E	F	J	H	I	J
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(x_i)$	4	10	9	7	2	5	1	8	6	3
$R(y_i)$	1	7	9	6	5	10	3	8	4	2

Согласно примеру 9.19 при $AB(4; 10)$ по x_i имеет метку +1, пара $BC(10; 9)$ — метку -1 и т.д. Пара $AB(1; 7)$ по y_i имеет метку +1. Таким образом, обе пары по x_i и по y_i имеют обобщенную метку $(+1)(+1) = +1$ и т.д. Составим таблицу обобщенных меток (табл. 9.16).

Таблица 9.16

Обобщ. пара	Метка	Обобщ. пара	Метка	Обобщ. пара	Метка	Обобщ. пара	Метка
AB	+1	BF	-1	DE	+1	FH	-1
AC	+1	BG	+1	DF	-1	FI	-1
AD	+1	BH	-1	DG	+1	FJ	+1
AE	-1	BI	+1	DH	+1	GH	+1
AF	+1	BJ	+1	DI	+1	GI	+1
AG	-1	CD	+1	DJ	+1	GJ	-1
AH	+1	CE	+1	EF	+1	HI	+1
AI	+1	CF	-1	EG	+1	HJ	+1
AJ	-1	CG	+1	EH	+1	IJ	+1
BC	-1	CH	+1	EI	-1		
BD	+1	CI	+1	EJ	-1		
BE	+1	CJ	+1	FG	+1		

В результате подсчета находим $P = 32$; $Q = 13$; $S = 32 - 13 = 19$; $\max S = n(n-1)/2 = 45$. Поэтому значение τ -статистики Кендалла $\tau = (P - Q)/45 = 19/45 = 0,42$.

Подсчет ρ -статистики Спирмена показал более высокий коэффициент ранговой корреляции $\rho = 0,62$.

Используя равенство $P + Q = n(n-1)/2$ и соотношение (9.165) получим τ -статистику Кендалла в виде

$$\tau = \frac{P - Q}{n(n-1)/2} = \frac{1 - 2Q}{n(n-1)/2} = \frac{2P - 1}{n(n-1)/2} \quad (9.169)$$

Пример 9.21. Можно упростить вычисление τ -статистики Кендалла, если составить подстановку (9.167) в форме табл. 9.17.

Таблица 9.17

	G	E	J	A	F	I	D	H	C	B
i	7	5	10	1	6	9	4	8	3	2
$R(x_i)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R(y_i)$	3	5	2	1	10	4	6	8	9	7

Тогда достаточно вычислить только количество положительных ме-
ток, чтобы получить

$$P = +7 + 5 + 6 + 6 + 0 + 4 + 3 + 1 + 0 = 32.$$

По (9.169) получим $\tau = 2 \cdot 32/45 - 1 = 1,42 - 1 = 0,42$.

Среднее значение и дисперсия τ -статистики при гипотезе H_0 имеет вид [42]

$$E(\tau | H_0) = 0; \quad \text{var}(\tau | H_0) = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}. \quad (9.170)$$

Значения этих величин при больших n позволяют воспользоваться гауссовской аппроксимацией.

Пример 9.22. Пусть ВЛТ $Q_0 = \alpha = 0,1$ и число наблюдений $n = 10$ на первом и на втором входах. По [49, табл. В-7] получим пороговое значение $S_n = 15$, тогда $T = 2S/n(n-1) = 30/90 = 0,33$.

При $n = 10$ дисперсия τ -статистики $\text{var}(\tau | H_0) = 2 \cdot 25/(9 \cdot 90) = 50/810 \approx 0,06$.

При гауссовской аппроксимации получим $\frac{\tau}{\sqrt{0,06}} = \frac{\tau}{\sqrt{0,2449}} \sim \sim N(0,1)$. При этом величина порога находится по формуле

$$T = 6\Phi^{-1}(1 - \alpha) = 0,2449\Phi^{-1}(0,9) = 0,2449 \cdot 1,2816 = 0,3138.$$

Таким образом, вычисленное значение

$$\tau = 0,42 > T_1 = 0,33; \quad \tau = 0,42 > T_2 = 0,314.$$

Поэтому следует принять гипотезу H_1 .

Задачи

9.1. Дано 20 наблюдений:

8,1; 2,4; -0,2, 1,1; 1,4; 6,2; -4,4; 6,5; 7,7; 4,1;

3,0; 7,1; 4,9, 4,3; -0,4, 0,6; -0,1; 5,4, 5,2; 3,9.

Проверить гипотезу H_0 . $W(x) = W(-x)$ против альтернативы H_1 , используя обнаружитель Вилконсона.

Требуемая вероятность ложной тревоги $\alpha = 0,1$.

Указание. Используйте гауссово приближение для распределения статистики обнаружителя Вилконсона.

9.2. Дано множество из 10 независимых одинаково распределенных наблюдений случайной переменной x с интегральной функцией распределения $F(x)$. Требуется проверить гипотезу H_0 : $F(0) = 0,5$ против альтернативы H_1 : $F(0) < 0,5$, используя знаковый обнаружитель.

Напишите выражение для функции мощности критерия и определите вероятность ложной тревоги α , если порог $T = 8$. Предположить, что $F(0 | H_1) = P[x \leq 0 | H_1] = 0,1$, и определить вероятность обнаружения.

9.3. Используйте знаковый обнаружитель для проверки гипотезы нулевой медианы против альтернативы положительного сдвига медианы для трех заданных совокупностей наблюдений. Предположить $\alpha = 0,1$ и, не прибегая к рандомизации, получить точное значение α . Наблюдения следующие:

- 1) 1,7; 0,8; -0,2; 1,3; -1,8; 2,2; 1,4; -0,6; -1,1; 1,9;
- 2) 9,3; 1,4; -1,2; 3,3; 6,4; 2,1; 0,6; 0,4; 8,8; 6,1;
- 3) -1,2; 1,1; 0,0; 3,1; 2,6, -0,6; -0,9; -2,1; 2,4; 1,4.

9.4. Используйте обнаружитель Вилконсона для проверки H_0 : $W(x) = W(-x)$ против H_1 для заданных 10 наблюдений:

0,4; 2,0; 1,2, -0,2; -0,8; 0,9; 2,2; 0,6; 0,1; 1,3.

Предположить $\alpha = 0,1$ и использовать точное распределение статистики

9.5. Повторите задачу 9.4, используя гауссово приближение.

9.6. При наличии $n = 12$ наблюдений, взятых из гауссова распределения со средним $\mu = 32,3$ и дисперсией $\sigma^2 = 1$, требуется сравнить работу знакового обнаружителя и оптимального параметрического обнаружителя Неймана-Пирсона для проверки гипотезы H_0 : $F(31) = 0,5$ против альтернативы H_1 : $F(31) < 0,5$.

Требуемый уровень значимости $\alpha = 0,08$.

Для этой задачи определить порог T , обеспечивающий требуемую вероятность ложной тревоги, точное значение α и вероятность обнаружения Q_d для знакового обнаружителя и оптимального обнаружителя Неймана-Пирсона.

9.7. Для 10 наблюдений, заданных в задаче 9.4, вычислить значение статистики Ван дер Вардена.

9.8. Вычислить значение статистики нормальных меток для 10 наблюдений, заданных в задаче 9.4 (использовать таблицу ожидаемых значений нормальных порядковых статистик)

9.9. Вычислить значение ρ -статистики обнаружителя Спирмэна для 10 наблюдений, заданных в задаче 9.4. Определить, каким образом можно выбрать такой порог обнаружителя, который обеспечит уровень значимости $\alpha = 0,05$ при проверке H_0 : $W(x) = W(-x)$ против H_1 .

9.10. Проверьте точность гауссова приближения при определении порога для 1) знакового критерия и 2) обнаружителя Вилконсона.

Предположить, что $\alpha = 0,05$, и рассмотреть случаи, когда число наблюдений $n = 8, 10$ и 12. Произведите проверку гипотезы H_0 : $W(x) = W(-x)$ против альтернативы H_1 .

9.11. Вычислить АОЭ знакового обнаружителя относительно линейного обнаружителя при условии равномерного распределения шума, выраженного формулой

$$W(x) = \begin{cases} 1, & -1/2 \leq x \leq 1/2, \\ 0, & \text{при других значениях.} \end{cases}$$

9.12. Вычислить эффективность знакового обнаружителя при проверке параметра сдвига θ симметричной ПРВ.

9.13. Повторить задачу 9.12 для обнаружителя по t -критерию Стьюдента.

9.14. Подтвердить значения АОЭ знакового обнаружителя, данные в табл. 9.7, в условиях гауссова, равномерного и лапласова распределения шума и при использовании результатов решения задач 9.12 и 9.13.

9.15. Воспользоваться уравнением (9.87) для вычисления АОЭ обнаружителя Вилкоксона при равномерной ПРВ в интервале $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

9.16. Вычислить конечную относительную эффективность знакового обнаружителя по выборкам конечного объема в сравнении с линейным обнаружителем при проверке гипотезы

$$H_0: F(31) = 0,5,$$

F — гауссова ПРВ при $\sigma^2 = 1$ относительно альтернативы

$$H_1: F(31) < 0,5,$$

F — гауссова ПРВ при $\mu = 32,3$ и $\sigma^2 = 1$ при уровне значимости $\alpha = 0,08$; в предположении, что знаковый обнаружитель использует 12 наблюдений (ср. с задачей 9.6).

9.17. Показать, что если одноходовый обнаружитель имеет статистику, которая удовлетворяет условиям регулярности, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi \theta_n^2 n = 2[\operatorname{erf}^{-1}(1 - 2\alpha) + \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2\beta)]^2,$$

где $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$; ξ — эффективность обнаружителя.

Указание. См. [117, 118].

9.18. Используя результат задачи 9.17, показать, что если статистики двух обнаружителей, скажем S_n и S_n^* , удовлетворяют условиям регулярности, то АОЭ S_n обнаружителя по отношению к S_n^* обнаружителю является отношением их эффективностей

$$\text{АОЭ}_{S S^*} = \xi_S / \xi_{S^*}.$$

(см. [117, 118] или [95, с. 116–127]).

9.19. Используя статистику S' обнаружителя Манна–Уитни, по (9.97) провести проверку на положительный сдвиг в y_j наблюдениях. Имеется $n = 30$ наблюдений x_i (контрольные шумы) и $m = 20$ наблюдений y_j . Если величина статистики Манна–Уитни равна 562, на каком минимальном уровне значимости α гипотеза будет отвергнута? Применить гауссово приближение.

9.20. Показать, что формула для дисперсии статистики Спирмена

$$\operatorname{var}(\rho | H_0) = 1/(n - 1),$$

где H_0 — гипотеза о независимости выборки, верна на основе выбора нескольких случаев из таблицы ожидаемых нормальных меток.

9.21. Показать, что статистика оптимального двухканального обнаружителя

$$S_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2$$

имеет χ^2 -распределение с n степенями свободы, когда гипотеза H'_0 ($r = 0$) верна.

9.22. Проверить H_0 ($r = 0$) с помощью ρ -обнаружителя Спирмена при двух совокупностях наблюдений ($n = 5$):

i	1	2	3	4	5
x_i	3,1	2,6	2,4	0,8	1,1
y_i	2,3	2,0	4,2	0,4	1,9

При уровне значимости $\alpha = 0,1$ определить порог как из точного распределения, так из нормального приближения. Сравнить полученные решения.

9.23. Проверить

$$H_0 : W_2(x, y) = W_1(x)W_1(y);$$

$$H_1 : r > 0, \quad W_2(x, y) \text{ неизвестно}$$

при уровне значимости $\alpha = 0,1$ с помощью двух совокупностей наблюдений в задаче 9.22 и τ -критерия Кендалла. Вычислить порог только с помощью точного распределения.

9.24. При $n = 10$ наблюдениях контрольного шума проверить $m = 10$ входных наблюдений на положительный сдвиг распределения с помощью обнаружителя Манна–Уитни. Положить $\alpha = 0,25$ и применить точное распределение.

$n = 10$	0,82	0,11	0,21	−0,32	−0,60	−0,27	−0,41	0,63	0,54	−0,73
$m = 10$	1,11	0,65	0,10	1,42	1,08	−0,08	0,40	0,95	0,33	0,55

9.25. Применить обнаружитель КСП (коорелатор совпадения полярностей) для проверки двух совокупностей $n = 12$ наблюдений, данных ниже, на наличие или отсутствие стационарного случайного сигнала на уровне значимости $\alpha = 0,10$. Считать, что все распределения имеют нулевую медиану.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	0,81	1,63	−0,42	0,08	−0,11	−0,55	−0,03	0,90	0,78	−0,04	2,21	1,43
y_i	0,76	0,89	−0,66	0,53	0,21	−0,30	−0,45	1,07	0,95	−0,01	1,77	1,39

9.26. Повторить задачу 9.25 с помощью ρ -обнаружителя Спирмтна при $\alpha = 0,1$. Найти порог точно и с помощью нормальной аппроксимации

9.27. Повторить задачу 9.25 для выборочного коэффициента корреляции.

9.28. Сравнить затраты, требуемые в задачах 9.25–9.27 для вычисления значений статистик и принятия решения. Какая проверка предпочтительнее: обнаружитель КСП, ρ -обнаружитель Спирмена или выборочный коэффициент корреляции r ?

9.29. Использовать уравнение (9.101) для вычисления АОЭ обнаружителя Манна–Уитни относительно t -критерия Стьюдента при равномерной плотности вероятностей на входе в пределах $-1/2 \leq y \leq 1/2$.

9.30. Показать, что если шум имеет лапласову экспоненциальную плотность, то АОЭ обнаружителя Манна–Уитни относительно t -критерия Стьюдента $АОЭ_{МУ,t} = 1,5$.

9.31. Известно, что τ -статистика Кендалла может быть записана в виде

$$\tau = 1 - \frac{4Q}{n(n-1)},$$

где Q — общее число отрицательных меток. Показать, что

$$Q = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n u(y_j - x_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n [1 - \operatorname{sgn}(y_j - y_i) \operatorname{sgn}(x_j - x_i)].$$

9.32. Используя результат решения задачи 9.31, вычислить $E\{\tau \mid H_1\}$, где H_1 — альтернатива в том, что x и y имеют двумерное гауссово распределение с коэффициентом корреляции $r > 0$.

Указание [111].

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \beta t}{t} dt = \begin{cases} -1, & \beta < 0, \\ 0, & \beta = 0; \\ 1, & \beta > 0. \end{cases}$$

9.33. Согласно соотношению

$$\operatorname{var}(\tau \mid H_0) = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}$$

приближенно можно принять $\operatorname{var}\{\tau \mid H_0\} = 4/9n$ при большом значении n и гипотезе H_0 : $r = 0$. Пользуясь этим выражением и $E\{\tau \mid P_1\}$ из задачи 9.32, вычислить эффективность τ -статистики Кендала.

9.34. При больших значениях n $E\{\hat{r} \mid H_1\} = r$ и $\operatorname{var}\{\hat{r} \mid H_0\} \approx 1/n$ [111]. Используя эти результаты, получить выражения для эффективности выборочного коэффициента корреляции.

9.35. Вычислить АОЭ τ -обнаружителя Кендалла относительно выборочного коэффициента корреляции для двумерных гауссовых альтернатив при использовании эффективностей, вычисленных в задачах 9.33 и 9.34.

9.36. Вывести выражение для дисперсии статистики знакового обнаружителя $\sum_{i=1}^n u(x_i)$ при условии, что входные наблюдения представляют собой зависимые выборки из стационарного случайного процесса. Выразить ответ в виде [112, 113]

$$E[u(x_i)u(x_j)] = R[(i-j)\tau] = R[k\tau].$$

9.37. Поскольку КФ $R(k\tau) = E[u(x_i)u(x_{i+k})]$ не равна нулю только при $x_i > 0$ и $x_{i+k} > 0$,

$$R(k\tau) = P[x_i > 0, x_{i+k} > 0] = \int_0^\infty \int_0^\infty W_{x_i x_{i+k}}(x_i, x_{i+k}) dx_i dx_{i+k}.$$

При условии, что совместная ПРВ X_i и X_{i+k} гауссова с нулевым средним значением,

$$W_{x_i x_{i+k}}(x_i, x_{i+k}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x_i^2 - 2\rho x_i x_{i+k} + x_{i+k}^2}{2\sigma^2(1-\rho^2)}\right],$$

найти $R(k\tau)$ [113].

9.38. Использовать результаты решения задач 9.36 и 9.37 таким образом, чтобы получить соотношение

$$\operatorname{var}\{S'_n\} = \frac{1}{4n} + \frac{1}{\pi n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n}\right) \arcsin \rho(k\tau),$$

где $S'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(w_i - M)$; M — известная медиана ПРВ шума; w_i — входные отсчеты; $u(x)$ — единичная функция.

9.39. Вычислить среднее и дисперсию статистики линейного обнаружителя для зависимых входных наблюдений при наличии сигнала, имеющего амплитуду θ .

9.40. С помощью результатов решения задачи 9.39 получить выражение для эффективности линейного обнаружителя в случае зависимых выборок.

9.41. При условии, что эффективность обнаружителя Вилкоксона для зависимых наблюдений равна

$$\xi_W = \left[\sigma^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \arcsin \frac{\rho(n\Delta t)}{2} \right]^{-1},$$

доказать, используя эффективность линейного обнаружителя, вычисленную в задаче 9.40, что АОЭ обнаружителя Вилкоксона относительно линейного обнаружителя равна

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \rho(n\Delta t) \left[2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \arcsin \frac{1}{2} \rho(n\Delta t) \right]^{-1}.$$

9.42. Предположить, что

$$\rho(n\Delta t) = \begin{cases} 0,8, & n = \pm 1; \\ 1, & n = 0; \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и вычислить АОЭ обнаружителя Вилкоксона относительно линейного обнаружителя, используя выражение в задаче 9.41.

Ответы к задачам

9.1. Для $n = 20$ среднее значение и дисперсия статистики Вилкоксона соответственно равны 105 и 717,5. При этом величина статистики $S = 192$. При $\alpha = 0,1$ порог $T = 139,4$. Следовательно, $S = 192 > T = 139,4$, поэтому применяется гипотеза H_1 .

9.2. Функция мощности (вероятность обнаружения)

$$Q_d = 1 - \beta = \sum_{k=8}^{10} C_{10}^k p^k (1-p)^{10-k},$$

где $p = 1 - F(0)$; ВЛТ = $\alpha = 0,0547$ и для $F(0 | H_1) = 0,1$ $Q_d = 1 - \beta \approx 0,93$.

9.3. Наибольшее значение α из тех, что $\alpha \leq 0,1$, равно 0,0547, и, следовательно, порог $T = 8$.

$$1) \sum_{i=1}^{10} n(x_i) = 6 < 8, \text{ следовательно, принимается } H_0;$$

$$2) \sum_{i=1}^{10} n(x_i) = 9 > 8, \text{ следовательно, принимается } H_1;$$

3) знаковая статистика не может быть использована из-за наличия нулевого отсчета в наблюдениях.

9.4. По [49, табл. В-4] определяем порог $T = 41$. Значение статистики $S = 48$. Таким образом, $S = 48 > T = 41$, следовательно, принимается H_1 .

9.5. Среднее значение и дисперсия статистики при $n = 20$ равны соответственно 27,5 и 96,25. Тогда порог $T \approx 40$. Следовательно, $S = 48 > T = 40$, следовательно, принимается H_1 ;

9.6. Порог для знакового обнаружителя находится из условия

$$A = \sum_{k=T}^{12} C_{12}^k (0,5)^{12} \leq \alpha = 0,08.$$

Положив $T = 9$, находим

$$A = \frac{1}{2^{12}} \sum_{k=9}^{12} C_{12}^k = \frac{1}{2^{12}} (220 + 66 + 12 + 1) = \frac{299}{4096} \approx 0,07299 \approx 0,073.$$

Получим $A = 0,073 < 0,08$, следовательно, порог $T = 9$; $p = 1 - F(31) = \Phi(1,3) = 0,903$, тогда

$$\begin{aligned} Q_d &= \sum_{k=9}^{12} C_{12}^k p^k (1-p)^{12-k} = 220 \cdot (0,903)^9 \cdot (0,097)^3 + \\ &+ 66 \cdot (0,903)^{10} \cdot (0,097)^2 + 12 \cdot (0,903)^{11} \cdot 0,097 + (0,903)^{12} = \\ &= 0,0799 + 0,2233 + 0,3784 + 0,2935 = 0,9751. \end{aligned}$$

Для оптимального обнаружителя порог $T = 31,41$, точное значение $\alpha = 0,0793$, следовательно, вероятность обнаружения $Q_d = 0,999$.

9.7. Вначале следует составить таблицу наблюдений и рангов (аналогично табл. 9.1):

x_i	0,4	2,0	1,2	-0,2	-0,8	0,9	2,2	0,6	0,1	1,3
$R(x_i)$	3	9	7	2	5	6	10	4	1	8

Затем вычислить величину $p = i/(n+1) = i/11$, по значениям p найти $\xi_p = \Phi^{-1}(p)$ и составить таблицу, аналогичную табл. 9.4. В результате для вычисления статистики S_{wdw} суммируются те значения ξ_p , которые соответствуют положительным величинам наблюдений:

$$\begin{aligned} S_{wdw} &= -1,3346 - 0,6037 - 0,3477 + 0,1156 + 0,3425 + 0,6037 + \\ &+ 0,9078 + 1,3346 = 1,0182 \approx 1,02. \end{aligned}$$

9.8. При суммировании исключаются ранги $R(x_4) = R(-0,2) = 2$ и $R(x_5) = R(-0,8) = 5$. В результате, используя табл. 9.2, получим

$$S_{\Phi} = S_{NM} = 3,6947 - 2,5706 = 1,124.$$

9.9. На основе таблицы в решении задачи 9.7 составить следующую таблицу, где $R_i = R(x_i)$ — ранг i -го наблюдения:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
iR_i	3	18	21	8	25	36	70	32	9	80

В результате суммирования находим значение ρ статистики Спирмена

$$S_\rho = \sum_{i=1}^n d_i R_i = \sum_{i=1}^{10} d_i R_i,$$

где $d_i R_i = \begin{cases} 0 & \text{при } x_i \leq 0; \\ iR_i & \text{при } x_i > 0. \end{cases}$

Таким образом, не учитывая отсчеты $x_4 = -0,2$ и $x_5 = -0,8$, получим $S_\rho = 269$.

Вероятность ложной тревоги $Q_0 = \alpha$ определяется по формуле

$$\alpha = \frac{m}{2^{10}} n!,$$

где m — число возможных значений статистик, которое превышает выбранную величину порога T . Таким образом, $\alpha = 0,05 = m/(3,7159 \cdot 10^9)$, следовательно, $m = 1,8579 \cdot 10^8$.

9.10. При знаковой статистике точное значение порога T определяется по формуле

$$\alpha = \sum_{k=T}^n C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=T}^n C_n^k.$$

Взяв $n = 8, 10, 12$, получим $2^8 = 256$; $2^{10} = 1024$, $2^{12} = 4096$. Тогда получим пороги T и соответствующие точные значения ВЛТ α :

$$n = 8 : T = 7, \alpha = 9/256 = 0,0352;$$

$$n = 10 : T = 9, \alpha = 11/1024 = 0,0107;$$

$$n = 12 : T = 10, \alpha = 79/4096 = 0,0193.$$

При гауссовской аппроксимации статистики знакового обнаружителя величины порога T находят по формуле (9.69)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [n + \sqrt{n} \Phi^{-1}(1 - \alpha)] = 0,5n + 0,5\sqrt{n} \Phi^{-1}(0,95) = \\ &= 0,5n + 0,5\sqrt{n} \cdot 1,6448 = 0,5n + 0,8224\sqrt{n}. \end{aligned}$$

При $n = 8, 10, 12$ получим соответственно $T_8 = 6,3261$; $T_{10} = 7,6006$; $T_{12} = 8,8488$.

При нормализации статистики Вилкоксона порог T определяется по формуле (9.94):

$$T = \frac{n}{2} \left[\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{3}} \Phi^{-1}(1 - \alpha) \right] = \frac{n}{2} \left[\frac{n}{2} + \sqrt{\frac{n}{3}} \cdot 1,6448 \right].$$

При $n = 8, 10, 12$ соответственно получим $T_8 = 26,7438$; $T_{10} = 40,0149$; $T_{12} = 55,7376$.

Если использовать вместо приближенных формул (9.93) точные величины для среднего значения и дисперсии $\mu_n = E(S_2 | n_0) = n(n+1)/4$; $D(S_2 | H_0) = \sigma_n^2 = n(n+1)(2n+1)/24$, то при больших значениях можно пользоваться следующей формулой для определения порога T при гауссовском приближении:

$$\Phi[(T - \mu_n)/\sigma_n] = 1 - \alpha.$$

Отсюда $T = \mu_n + \sigma_n \Phi^{-1}(1 - \alpha)$.

При $n = 8, 10, 12$ получим $\mu_8 = 18$; $\mu_{10} = 27,5$; $\mu_{12} = 39$; $\sigma_8 = 7,1414$; $\sigma_{10} = 9,8167$; $\sigma_{12} = 12,7475$. В результате получим уточненные значения порога $T_8 = 29,7462$; $T_{10} = 43,6366$; $T_{12} = 59,9671$.

Точные значения порога T при α_0 близких к 0,05 находятся по таблицам [43, 49]:

$$T_8 = 31; \alpha_0 = 0,039; \quad T_{10} = 45; \alpha_0 = 0,043, \quad T_{12} = 61; \alpha_0 = 0,046.$$

Сравнивая табличные данные и гауссовскую аппроксимацию, находим, что статистика Вилкоксона лучше аппроксимируется нормальным распределением, чем знаковая статистика.

9.11. АОЭ определяется по (9.75): $\text{АОЭ}_{2,1} = 4\sigma^2 W^2(0)$. Для данной равномерной ПРВ $W(0) = 1$; $\sigma^2 = 1/12$. Таким образом, $\text{АОЭ}_{2,1} = 1/3$.

9.12. Для статистики S знакового обнаружителя среднее значение и дисперсия соответственно равны np и $np(1-p)$, где $p = P(X > 0) = 1 - F_x(0)$. Следовательно, $E(S | H_1) = np = nP(X > 0 | H_1)$, $\frac{d}{d\theta} E(S | H_1) = nW(\theta)$. В результате получим $\xi_S = 4W^2(0)$.

9.13. Для значительных n t -статистика Стьюдента S_c имеет нормальное распределение при среднем значении μ и дисперсии σ^2 в общем случае гипотезы H_1 . Следовательно, $E(S_c | H_1) = \sqrt{n}\mu/\sigma$ и дисперсия $\text{var}(S_c | H_0 \text{ или } H_1) = 1$.

Используя выражение для эффективности ξ , получим $\xi_{S_c} = 1/\sigma^2$.

9.15. По (9.87) $AOЭ_{2,1} = 1$, так как $\sigma^2 = 1/12$.

9.16. Для знакового обнаружителя при $n = 12$ согласно задаче 9.6 порог $T = 9$, ВЛТ $\alpha = 0,073$, вероятность обнаружения $Q_d = 0,975$. Тогда $E(S_{\text{опт}} | H_0) = 31$; $\text{var}(S_{\text{опт}} | H_0) = 1/n$;

$$\alpha = 0,073 = P \left[\frac{S_{\text{опт}} - 31}{1/\sqrt{n}} > \frac{T - 31}{1/\sqrt{n}} | H_0 \right]; \quad (*)$$

$$Q_d = 0,975 = P \left[\frac{S_{\text{опт}} - 32,3}{1/\sqrt{n}} > \frac{T - 32,3}{1/\sqrt{n}} | H_1 \right]. \quad (**)$$

По формуле (*) находим

$$\alpha = Q \left(\frac{T - 31}{1/\sqrt{n}} \right) = 1 - \Phi \left(\frac{T - 31}{1/\sqrt{n}} \right).$$

Отсюда

$$(T - 31)\sqrt{n} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0,927) = 1,4538.$$

Аналогично по (**) получим

$$(T - 32,3)\sqrt{n} = -2,34.$$

В результате из уравнений

$$T - 31 = 1,4538/\sqrt{n}; \quad T - 32,3 = -2,34/\sqrt{n}$$

находим $\sqrt{n} = 3,7938/1,3 = 2,918$, тогда $n = 8,5$.

Относительная эффективность $\xi_{S_{\text{опт}}} = 8,5/12 = 0,71$.

9.19. По (9.100) находим

$$E(S' | H_0) = \frac{1}{2}m(m + n + 1) = 510;$$

$$\text{var}(S' | H_0) = \frac{1}{12}mn(m + n + 1) = 2550.$$

Отсюда $\sigma(S' | H_0) = 50,5$.

Согласно гауссовской аппроксимации

$$\alpha = P \left[\frac{S' - 510}{50,5} > T | H_0 \right].$$

Поскольку $S' = 562$, то $T = \frac{562-510}{50,5} = \frac{52}{50,5} = 1,0297 \approx 1,03$. Тогда

$$\alpha = Q(T) = 1 - \Phi(T) = 1 - \Phi(1,03) = 1 - 0,8485 = 0,1515.$$

9.22. Вычислим сначала величину ρ -статистики Спирмена. Согласно заданной таблице наблюдений составим таблицу рангов:

i	1	2	3	4	5
$R(x_i)$	5	4	3	1	2
$S(y_i)$	4	3	5	1	2

Используя формулу (9.150), получим

$$\begin{aligned}\rho &= 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^5 [R(x_i) - S(y_i)]^2 = \\ &= 1 - \frac{6}{120} (1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2) = 1 - 0,3 = 0,7.\end{aligned}$$

По таблице распределения коэффициента корреляции ρ Спирмена [49] получим $T_{\text{точн}} = 0,7$. По [38] при $\alpha = 0,067$ $T_{\text{точн}} = 0,8$, при $\alpha = 0,117$, $T_{\text{точн}} = 0,7$. Приближенное значение порога $T_{\text{пр}}$ находится по формуле

$$T_{\text{пр}} = \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \Phi^{-1}(0,9) = 1,2815.$$

Таким образом, $T_{\text{точн}} = 0,7 = \rho$ и непосредственно принимается альтернатива $H_1 (r > 0)$. Аналогично, если воспользоваться гауссовской аппроксимацией, то $Z = \rho\sqrt{n-1} = 0,7\sqrt{4} = 1,4 > 1,2815$. И снова принимается альтернатива H_1 .

9.23. По таблице распределения ранговой корреляции τ Кендалла [49] находим при $\alpha = 0,1$ $S_\tau = 6$ и $\tau = S_\tau 2/[n(n-1)] = 0,6$.

Аналогично по [38] при $\alpha = 0,117$ находим вероятность $\alpha = P\{S_\tau \geq s\} = 0,117$, тогда $s = 6$ и порог находится из равенства $S_\tau = [n(n-1)/2]T = s = 6$.

Снова $T = 6$. Найдем величину τ -статистики Кендалла. Для этого воспользуемся таблицей рангов задачи 9.22:

	A	B	C	D	E
i	1	2	3	4	5
$R(x_i)$	5	4	3	1	2
$S(y_i)$	4	3	5	1	2

Составим таблицу меток:

	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
M_{-x_i}	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	+1
M_{y_i}	-1	+1	-1	-1	+1	-1	-1	-1	-1	+1
Π_{xy}	+1	-1	+1	+1	-1	+1	+1	+1	+1	+1

Отсюда находим число положительных P и число отрицательных Q меток Π_{xy} : $P = 8$, $Q = 2$.

При $n = 5$ $n(n-1)/2 = 10$, следовательно, значение τ -статистики

$$\tau = \frac{P - Q}{n(n-1)/2} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Значение статистики совпадает со своим порогом, принимается альтернатива $H_1 (r > 0)$, как и в случае ρ -статистики Спирмена (задача 9.22).

9.24. Образует смешанный вариационный ряд из отсчетов x_i и y_i и во второй строке укажем ранги R_{x_i} :

-0,73	-0,60	-0,41	-0,32	-0,27	-0,08	-0,10	0,11	0,21	0,33
15	12	9	6	5	1	2	3	4	7
0,40	0,54	0,55	0,63	0,65	0,82	0,95	1,08	1,11	1,42
8	10	11	13	14	16	17	18	19	20

Суммируя, по (9.96) и (9.97) получим значение статистики Вилкоксона (Манна-Уитни)

$$S = \sum_{i=1}^{10} R_{x_i} = 93; \quad S' = \sum_{i=1}^{10} R_{y_i} = 117.$$

По таблице [49, табл. 13-16] находим: порог $T = 115$ при $\alpha_0 = 0,241$. Таким образом, $S = 93 < 115$, и принимается гипотеза H_1 ($r > 0$), а $S' = 117 > 115$, и снова принимается гипотеза H_1 .

9.25. Вычислим сначала статистику коррелятора совпадения полярностей (КСП)

$$S = \sum_{i=1}^{12} \operatorname{sgn} x_i \operatorname{sgn} y_i.$$

Составим таблицу знаков отсчетов:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\operatorname{sgn} x_i$	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
$\operatorname{sgn} y_i$	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1
$\operatorname{sgn} x_i \operatorname{sgn} y_i$	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1

В результате получим $S_{\text{КСП}} = 11$.

Найдем порог T , используя соотношение

$$\alpha_0 = \sum_{k=T}^{12} C_{12}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = P(\xi > T) = 1 - P(\xi \leq T),$$

$$P(\xi \leq T) = \sum_{k=0}^T C_{12}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{1}{4096} \sum_{k=0}^T C_{12}^k,$$

при $k = 3$

$$P(\xi < 3) = \frac{1}{4096} (1 + 12 + 66 + 220) = \frac{299}{4096} = 0,0729 \approx 0,073 \approx 0,1 = \alpha.$$

Следовательно, порог $T = 12 - 3 = 9$ и выполняется условие $S_{\text{КСП}} = 10 > 9$. Принимается гипотеза H_1 (сигнал присутствует).

9.26. Составим вначале таблицу рангов наблюдений x_i и y_i :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$R(x_i)$	8	11	5	3	4	6	1	9	7	2	12	10
$R(y_i)$	7	8	6	5	2	3	4	10	9	1	12	11
Δ_i	1	3	-1	-2	2	3	-3	-1	-2	1	0	-1
Δ_i^2	1	9	1	4	4	9	9	1	4	1	0	1

Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \rho &= 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^{12} [R(x_i) - S(y_i)]^2 = \\ &= 1 - \frac{6}{12 \cdot 143} \sum_{i=1}^{12} \Delta_i^2 = 1 - \frac{44}{286} = 1 - 0,154 = 0,846. \end{aligned}$$

По [49, табл. В-8] находим порог $T = 0,3986$. Следовательно, $\rho = 0,846 > T = 0,3986$, и принимается альтернатива H_1 (сигнал присутствует). При нормальной аппроксимации

$$Q_0 = \alpha = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_T^\infty e^{-x^2/2\sigma^2} dx = Q\left(\frac{T}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{T}{\sigma}\right),$$

где $\sigma = 1/\sqrt{n-1}$

При $n = 12$ получим

$$T_n = \sigma \Phi^{-1}(1 - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{11}} \Phi^{-1}(0,9) = \frac{1,2816}{3,3166} = 0,3864,$$

и $\rho < T_n$.

9.27. Значение выборочного коэффициента корреляции находим по формуле

$$\hat{r} = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\Omega}},$$

где

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} y_i; \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{12} x_i y_i; \\ \Omega &= \left[\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} (x_i - \bar{x})^2 \right] \left[\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} (y_i - \bar{y})^2 \right]. \end{aligned}$$

Используя таблицу в задаче 9.25, находим $\bar{x} = 0,5575$; $\bar{y} = 0,5125$; $\overline{xy} = 0,8454$, $\overline{xy} - \bar{x}\bar{y} = 0,5597$, следовательно, $\Omega = 0,7025 \cdot 0,5319 = 0,3736$; $\sqrt{\Omega} = 0,6112$.

Таким образом, $\hat{r} = 0,5597/0,6112 = 0,9157$.

Взяв число степеней свободы $n - 2 = 12 - 2 = 10$ по [49, табл. В-3] находим при $\alpha = 0,1$ порог $T_t = 1,372$, тогда по формуле

$$T_{\hat{r}} = \frac{T_t}{\sqrt{n - 2 + T_t^2}}$$

получим $T_{\hat{r}} = 0,398$. Следовательно, $\hat{r} = 0,916 > T_{\hat{r}} = 0,398$.

Принимается альтернатива H_1 — сигнал присутствует.

9.29. $\text{АОЭ}_{\text{МУ},t} = 1$.

9.33. Из решения задачи 9.32 можно получить значение производной

$$\frac{\partial}{\partial r} E(\tau | H_1) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - r^2}.$$

Таким образом, эффективность τ -обнаружителя Кендалла $\xi_\tau = 18/\pi^2$.

9.34. $\xi_{\hat{r}} = 2$.

9.35. $\text{АОЭ}_{\tau, \hat{r}} = 9/\pi^2$.

10 Адаптивный прием сигналов

10.1. Постановка задачи адаптивной фильтрации

В адаптивных (приспосабливающихся) системах априорная неопределенность статистических характеристик сообщений преодолевается оцениванием их в процессе работы системы и использованием полученной информации для оптимизации ее параметров. Часто неопределенность характеристик сообщения может быть сведена к неопределенности некоторых параметров принятой модели сообщения, например дисперсии и(или) ширины спектра отдельных компонент, спектральной плотности формирующих шумов и др. [51]. В этом случае говорят о параметрической априорной неопределенности.

Пусть на вход приемника поступает реализация

$$y(t) = s(t, \lambda(t, \alpha)) + n(t), \quad (10.1)$$

где $\lambda(t, \alpha)$ — фильтруемый процесс, зависящий от вектора α неизвестных параметров, которые являются случайными величинами с заданной ПРВ $W_{pr}(\alpha)$. Задание α в виде случайных величин предполагает их постоянство за время наблюдения, что математически может быть записано в виде

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \quad \alpha(0) = \alpha_0,$$

где α_0 — случайная величина.

Процесс $\lambda(t, \alpha)$ в пространстве состояний задается вектором $x(t, \alpha)$, так что $\lambda(t, \alpha) = cx(t, \alpha)$ и

$$\frac{dx}{dt} = F(t, \alpha)x + G(t, \alpha)\chi(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (10.2)$$

где $\chi(t)$ — m -мерный вектор ГБШ с корреляционной матрицей $R_\chi(\tau)$.

Уравнение наблюдения принимается в виде

$$y(t) = H(t)x(t, \alpha) + n(t). \quad (10.3)$$

В (10.1), (10.3) характеристики шума $n(t)$ полагаются известными.

Задача синтеза оптимальной системы фильтрации заключается в нахождении оценки $\hat{x}(t)$ по критерию минимума среднего квадрата ошибки.

10.2. Показатели качества адаптивных систем фильтрации

Точность фильтрации характеризуется дисперсией ошибки фильтрации

$$\sigma^2 = E[(\lambda - \hat{\lambda})^2].$$

Для линейной модели сообщения и наблюдений (10.3) оптимальная структура системы фильтрации определяется фильтром Калмана. Предельная точность фильтрации определяется уравнением Риккати. Найденная таким образом предельная точность фильтрации определяет потенциальные возможности адаптивного измерителя.

Выигрыш в точности фильтрации можно оценить величиной [131]

$$B = \sqrt{D_n/D_a}, \quad (10.4)$$

где D_a , D_n — дисперсии ошибок фильтрации сообщения в адаптивной и неадаптивной системе соответственно.

Пример 10.1. Сравнить адаптивное и неадаптивное устройства при использовании в первом случае непрерывного фильтра Калмана, когда уравнение наблюдения и информационное уравнения имеют вид:

$$x(t) = \lambda_1(t) + v(t); \quad (10.5)$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \lambda_2; \quad \frac{d\lambda_2}{dt} = w(t), \quad (10.6)$$

где $v(t)$ — БШ; его КФ $R_v(\tau) = S_0\delta(\tau)$, $w(t)$ — БШ; его КФ $R_w(\tau) = q_w\delta(\tau)$.

Замечание. Данная задача соответствует оценке расстояния $\lambda_1 = R(t)$ и скорости $\lambda_2 = v(t)$ наблюдаемого объекта.

Решение.

Запишем заданные уравнения в векторной форме:

$$x(t) = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} + v;$$

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = \mathbf{F}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{G}w,$$

где $\mathbf{H} = [1 \ 0]$; $\mathbf{G} = [0 \ 1]^T$; $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1 \ \lambda_2]^T$; $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Уравнение фильтра Калмана (ФК) принимает вид [91]

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\lambda}}}{dt} = \mathbf{F}\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \mathbf{K}(t)[x(t) - \mathbf{H}\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t)]; \quad \hat{\boldsymbol{\lambda}}(0) = \hat{\boldsymbol{\lambda}}_0,$$

где $\mathbf{K}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{H}^T S_0^{-1}$; $\mathbf{D}(t)$ — матрица дисперсий (дисперсионная матрица) ошибки измерения, для нее справедливо ДУ

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{D}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{F}^T + q_w\mathbf{G}\mathbf{G}^T - \mathbf{D}(t)\mathbf{H}^T S_0^{-1}(t)\mathbf{D}(t); \quad \mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0.$$

В данном случае это уравнение принимает вид

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{F}\mathbf{D}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_0 - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}\mathbf{D}(t), \quad (10.7)$$

где $Q = q_w = \text{const}$; $\mathbf{Q}_0 = q_w \mathbf{G}\mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_w \end{bmatrix}$.

Введем обозначение

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} S_0^{-1} = S_0^{-1} \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{H}\mathbf{D} = [d_{11} \quad d_{12}].$$

В результате система ДУ (10.7) может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_{11} & \dot{d}_{12} \\ \dot{d}_{12} & \dot{d}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2d_{12} & d_{22} \\ d_{22} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q_w \end{bmatrix} - S_0^{-1} \begin{bmatrix} d_{11}^2 & d_{11}d_{12} \\ d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \end{bmatrix}.$$

В скалярной форме получим:

$$\begin{aligned} \frac{d(d_{11})}{dt} &= 2d_{12} - S_0^{-1}d_{11}^2; & \frac{d(d_{12})}{dt} &= d_{22} - S_0^{-1}d_{11}d_{12}; \\ \frac{d(d_{22})}{dt} &= q_w - S_0^{-1}d_{12}^2. \end{aligned} \quad (10.8)$$

В стационарном режиме находим

$$d_{12} = \sqrt{q_w S_0} = \alpha; \quad d_{11} = \sqrt{2S_0\alpha}; \quad d_{22} = \sqrt{2q_w\alpha}. \quad (10.9)$$

Уравнение ФК принимает вид [91]

$$\frac{d\hat{\lambda}}{dt} + (\mathbf{K}\mathbf{H} - \mathbf{F})\hat{\lambda} = \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (10.10)$$

где $\mathbf{K} = [k_1, k_2]^T$; $k_1 = S_0^{-1}d_{11}$; $k_2 = S_0^{-1}d_{12}$; $\mathbf{K}\mathbf{H} - \mathbf{F} = \begin{bmatrix} k_1 & -1 \\ k_2 & 0 \end{bmatrix}$.

По (10.10) в скалярной форме получим [91]

$$\frac{d\hat{\lambda}_1}{dt} = \hat{\lambda}_2 + k_1(x - \lambda_1); \quad \frac{d\hat{\lambda}_2}{dt} = k_2(x - \lambda_1). \quad (10.11)$$

В стационарном режиме

$$k_{2c} = S_0^{-1}d_{12} = \sqrt{q_w/S_0}; \quad k_{1c} = S_0^{-1}d_{11} = \sqrt{2\sqrt{q_w/S_0}} = \sqrt{2k_{2c}}. \quad (10.12)$$

В качестве неадаптивной системы будем использовать динамическую систему, которая описывается системой ДУ (10.11) при $k_1 = k_{1c} = \bar{k}_1$; $k_2 = k_{2c} = \bar{k}_2$.

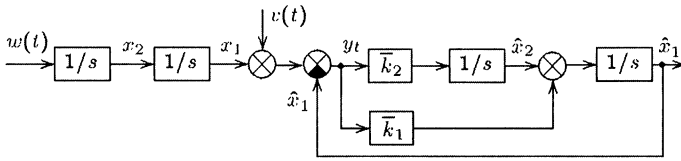


Рис. 10.1

Чтобы найти ошибку фильтрации динамической системы (10.11), необходимо рассмотреть эквивалентную схему фильтра Калмана (рис. 10.1).

Энергетический спектр (ЭС) $S_e(\omega)$ ошибки имеет вид [148]

$$S_e(\omega) = \frac{S_{x_1}(\omega)}{|1 + W(i\omega)|^2} + \frac{|W(i\omega)|^2}{|1 + W(i\omega)|^2} S_v(\omega),$$

где $S_{x_1}(\omega)$ ЭС процесса x_1 : $S_{x_1}(\omega) = q_w/|(i\omega)^2|$; $S_v(\omega) = S_v = \text{const}$ — ЭС СП $v(t)$; $W(i\omega)$ — характеристика прямой цепи контура ФК,

$$W(s) = \frac{\bar{k}_2/s + \bar{k}_1}{s} = \frac{\bar{k}_1 s + \bar{k}_2}{s^2}.$$

Заметим, что $\Phi_1(s) = W(s)/(1 + W(s))$ — передаточная функция замкнутой цепи ФК, тогда

$$\frac{1}{1 + W(s)} = 1 - \Phi_1(s).$$

Поскольку $\Phi_1(s) = \frac{\bar{k}_1 s + \bar{k}_2}{s^2 + \bar{k}_1 s + \bar{k}_2}$, то $1 - \Phi_1(s) = \frac{s^2}{s^2 + \bar{k}_1 s + \bar{k}_2}$.

Таким образом, энергетический спектр ошибки имеет вид

$$S_e(\omega) = \frac{q_w}{|(i\omega)^2 + \bar{k}_1(i\omega) + \bar{k}_2|^2} + |\Phi_1(i\omega)|^2 S_v.$$

Следовательно, дисперсию ошибки D_e можно записать в виде

$$D_e = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{q_w ds}{|s^2 + \bar{k}_1 s + \bar{k}_2|^2} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left| \frac{\bar{k}_1 s + \bar{k}_2}{s^2 + \bar{k}_1 s + \bar{k}_2} \right|^2 S_0 ds.$$

В результате находим ошибку фильтрации в установившемся режиме в неадаптивном фильтре:

$$\begin{aligned} D_c &= I_2^{(1)} + I_2^{(2)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left| \frac{\bar{k}_1 s + \bar{k}_2}{s^2 + \bar{k}_1 s + \bar{k}_2} \right|^2 S_0 ds + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left| \frac{1}{s^2 + \bar{k}_1 s + \bar{k}_2} \right|^2 q_w ds. \end{aligned}$$

Используя значение интеграла [60]

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} H(s)H(-s) ds$$

при $H(s) = c(s)/d(s)$; $c(s) = c_{n-1}s^{n-1} + \dots + c_0$; $d(s) = d_n s^n + \dots + d_0$, когда

$$I_2 = \frac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2},$$

при $c_1 = \bar{k}_1$; $c_0 = \bar{k}_2$; $d_0 = \bar{k}_2$; $d_1 = \bar{k}_1$; $d_2 = 1$, найдем значение первого слагаемого

$$I_2^{(1)} = S_0 \frac{\bar{k}_1^2 \bar{k}_2 + \bar{k}_2^2}{2\bar{k}_2 \bar{k}_1} = \frac{S_0}{2\bar{k}_1} (\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2) = \frac{3S_0}{2\sqrt{2}} \sqrt{\bar{k}_2}.$$

Аналогично находим второе слагаемое при $c_1 = 0$; $c_0 = 1$; $d_0 = \bar{k}_2$; $d_1 = \bar{k}_1$; $d_2 = 1$:

$$I_2^{(2)} = q_w \frac{1}{2\bar{k}_2 \bar{k}_1} = \frac{q_w}{2\sqrt{2}\bar{k}_2^{3/2}}.$$

Выигрыш в точности фильтрации можно оценить отношением [131]

$$B = \sqrt{D_n/D_a},$$

где $D_n = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}$; при $\bar{k}_2 = \sqrt{q_w/S_0}$ $D_a = (d_{11})_c = \sqrt{2S_0\sqrt{q_w S_0}}$.

Поскольку $\bar{k}_{2c} = \sqrt{S_0 q_w/S_0}$; $\bar{k}_2 = \sqrt{S_0 q_w/S_0}$, то $\bar{k}_{2c}/\bar{k}_2 = \sqrt{q_w/\bar{q}_w} = \sqrt{x}$; $D_a = S_0 \sqrt{2\bar{k}_{2c}}$.

После преобразований получим величину (10.4) [131]

$$B = \frac{1}{2} \sqrt{x^{3/4} + 3x^{-1/4}}, \quad x = \frac{q_w}{\bar{q}_w}, \quad (10.13)$$

так как $\bar{k}_2 = \sqrt{q_w/S_0}$.

Заметим, что передаточную функцию по оценке $\hat{\lambda}_1$ можно вычислить исходя из ДУ (10.10) в операторной форме. Тогда матричная передаточная функция принимает вид

$$\Phi(s) = (\mathbf{K}\mathbf{H} - \mathbf{F} + \mathbf{I}s)^{-1} \mathbf{K},$$

или

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 + s & -1 \\ \bar{k}_2 & s \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{K} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s & 1 \\ -\bar{k}_2 & \bar{k}_1 + s \end{bmatrix} \mathbf{K},$$

где Δ — определитель матрицы, $\Delta = s^2 + \bar{k}_1 s + \bar{k}_2$. Тогда после преобразований находим

$$\Phi(s) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \bar{k}_1 s + \bar{k}_2 \\ \bar{k}_2 s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \end{bmatrix},$$

где $\Phi_1(s)$ — передаточная функция по оценке $\hat{\lambda}_1$.

Как следует из (10.13), предельный выигрыш в точности фильтрации зависит только от отношения спектральных плотностей в адаптивном и неадаптивном фильтрах и не зависит от спектральной плотности аддитивного шума.

Для получения выигрыша в точности фильтрации в [131] рассматривается диапазон неопределенности по $q_w = 0,5...20000 \text{ м}^2\text{с}^{-3}$, что примерно соответствует интенсивности ускорения цели $a = 0,5...100 \text{ м/с}^2$.

Анализируется две ситуации. Сначала предполагается, что неадаптивный фильтр настроен на минимальное ускорение, т.е. $\bar{q}_w = 0,5 \text{ м}^2\text{с}^{-3}$. Тогда отношение $x = q_w/\bar{q}_w$ изменяется в диапазоне $[1; 4 \cdot 10^4]$, на правом конце интервала при такой настройке неадаптивного фильтра выигрыш может достигать 26,6 раза при сильном ускорении цели.

Когда неадаптивный фильтр настроен на максимальную интенсивность маневра цели, т.е. $q_w = 20000 \text{ м}^2\text{с}^{-3}$, $x \in [0,25 \cdot 10^4; 1]$, выигрыш $B \approx 3,27$ на левом конце интервала. Следовательно, неадаптивный фильтр целесообразно настраивать на максимальное значение маневра цели.

Сходимость процесса адаптации. Если алгоритм адаптации обладает этим свойством, то оценки характеристик сообщения, вырабатываемые фильтром в процессе адаптации, сходятся к истинным значениям этих характеристик [60].

Время адаптации. Пока процесс адаптации не завершен, используемые в системе оценки неизвестных параметров сообщения даже при сходящемся алгоритме адаптации значительно отличаются от истинных значений. Это приводит к увеличению ошибок фильтрации. Поэтому важно, чтобы время адаптации было достаточно малым [60].

Точность адаптации. Если неизвестные параметры сообщения постоянны во времени, то в адаптивных системах со сходящимся процессом адаптации ошибки оценивания этих параметров можно сделать в установившемся режиме равными нулю. При изменяющихся во времени параметров сообщения ошибки их оценивания даже в установившемся режиме не равны нулю, что определяется наличием шумов и динамикой изменения данных параметров.

Чувствительность адаптивных измерителей. Важным показателем качества работы адаптивных систем является их чувствительность к изменению условий работы по сравнению с принятыми при их синтезе и, в частности, чувствительность адаптивной системы к изменению характера (модели) сообщения [113–116].

При оценке возможностей адаптивных систем важную роль играет их чувствительность к изменению уровня шума (если в фильтре

не предусмотрена соответствующая адаптация), изменению крутизны дискриминатора и других параметров заданной части измерителя.

10.3. Адаптивная нелинейная оптимальная фильтрация при наличии постоянных параметров

Фильтрация непрерывных марковских процессов. Рассмотрим ситуацию, когда в уравнениях моделей сообщения и наблюдения имеется ряд неизвестных постоянных параметров. Запишем в этом случае модели сообщения и наблюдения в форме стохастических дифференциальных уравнений Ито:

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, t) dt + \mathbf{G}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, t) d\mathbf{w}_t; \\ d\mathbf{Y} &= \mathbf{H}(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda}, t) dt + \boldsymbol{\Psi}(t) d\mathbf{v}_t, \end{aligned} \quad (10.14)$$

где $\mathbf{X} \in \mathcal{M}_{n,1}$ — вектор сообщения; $\mathbf{Y} \in \mathcal{M}_{m,1}$ — вектор наблюдения; $\mathbf{F} : \mathcal{M}_{n,1} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}$ — вектор-функция; $\mathbf{G} : \mathcal{M}_{n,1} \times \mathbf{R} \rightarrow \rightarrow \mathcal{M}_{n,r}$ — матричная функция; $\boldsymbol{\Psi} : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_{m,l}$ — матричная функция; $\mathbf{w}_t \in \mathcal{M}_{r,1}$ — вектор независимых винеровских стандартных СП с ковариационной функцией $E\{\mathbf{w}_t \mathbf{w}_\tau^T\} = \mathbf{I}|t - \tau|$, $\mathbf{I} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$, $\mathbf{v}_t \in \mathcal{M}_{l,1}$ — вектор независимых винеровских стандартных шумов наблюдения с ковариационной функцией $E\{\mathbf{v}_t \mathbf{v}_\tau^T\} = \mathbf{I}|t - \tau|$, независимый от $\mathbf{X}(t)$ и \mathbf{w}_t ; $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{M}_{k,1}$ — вектор постоянных неизвестных параметров.

Поскольку вектор $\boldsymbol{\lambda}$ является постоянным, то его можно представить в виде решения ДУ

$$d\boldsymbol{\lambda} = 0. \quad (10.15)$$

К решению задачи адаптивной фильтрации имеется несколько подходов. Первый, наиболее распространенный, из них заключается в расширении вектора сообщений и включении в него вектора неизвестных параметров. В этом случае первое уравнение (10.14) и уравнение (10.15) образуют новую модель наблюдений. Поскольку априорное распределение вектора $\boldsymbol{\lambda}$ неизвестно, в качестве такового берут достаточно широкое распределение. Обоснование такому подходу приводят следующее (см. [51]). При выборе конкретного априорного распределения $W_{\boldsymbol{\lambda}}(x)$ синтезируется оптимальный для этого распределения алгоритм. При переборе всевозможных априорных распределений получается семейство оптимальных алгоритмов. На практике оказывается, что все оптимальные алгоритмы близки по результату, особенно при увеличении объема выборки. Это свойство носит название

* Раздел 10.3 за исключением примера 10.6 по просьбе автора подготовил д.т.н. В.В. Сизых.

асимптотической нечувствительности. Преимуществом такого подхода является то, что синтез адаптивного приемника при таком подходе ничем не отличается от решения стандартной задачи фильтрации.

Пример 10.2. Рассмотрим задачу фильтрации гауссовского случайного процесса с экспоненциальной корреляционной функцией и с неизвестной интенсивностью на фоне белого гауссовского шума. Модели сообщения и наблюдения в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} dx_1 &= 0, \\ dx_2 &= -(1/T)x_2 dt + (1/T)gdw_t; \\ dy &= x_1(t)x_2(t)dt + r dv_t, \end{aligned} \quad (10.16)$$

где w_t и v_t — независимые стандартные винеровские случайные процессы.

Здесь переменная $x_1(t)$ описывает неизвестную интенсивность сообщения $x_2(t)$.

Рассмотрим уравнения фильтра Стратоновича, соответствующие моделям (10.16). Алгоритм фильтрации можно представить в форме

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{F}dt + \mathbf{D}(\mathbf{H}')^T R^{-1}(dy - Hdt); \\ \frac{d\mathbf{D}}{dt} &= \mathbf{G}\mathbf{G}^T + \mathbf{F}'\mathbf{D} + (\mathbf{F}'\mathbf{D})^T - \mathbf{D}(\mathbf{H}')^T R^{-1}\mathbf{H}'\mathbf{D}; \\ \mathbf{F} &= [0; -(1/T)\bar{x}_2]^T; \quad \mathbf{F}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1/T \end{bmatrix}; \\ H &= \bar{x}_1\bar{x}_2; \quad \mathbf{H}' = [\bar{x}_2; \bar{x}_1]; \quad \mathbf{G} = [0; g/T]^T; \quad R = r^2, \end{aligned} \quad (10.17)$$

где $\bar{\mathbf{X}} = [\bar{x}_1; \bar{x}_2]^T$ — вектор оценок; \mathbf{D} — матрица размером 2×2 .

В скалярной форме уравнения (10.17) имеют вид:

$$\begin{aligned} d\bar{x}_1 &= R^{-1}(D_{11}\bar{x}_2 + D_{12}\bar{x}_1)(dy - \bar{x}_1\bar{x}_2dt); \\ d\bar{x}_2 &= -\frac{1}{T}\bar{x}_2dt + R^{-1}(D_{12}\bar{x}_2 + D_{22}\bar{x}_1)(dy - \bar{x}_1\bar{x}_2dt); \\ \frac{dD_{11}}{dt} &= -R^{-1}(D_{11}^2\bar{x}_2^2 + 2D_{11}D_{12}\bar{x}_1\bar{x}_2 + D_{12}^2\bar{x}_1^2); \\ \frac{dD_{12}}{dt} &= -\frac{1}{T}D_{12} - R^{-1}(D_{11}D_{12}\bar{x}_2^2 + \bar{x}_1\bar{x}_2(D_{12}^2 + D_{11}D_{12}) + D_{12}D_{22}\bar{x}_1^2); \\ \frac{dD_{22}}{dt} &= -\frac{g^2}{T^2} - \frac{2}{T}D_{22} - R^{-1}(D_{12}^2\bar{x}_2^2 + 2D_{12}D_{22}\bar{x}_1\bar{x}_2 + D_{22}^2\bar{x}_1^2). \end{aligned}$$

На рис. 10.2–10.4 представлены результаты моделирования алгоритма (10.17) при значениях параметров: $T = 10$, $r = 0,1$, $g = 1$, $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, и начальных условиях: $\bar{\mathbf{X}}(0) = [1; 0]^T$; $\mathbf{D}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

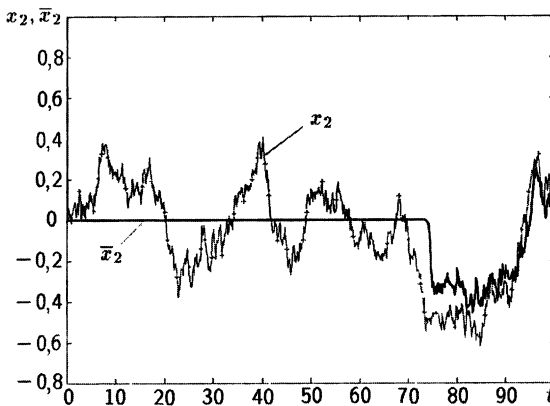


Рис. 10.2

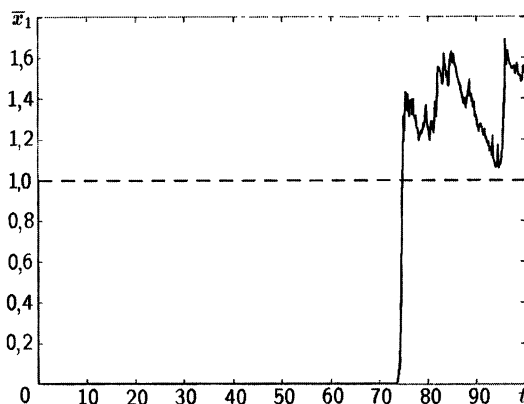


Рис. 10.3

На рис. 10.2 жирной линией изображена зависимость от времени оценки $\bar{x}_2(t)$ полезного сигнала $x_2(t)$, который показан тонкой линией с крестиками. На рис. 10.3 непрерывной линией показана оценка неизвестной постоянной интенсивности \bar{x}_1 полезного сообщения $x_2(t)$. Истинное значение x_1 изображено на рисунке штриховой линией. На рис. 10.4 представлены зависимости от времени элементов матрицы $\mathbf{D} = \mathbf{E}\{\mathbf{xx}^T\}$ апостериорных дисперсий: $D_{11}(t)$, $D_{12}(t)$, $D_{22}(t)$. Особенность динамики рассматриваемой системы обусловлена тем, что в начальный момент времени оценка неизвестного параметра совпадает с его истинным значением, но остальные начальные условия являются неравновесными.

Как видно из рисунков после окончания процесса адаптации сигнал $\bar{x}_2(t)$ на выходе системы близок к полезному.

На рис. 10.5–10.7 показаны результаты аналогичных расчетов при

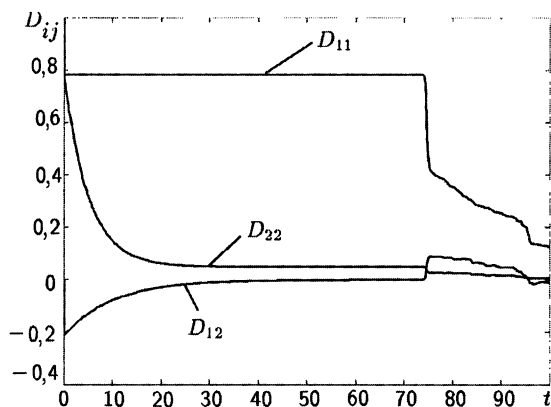


Рис. 10.4

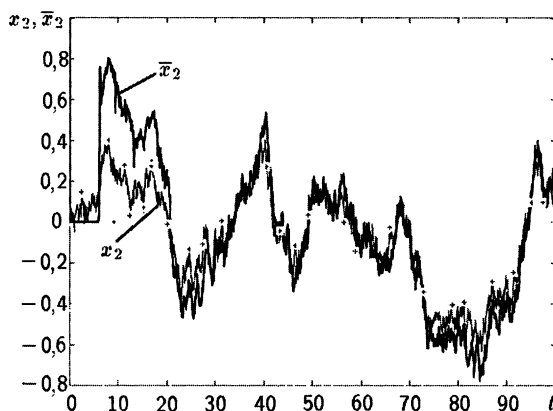


Рис. 10.5

значениях параметров: $T = 10$, $r = 0,1$, $g = 1$, $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = 0$, и начальных условиях: $\bar{\mathbf{X}}(0) = [1; 0]^T$; $\mathbf{D}(0) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,01 \end{bmatrix}$. В этом случае значения $x_1 = 4$ и $\bar{x}_1(0) = 1$ не совпадают и на рисунках наблюдается процесс адаптации по переменной \bar{x}_1 , начиная практически с начального момента времени.

Вторым подходом к построению адаптивных систем является построение оценок неизвестных параметров методом максимального правдоподобия. В этом случае не требуется задания априорных распределений неизвестных параметров.

Если обозначить через $W_{\mathbf{Y}_0^t | \boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{y}_0^t | \mathbf{x}; t)$ плотность распределения наблюдения \mathbf{y}_0^t в течение времени $[0; t]$ при известных значениях \mathbf{x} параметров $\boldsymbol{\lambda}$, то максимально правдоподобная оценка $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t)$ вектора

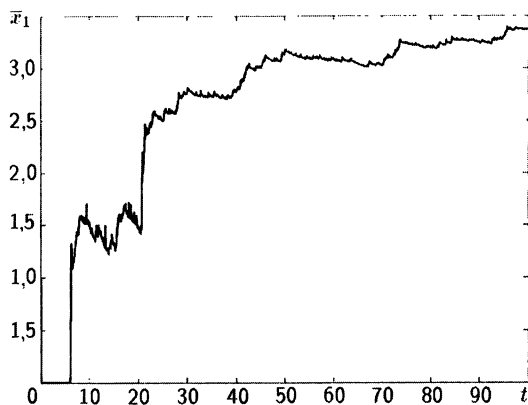


Рис. 10.6

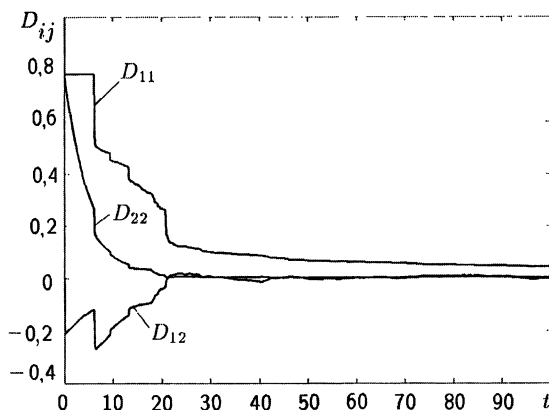


Рис. 10.7

параметров λ находится из условия [51]:

$$W_{Y_0|\lambda}(y_0^t | \hat{\lambda}; t) = \max_x W_{Y_0|\lambda}(y_0^t | x; t)$$

или из решения уравнения

$$\frac{\partial \ln W_{Y_0|\lambda}(y_0^t | \hat{\lambda}; t)}{\partial \hat{\lambda}} = 0.$$

Следующий адаптивный алгоритм построен по принципу многоканальной системы. Он является строгим, если неизвестный параметр является дискретной случайной величиной, принимающей конечное число известных значений. При непрерывном распределении неизвестных параметров алгоритм является квазиоптимальным даже при линейных моделях сообщения и наблюдения. Сущность адаптивного алгоритма заключается в усреднении оценок информативных пара-

метров, полученных при фиксированных значениях неизвестных параметров с ПРВ $W_{\lambda|Y_0^t}(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}_0^t)$.

Рассмотрим выражение для среднего риска

$$r(d) = \int_{\Omega_{Y_0^t}} \int_{\Omega_{\lambda}} \int_{\mathbf{X}} L(\mathbf{x}, d(\mathbf{y}_0^t)) W_{\mathbf{x}\lambda|Y_0^t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}_0^t; t) d\mathbf{x} d\mathbf{z} d\mathbf{y}_0^t,$$

где $L(\mathbf{x}, d(\mathbf{y}_0^t))$ — функция потерь от принятия решения $d(\mathbf{y}_0^t)$ при наличии наблюдений \mathbf{y}_0^t ; $W_{\mathbf{x}\lambda|Y_0^t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}_0^t; t)$ — функционал совместной ПРВ значений вектора информативных параметров \mathbf{X} , неизвестных параметров λ и наблюдений \mathbf{Y}_0^t за время $[0; t]$.

Если в качестве функции потерь используется квадратичная функция, то оптимальной оценкой является оценка условного среднего

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_{\mathbf{X}} \mathbf{x} W_{\mathbf{x}|Y_0^t}(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}_0^t) d\mathbf{x}.$$

Используя запись одномерной ПРВ через двумерную маргинальную ПРВ

$$W_{\mathbf{x}|Y_0^t}(\mathbf{x} | \mathbf{y}_0^t) = \int_{\Omega_{\lambda}} W_{\mathbf{x}\lambda|Y_0^t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t) d\mathbf{z},$$

выражение для оценки можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_{\mathbf{X}} \int_{\Omega_{\lambda}} \mathbf{x} W_{\mathbf{x}\lambda|Y_0^t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t) d\mathbf{z} d\mathbf{x}.$$

Используя определение условной ПРВ, находим

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \int_{\Omega_{\lambda}} \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) W_{\lambda|Y_0^t}(\mathbf{z} | \mathbf{y}_0^t) d\mathbf{z}, \quad (10.18)$$

где

$$\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{X}} \mathbf{x} W_{\mathbf{x}|Y_0^t\lambda}(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}_0^t, \mathbf{z}) d\mathbf{x} \quad (10.19)$$

— обычная оценка вектора информативных параметров при условии известного значения вектора параметров $\lambda = \mathbf{z}$.

Апостериорная ПРВ расширенного вектора $[\mathbf{X}; \lambda]^T$ сообщения $W_{\mathbf{x}\lambda|Y_0^t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t)$ находится обычным образом с использованием решения уравнения Стратоновича.

Рассмотрим расширенный вектор состояния $\{\mathbf{X}; \lambda\}$, который задается стохастическими ДУ в форме Ито (10.14) и (10.15). Относительно расширенного вектора можно записать стохастическое уравнение Стратоновича:

$$dW_{\mathbf{x}\lambda|Y_0^t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t) = L^+[W_{\mathbf{x}\lambda|Y_0^t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t)] dt +$$

$$+ [\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) - \mathbf{H}(\bar{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\lambda}, t)]^T \mathbf{R}^{-1}(t) [d\mathbf{y}_t - \mathbf{H}(\bar{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\lambda}, t) dt] W_{\mathbf{x}|\mathbf{Y}_0^t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t), \quad (10.20)$$

где $R(t) = \Psi(t)\Psi^T(t)$, L^+ — дифференциальный оператор прямого уравнения Колмогорова (уравнения ФПК):

$$L^+g = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t)g] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)_{ij}g],$$

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\lambda}, t) = \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} \int_{\Omega_{\boldsymbol{\lambda}}} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) W_{\mathbf{x}|\mathbf{Y}_0^t}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t) d\boldsymbol{\lambda} d\mathbf{x}.$$

Следует отметить в качестве существенного факта, что оператор L^+ совпадает с оператором прямого уравнения Колмогорова для марковского СП $\mathbf{X}(t)$ (10.14) при условии известного значения вектора постоянных параметров $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{z}$. Таким образом, можно записать уравнение Стратоновича относительно условной апостериорной ПРВ

$$dW_{\mathbf{x}|\mathbf{Y}_0^t\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}_0^t, \mathbf{z}) = L^+[W_{\mathbf{x}|\mathbf{Y}_0^t\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}_0^t, \mathbf{z})] dt +$$

$$+ [\mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) - \mathbf{H}(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{z}, t)]^T \mathbf{R}^{-1}(t) [d\mathbf{y}_t - \mathbf{H}(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{z}, t) dt] W_{\mathbf{x}|\mathbf{Y}_0^t\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}_0^t, \mathbf{z}), \quad (10.21)$$

где

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{z}, t) = \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) W_{\mathbf{x}|\mathbf{Y}_0^t\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}_0^t, \mathbf{z}) d\mathbf{x}.$$

Для вычисления апостериорной ПРВ $W_{\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Y}_0^t}(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t)$, зависимость которой от времени и определяет процесс адаптации, проинтегрируем уравнение Стратоновича (10.20) по переменной \mathbf{x} в области $\Omega_{\mathbf{X}}$. Учтем при этом, что

$$W_{\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Y}_0^t}(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t) = \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} W_{\mathbf{x}|\mathbf{Y}_0^t\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t) d\mathbf{x}$$

и

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) W_{\mathbf{x}|\mathbf{Y}_0^t\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t) d\mathbf{x} = \\ & = \int_{\Omega_{\mathbf{X}}} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{z}, t) W_{\mathbf{x}|\mathbf{Y}_0^t\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}_0^t, \boldsymbol{\lambda}) W_{\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Y}_0^t}(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t) d\mathbf{x} = \\ & = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{z}, t) W_{\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Y}_0^t}(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t). \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$dW_{\boldsymbol{\lambda}|\mathbf{Y}_0^t}(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}_0^t) = [\mathbf{H}(\bar{\mathbf{X}}, \mathbf{z}, t) - \mathbf{H}(\bar{\mathbf{X}}, \boldsymbol{\lambda}, t)]^T \mathbf{R}^{-1}(t) \times$$

$$\times [dy_t - \mathbf{H}(\mathbf{X}, \lambda, t)dt] W_{\lambda|Y_0^t}(z; t | y_0^t). \quad (10.22)$$

Поскольку распределение параметра λ дискретное, то

$$W_{\lambda|Y_0^t}(z; t | y_0^t) = \sum_{i=1}^m P_i(t) \delta(z - \lambda_i), \quad (10.23)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, а $P_i(t)$ — вероятности состояний.

Тогда подставляя (10.23) в (10.22) и интегрируя по переменной z в окрестности λ_i правую и левую части уравнения, находим уравнения относительно $P_i(t)$:

$$\begin{aligned} dP_i(t) = & [\mathbf{H}(\mathbf{X}, \lambda_i, t) - \sum_{j=1}^m \mathbf{H}(\mathbf{X}, \lambda_j, t) P_j(t)]^T \mathbf{R}^{-1}(t) \times \\ & \times [dy_t - \sum_{j=1}^m \mathbf{H}(\mathbf{X}, \lambda_j, t) P_j(t) dt] P_i(t). \end{aligned} \quad (10.24)$$

Уравнения (10.22) и (10.24) и дают искомое решение задачи.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 10.3. Модель сообщения и наблюдения (10.3) при фиксированном значении x_1 являются линейными относительно x_2 , поэтому уравнение Стратоновича (10.22) приводит к алгоритму линейного фильтра Калмана:

$$\begin{aligned} d\bar{x}_{2j} = & -\frac{1}{T} \bar{x}_{2j} dt + \frac{1}{r^2} D_j(t) \lambda_j [dy - \lambda_j \bar{x}_{2j} dt]; \\ \frac{dD_j}{dt} = & -\frac{2}{T} D_j + \frac{g^2}{T} - \frac{1}{T} D_j^2(t) \lambda_j^2; \\ \frac{dP_j}{dt} = & \frac{1}{r^2} \left[\lambda_j \bar{x}_{2j} - \sum_{i=1}^2 \lambda_j \bar{x}_{2i} P_i(t) \right] \left[dy - \sum_{i=1}^m \lambda_i \bar{x}_{2i} P_i(t) \right] P_j(t). \end{aligned}$$

Оценку согласно (10.18) находим по формуле

$$\bar{x}_2 = \sum_{i=1}^m \bar{x}_{2i} P_i(t).$$

На рис. 10.8 и 10.9 изображены результаты расчетов по изложенному выше алгоритму. Моделирование велось при следующих значениях параметров: $T = 10$, $r = 0,1$, $g = 1$, $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = 0$, и начальных условиях: $\bar{x}_2(0) = 0$; $\mathbf{D}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 6$; $\lambda_3 = 10$. Состояния параметра считались равновероятными. На рис. 10.8 изображены зависимости от времени истинного значения

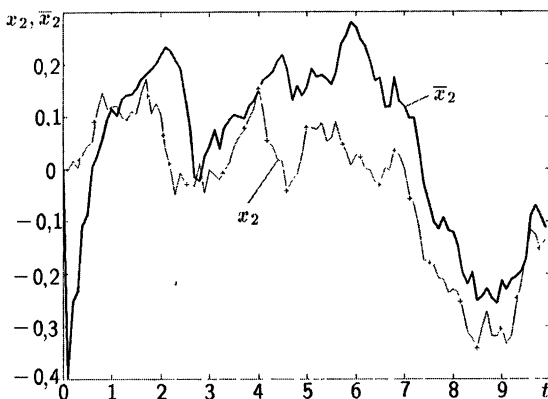


Рис. 10.8

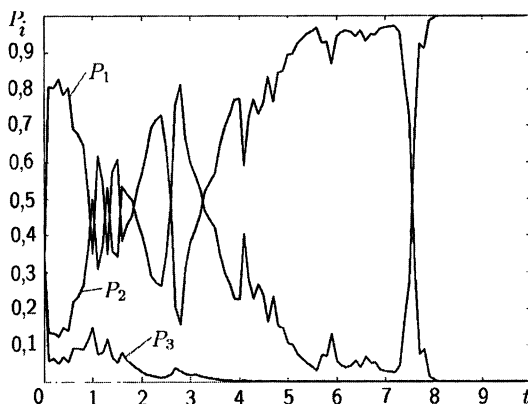


Рис. 10.9

полезного сигнала x_2 (тонкая линия с крестиками) и оценки \bar{x}_2 (жирная линия). На рис. 10.9 изображены зависимости от времени апостериорных вероятностей $P_i(t)$. Из рисунка видно, что в апостериорная вероятность P_2 с течением времени стремится к единице.

На рис. 10.10 и 10.11 изображены результаты расчетов при следующих значениях параметров: $T = 10$, $r = 0,1$, $g = 1$, $x_1(0) = 4$, нулевых начальных условиях: $\bar{x}_i(0) = 0$; $\mathbf{D}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = 3$; $\lambda_4 = 4$; $\lambda_5 = 5$; $\lambda_6 = 6$. Состояния параметра считались равновероятными. Из рисунка видно, что в апостериорная вероятность P_4 с течением времени стремится к единице.

Пример 10.4. В качестве второго примера рассмотрим работу системы фазовой автоподстройки для слежения за винеровской фазой гармонического сигнала на фоне белого шума с неизвестной интен-

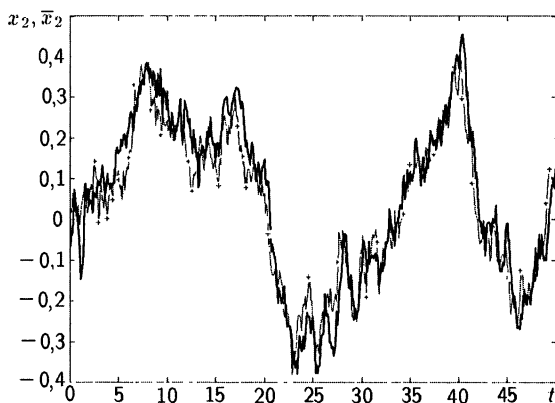


Рис. 10.10

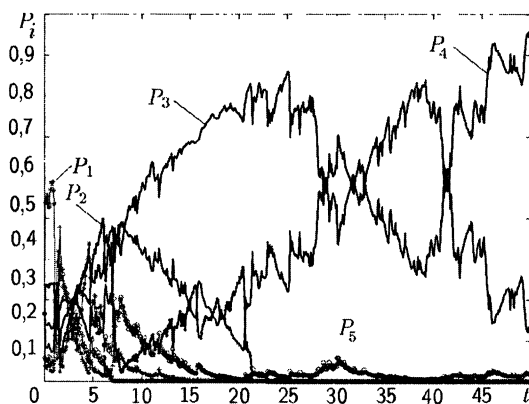


Рис. 10.11

сивностью:

$$\begin{aligned} dx_1 &= 0; \quad dx_2 = gdw_t; \\ dy &= A_0 \sin(\omega_0 + x_2(t)) dt + \lambda dv_t, \end{aligned}$$

где w_t и v_t — стандартные винеровские случайные процессы.

Поскольку модель наблюдения нелинейная, воспользуемся уравнениями фильтрации в нормальном приближении (алгоритм фильтра Стратоновича первого порядка). При линеаризации функции $\sin(\omega_0 t + x_2)$ в окрестности в окрестности оценки \bar{x}_2 получаем уравнения фильтрации при фиксированном значении параметра λ :

$$d\bar{x}_{2i} = \frac{1}{\lambda_i^2} D_i(t) A_0 \cos(\omega_0 t + \bar{x}_{2i}) [dy - A_0 \sin(\omega_0 t + \bar{x}_{2i}) dt];$$

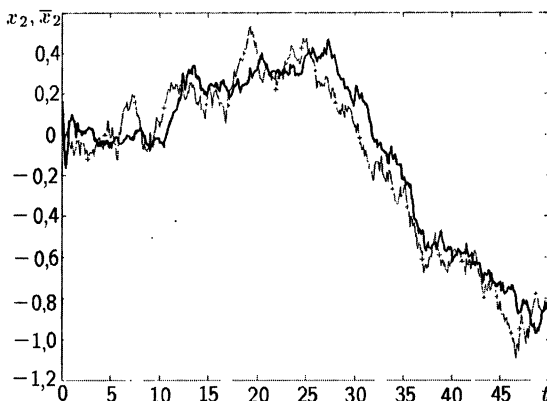


Рис. 10.12

$$\frac{dD_i}{dt} = g^2 - \frac{A_0}{2\lambda_i^2} D_i^2.$$

Если пренебречь в полученном уравнении фильтрации слагаемыми частоты $2\omega_0$, то приходим к широкоизвестному уравнению ФАП первого порядка

$$d\bar{x}_{2i} = \frac{A_0}{\lambda_i^2} D(t) dy \cos(\omega_0 t + \bar{x}_{2i}).$$

Уравнение адаптации имеет вид

$$dP_i = \frac{1}{\lambda_i^2} (A_0 \sin(\omega_0 + x_{2i}) - s)(dy - s dt) P_i;$$

$$s = \sum_{i=1}^m A_0 \sin(\omega_0 + x_{2i}) P_i.$$

Оценка фазы дается выражением

$$\bar{x}_2(t) = \sum_{i=1}^m \bar{x}_{2i}(t) P_i(t). \quad (10.25)$$

На рис. 10.12 и 10.13 изображены результаты расчетов при следующих значениях параметров: $A_0 = 1$, $g = 0,1$, $\omega_0 = 10^3$, $x_1(0) = 0$, $\bar{x}_{2i}(0) = 0$; $\mathbf{D}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_1 = 0,05$; $\lambda_2 = 0,1$; $\lambda_3 = 0,2$. На рис. 10.12 изображены полезный сигнал и его оценка, на рис. 10.13 — апостериорные вероятности состояний параметра. Состояния параметра считались равновероятными. Из рисунка видно, что в апостериорная вероятность P_2 с течением времени стремится к единице.

В заключение рассмотрим построение адаптивной системы для

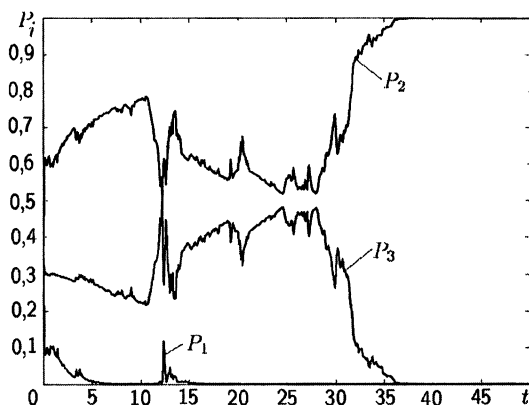


Рис. 10.13

линейной задачи оценки дальности и скорости до цели. Будем считать, что ускорение цели представляет собой случайный процесс типа гауссовского белого шума с неизвестной спектральной плотностью мощности (двусторонней) λ . Наблюдению доступна дальность до цели, причем измерения проводятся на фоне гауссовского аддитивного белого шума со спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Таким образом, модели сообщения и наблюдения имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \lambda w_t; \\ y(t) &= x_1(t) + \sqrt{\frac{N_0}{2}} v_t,\end{aligned}$$

где w_t — гауссовский белый шум с корреляционной функцией $R_w(\tau) = \lambda^2 \delta(\tau)$; v_t — независимый от w_t белый гауссовский шум с корреляционной функцией $R_v(\tau) = (N_0/2) \delta(\tau)$.

Уравнения многоканальной (число каналов m) адаптивной фильтрации в скалярной форме имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}_{i1}}{dt} &= \bar{x}_{i2} + k_{i1}[y(t) - \bar{x}_{i1}]; \\ \frac{d\bar{x}_{i2}}{dt} &= k_{i2}[y(t) - \bar{x}_{i1}]; \\ \frac{dD_{i11}}{dt} &= 2D_{i12} - \frac{2}{N_0} D_{i11}^2; \\ \frac{dD_{i12}}{dt} &= D_{i22} - \frac{2}{N_0} D_{i12} D_{i11};\end{aligned}$$

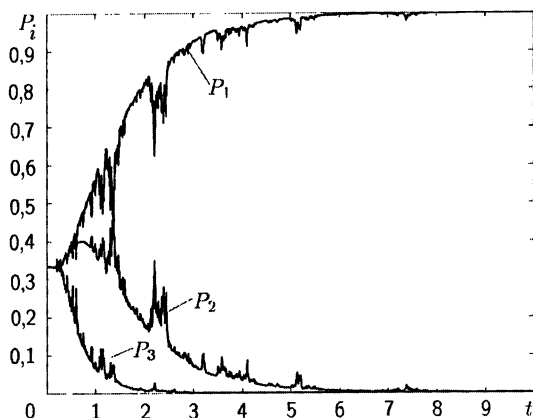


Рис. 10.14

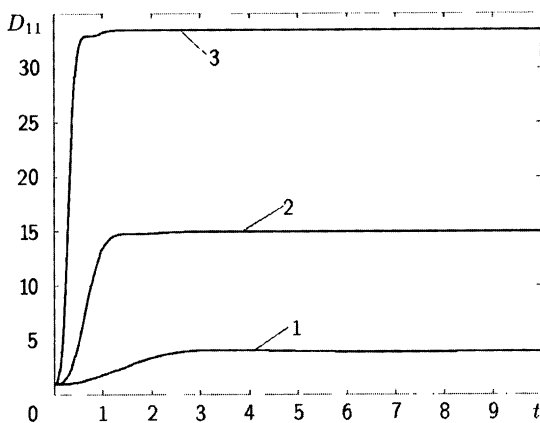


Рис. 10.15

$$\frac{dD_{i22}}{dt} = \lambda_i^2 - \frac{2}{N_0} D_{i12}^2;$$

$$k_{i1} = 2D_{i11}/N_0; \quad k_{i2} = 2D_{i12}/N_0;$$

$$\frac{dP_i}{dt} = \frac{2}{N_0} [x_{i1}(t) - s(t)][y(t) - s(t)]P_i;$$

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \bar{x}_{i1}(t)P_i(t).$$

На рис. 10.14–10.17 изображены результаты расчетов по приведенному алгоритму при следующих значениях параметров: $x_1(0) = \bar{x}_{1i}(0) = 50000$, $x_2(0) = x_{i2}(0) = -500$, $N_0 = 10$; $\mathbf{d}_i(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_1 = 0,7$; $\lambda_2 = 10$; $\lambda_3 = 50$. Рис. 10.14 и 10.15 соответствуют зна-

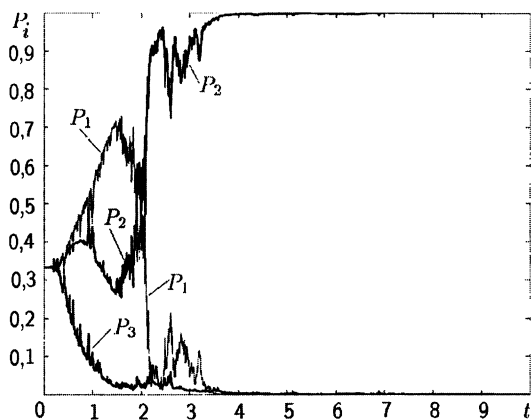


Рис. 10.16

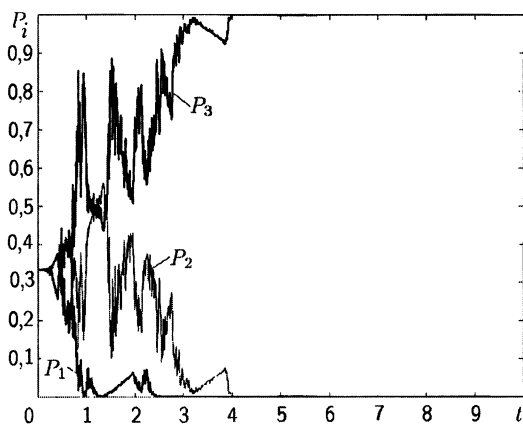


Рис. 10.17

чению $\lambda = 0,7$; рис. 10.16 — $\lambda = 10$; рис. 10.17 — $\lambda = 50$. На рис. 10.17 изображены зависимости для апостериорных дисперсий в трех каналах адаптивного приемника, на рис. 10.14, 10.16, 10.17 — апостериорные вероятности состояний параметра λ . Начальное состояние параметра считались равновероятными. Из рисунков видно, что во всех случаях было принято правильное решение о значении неизвестного параметра.

Пример 10.6 [127]. Адаптивная фильтрация гауссовского марковского процесса с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией [127].

Постановка задачи. Наблюдается случайный процесс

$$x(t) = \lambda(t) + n(t), \quad (10.26)$$

где $n(t)$ — ГБШ с известными характеристиками:

$$E\{n(t)\} = 0, \quad E\{n(t_1)n(t_2)\} = \frac{N}{2}\delta(t_2 - t_1).$$

Здесь $\lambda(t)$ — стационарный диффузионный процесс, удовлетворяющий стохастическому дифференциальному уравнению

$$d\lambda/dt = -\alpha(\lambda - m) + n_\lambda(t), \quad (10.27)$$

где m — неизвестное среднее значение случайного процесса $\lambda(t)$; $n_\lambda(t)$ — ГБШ с корреляционной функцией $E\{n_\lambda(t_1)n_\lambda(t_2)\} = (N_\lambda/2)\delta(t_2 - t_1)$.

Корреляционная функция процесса $\lambda(t)$ равна $R_\lambda(\tau) = D_\lambda \times \exp(-\alpha|\tau|)$; $D_\lambda = N_\lambda/4\alpha$. Ширина спектра α считается известной.

Требуется отфильтровать случайный процесс $\lambda(t)$ с неизвестным средним значением и дисперсией D_λ (последние эквивалентно незначению спектральной плотности N_λ).

Задача имеет очевидный адаптивный характер. Для оптимальной оценки случайного процесса $\lambda(t)$ необходимо дополнительно оценивать среднее значение и дисперсию.

Синтез адаптивного устройства фильтрации. Среди различных известных подходов к синтезу оптимальных адаптивных алгоритмов применим подход Р.Л. Стратоновича [130], базирующийся на включение совокупности неизвестных параметров, характеризующих неопределенность, в число оцениваемых [51, 130].

Вся доступная информация о значении $\lambda(t)$ случайного процесса в момент времени t содержится в апостериорной плотности вероятности (АПВ) $W(t, \lambda)$. При неизвестных параметрах процесса не существует непосредственного рекуррентного алгоритма вычисления $W(t, \lambda)$. Поэтому приходится определять $W(t, \lambda)$ из соотношения

$$W(t, \lambda) = \iint W(t, \lambda, m, D) dm dD,$$

где $W(t, \lambda, m, D)$ — апостериорная совместная плотность вероятности самого процесса и его параметров. При этом оптимальная оценка по критерию минимума среднего квадрата ошибки

$$\hat{\lambda}(t) = \int \lambda W(t, \lambda) d\lambda = \iiint \lambda W(t, \lambda, m, D) d\lambda dm dD. \quad (10.28)$$

Апостериорную плотность вероятности находим решением основного интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W(t, \lambda, m, D) = & \alpha \frac{\partial(\lambda - m)W(t, \lambda, m, D)}{\partial \lambda} + \alpha D \frac{\partial^2 W(t, \lambda, m, D)}{\partial \lambda^2} + \\ & + [F(t, \lambda) - F(t)]W(t, \lambda, m, D), \end{aligned} \quad (10.29)$$

где $F(t, \lambda) = \frac{2}{N} \left[x(t)\lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 \right]$; $F(t) = \int F(t, \lambda) W(t, \lambda, m, D) d\lambda dm dD$.

Задача фильтрации сводится к отысканию способов технической реализации алгоритмов (10.28), (10.29). В общем случае уравнение вида (10.29) не имеет явных решений, исключением является линейная фильтрация. Поэтому ограничиваются приближенными решениями, обеспечивающими приемлемую точность и допускающими сравнительно простую техническую реализацию. Наиболее распространенный метод, приводящий к наиболее простым в реализации приближенным решениям — гауссовское приближение — в рассматриваемом случае приводит к алгоритму, который не работоспособен. Это проверено моделированием на ЭВМ [127]. Для получения технически реализуемых приближенных алгоритмов при решении (10.29) применяется комбинация метода разделения и метода гауссовского приближения [127].

Согласно методу разделения [128], оптимальный адаптивный фильтр оценки $\hat{\lambda}(t)$ представляется в виде линейной неадаптивной части, состоящей из множества линейных фильтров Калмана, совокупность которых перекрывает область допустимых значений неизвестных параметров m, D и нелинейной части, включающей устройства вычисления АПРВ неизвестных параметров $W(t, m, D)$ и учитывающей адаптивный характер задачи. При этом линейные фильтры Калмана не связаны друг с другом, т.е. каждый фильтр функционирует независимо от остальных. Эта особенность существенно упрощает цифровую реализацию алгоритма [128].

Если неизвестных параметров много, то для перекрытия области допустимых значений по всем параметрам может потребоваться недопустимо большое число параллельных схем. Предлагаемая в [127] комбинация метода разделения и гауссовского приближения позволяет часть параметров неизвестного процесса $\lambda(t)$, оценка которых возможна линейным фильтром, оценивать одновременно с самим процессом при условии заданных значений остальных параметров. Структурная схема устройства адаптации получается значительно проще, так как имеет меньшее количество параллельных каналов.

Случайный процесс $\lambda(t)$ и его среднее значение m оценивается при разных фиксированных значениях дисперсии D .

Воспользовавшись алгоритмом разделения, представим АПРВ в виде произведения

$$W(t, \lambda, m, D) = W(t, \lambda, m | D) W(t, D), \quad (10.30)$$

где $W(t, D) = \int W(t, \lambda, m, D) d\lambda dm$ — АПРВ параметра D ; $W(t, \lambda, m | D)$ — условная АПРВ λ, m при фиксированном параметре D .

Подставляя (10.20) в (10.29) и интегрируя по λ и m , получим

$$\frac{d}{dt}W(t, D) = \left[F_D(t) - \int_D F_D(t)W(t, D) dD \right] W(t, D), \quad (10.31)$$

где

$$F_D(t) = \int_D F_D(t, \lambda)W(t, \lambda, m, D) d\lambda dm. \quad (10.32)$$

Уравнение (10.31) имеет решение

$$W(t, D) = \frac{\exp \left[\int_0^t F_D(\tau) d\tau \right] \pi_a(D)}{\int \exp \left[\int_0^t F_D(\tau) d\tau \right] \pi_a(D) dD}, \quad (10.33)$$

где $\pi_a(D)$ — априорное (начальное) распределение параметра D . Используя выражение для $F(t, \lambda)$, вместо (10.32) получим

$$\begin{aligned} F_D(t) &= \frac{2}{N} \left[x(t)\hat{\lambda}_D(t) - \frac{1}{2}\hat{\lambda}_D^2(t) \right] = \\ &= \frac{2}{N} \left[x(t)\hat{\lambda}_D(t) - \frac{1}{2}[\hat{\lambda}_D(t)]^2 - \frac{1}{2}R_D(t) \right], \end{aligned} \quad (10.34)$$

где $\hat{\lambda}_D(t)$ — условная (при фиксированном D) оценка $\lambda(t)$; $\hat{\lambda}_D^2(t)$ — момент второго порядка для $W(t, \lambda, m | D)$, т.е.

$$\hat{\lambda}_D^2(t) = \iint \lambda^2 W(t, \lambda, m | D) d\lambda dm = [\hat{\lambda}_D(t)]^2 + R_D(t);$$

$R_D(t)$ — апостериорная дисперсия оценки (при условии D), т.е.

$$R_D(t) = \iint [\lambda - \hat{\lambda}_D(t)]^2 W(t, \lambda, m | D) d\lambda dm.$$

Уравнение для $W(t, \lambda, m | D)$ получается подстановкой (10.30), (10.31) в (10.29):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(t, \lambda, m | D) &= \alpha \frac{\partial(\lambda - m)W(t, \lambda, m, D)}{\partial \lambda} + \alpha D \frac{\partial^2 W(t, \lambda, m | D)}{\partial \lambda^2} + \\ &+ [F(t, \lambda) - F_D(t)]W(t, \lambda, m | D). \end{aligned} \quad (10.35)$$

Точным решением уравнения (10.35) является гауссовская ПРВ. При этом уравнения для условной апостериорной оценки и дисперсии имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{\lambda}_D &= -\alpha(\hat{\lambda}_D - \hat{m}_D) + \frac{2}{N}R_{\lambda\lambda}[x(t) - \hat{\lambda}_D]; \\ \frac{d}{dt}\hat{m}_D &= \frac{2}{N}R_{m\lambda}[x(t) - \hat{\lambda}_D]; \end{aligned} \quad (10.36)$$

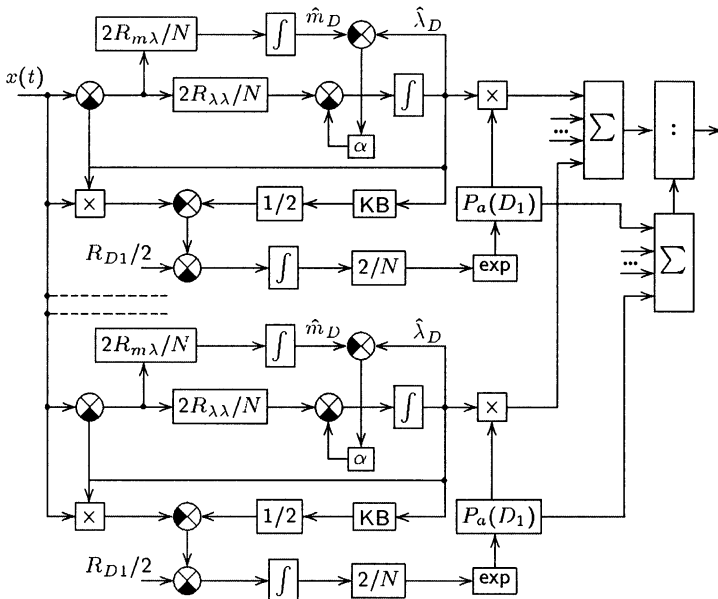


Рис. 10.18

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R_{\lambda\lambda} &= -2\alpha R_{\lambda\lambda} + 2\alpha R_{m\lambda} + \frac{N_{\lambda}}{2} - \frac{2}{N} R_{\lambda\lambda}^2; \\ \frac{d}{dt} R_{m\lambda} &= -\alpha R_{m\lambda} + \alpha R_{mm} - \frac{2}{N} R_{\lambda\lambda} R_{m\lambda}; \quad \frac{d}{dt} R_{mm} = -\frac{2}{N} R_{m\lambda}^2. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Выражение (10.28) для оценки $\hat{\lambda}(t)$, подстановкой (10.30) приводится к виду

$$\hat{\lambda}(t) = \int \hat{\lambda}_D(t) W(t, D) dD. \quad (10.38)$$

Для практической реализации алгоритмов (10.33), (10.36) и (10.37) область всех возможных значений дисперсии дискретизируется, т.е. в ней выбирается конечное число точек D_i , $i = 1, \dots, M$, в которых осуществляется вычисление условных апостериорных оценок и дисперсий. При этом выражение для оценки переходит в

$$\hat{\lambda}(t) = \sum_{i=1}^M \hat{\lambda}(t_i | D_i) W(t, D_i) \Delta D_i. \quad (10.39)$$

Структурная схема адаптивного устройства фильтрации изображена на рис. 10.18. Устройство представляет совокупность параллельно включенных фильтров, охватывающих весь возможный диапазон неопределенности дисперсии D . Предложенный метод позво-

ляет существенно сократить число параллельных каналов устройства, так как при непосредственной реализации метода разделения было бы необходимо иметь общее число, равное произведению числа каналов M по параметру D на число каналов по параметру m .

Характеристики адаптации. Решение уравнения Риккати (10.37) для условных ковариаций $R_{\lambda\lambda}$, $R_{m\lambda}$, R_{mm} осуществлялось на ЭВМ методом Рунге–Кутты [127].

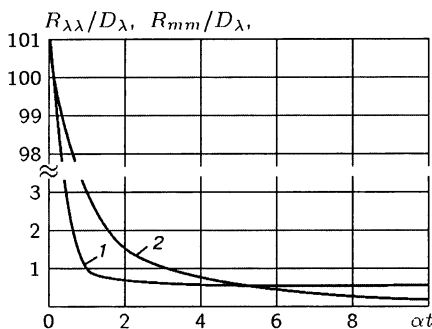


Рис. 10.19

На рис. 10.19 приведены апостериорные дисперсии оценки сообщения $R_{\lambda\lambda}$ (кривая 1) и оценки математического ожидания R_{mm} (кривая 2) нормированные к D_{λ} . При этом принято отношение сигнал/шум $q^2 = N_{\lambda}/(2N\alpha^2) = 5$ и отношение априорных дисперсий $R_{mm}/R_{\lambda\lambda} = 100$, т.е. рассмотрен случай значительной неопределенности в знании математического ожидания.

Важной характеристикой алгоритмов адаптации является время на обучение, т.е. время, потребное для устранения начальной неопределенности в значении неизвестного параметра до некоторых приемлемых точностей его оценки. Как следует из графиков, при известной дисперсии процесса, время, необходимое для обучения, составляет 5...10 времен корреляции процесса.

Исследование времени на обучение при неизвестной дисперсии помехи в принципе возможно методами статистического моделирования.

Можно ожидать, что оценка дисперсии при не слишком малых ОСШ требует меньшего времени, чем оценка среднего значения. Специальное исследование показывает, что это имеет место уже при ОСШ $q^2 \approx 10$.

Таким образом, время на обучение при адаптивной фильтрации гауссовского марковского процесса имеет порядок десятков времен корреляции процесса.

Часть III

Обнаружение случайных сигналов

11 Обнаружение гауссовских сигналов на фоне гауссовского белого шума (непрерывные процессы) [50]

Пусть наблюдается аддитивная смесь сигнала $s(t)$ и шума $w(t)$, причем сигнал и шум являются независимыми гауссовскими случайными процессами с нулевыми средними значениями:

$$E[s(t)] = E[w(t)] = 0.$$

Кроме того, шум — ГБШ со спектральной плотностью $N_0/2$. КФ сигнала и шума

$$R_w(t-u) = \frac{N_0}{2}\delta(t-u); \quad R_s(t,u) = E[s(t)s(u)].$$

Отсюда следует, что КФ аддитивной суммы

$$r(t) = s(t) + w(t), \quad T_1 \leq t \leq T_2,$$

имеет вид

$$R_r(t,u) = E[r(t)r(u)] = R_s(t,u) + \frac{N_0}{2}\delta(t-u), \quad T_1 \leq t, u \leq T_2.$$

Таким образом, задача обнаружения случайного сигнала сводится к проверке двух гипотез

$$\begin{aligned} H_0: & \quad r(t) = w(t); \\ H_1: & \quad r(t) = s(t) + w(t), \end{aligned} \quad T_1 \leq t \leq T_2. \quad (11.1)$$

В дальнейшем разложим процесс в ряд, используя собственные функции сигнального процесса в качестве координатных функций. Шумовая составляющая $w(t)$ является БШ, и поэтому коэффициенты разложения будут некоррелированными по обеим гипотезам и независимыми в силу гауссовского характера наблюдаемого СП $r(t)$.

Далее рассмотрим усеченный ряд $r_k(t)$ на k -м слагаемом.

Введем отношение правдоподобия (ОП)

$$\Lambda(r_k(t)) = \frac{W_1(r_k | H_1)}{W_0(r_k | H_0)}. \quad (11.2)$$

Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} \Lambda(r_k(t)) = \Lambda(r(t))$. Тогда решающее правило принимает вид

$$H_1 : \Lambda(r(t)) > \gamma,$$

$$H_0 : \Lambda(r(t)) < \gamma.$$

Как и прежде (см. гл. 1, 2) порог γ определяется стоимостью и априорными вероятностями при испытании по критерию Байеса и требуемой вероятностью ложной тревоги (ВЛТ) Q_0 при испытании по критерию Неймана–Пирсона.

Усеченный ряд имеет вид

$$r_k(t) = \sum_{n=1}^k r_n \varphi_n(t), \quad T_1 \leq t \leq T_2;$$

где

$$r_n = \int_{T_1}^{T_2} r(t) \varphi_n(t) dt. \quad (11.3)$$

Ортонормальные функции $\{\varphi_n(t)\}$ являются собственными функциями интегрального уравнения

$$\int_{T_1}^{T_2} R_s(t, u) \varphi_n(u) du = \lambda_n \varphi_n(t), \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad (11.4)$$

где λ_n — n -е собственное значение интегрального уравнения. Тогда

$$r(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} r_k(t), \quad T_1 \leq t \leq T_2.$$

Найдем средние значения и корреляционные моменты коэффициентов r_n , соответственно двум гипотезам:

$$E(r_n | H_0) = E \left[\int_{T_1}^{T_2} w(t) \varphi_n(t) dt \right] = 0;$$

$$E(r_i r_j | H_0) = \frac{N_0}{2} \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера;

$$E(r_n | H_1) = E \left[\int_{T_1}^{T_2} s(t) \varphi_n(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} w(t) \varphi_n(t) dt \right] = 0;$$

$$R_r(i, j) = E(r_i r_j | H_1) = \left(\lambda_n + \frac{N_0}{2} \right) \delta_{ij},$$

так как $E(s_i s_j) = \lambda_i \delta_{ij}$.

Поскольку r_i являются статистически независимыми гауссовски-

ми СВ по той и другой гипотезам, то ОП принимает вид

$$\Lambda(r_k(t)) = \frac{\prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi(N_0/2 + \lambda_i)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{r_i^2}{\lambda_i + N_0/2}\right)}{\prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \frac{r_i^2}{N_0/2}\right)}.$$

После преобразований и логарифмирования найдем

$$\ln \Lambda(r_k(t)) = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i + N_0/2} r_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \ln \left(1 + \frac{2\lambda_i}{N_0}\right). \quad (11.5)$$

Необходимо найти ОП в замкнутой форме при $k \rightarrow \infty$. Для этого следует определить обратное ядро интегрального уравнения, которое находим из соотношения

$$\int_{T_1}^{T_2} R_r(t, u) Q_r(u, z) du = \delta(t - z), \quad T_1 \leq t \leq T_2.$$

Будучи записанным через собственные функции и собственные значения это ядро имеет вид [50]

$$Q_r(t, u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i + N_0/2} \varphi_i(t) \varphi_i(u), \quad T_1 \leq t \leq T_2.$$

Обратное ядро можно записать в виде суммы [50]:

$$Q_r(t, u) = \frac{2}{N_0} [\delta(t - u) - h_1(t, u)], \quad T_1 \leq t \leq T_2,$$

где функция $h_1(t, u)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{N_0}{2} h_1(t, u) + \int_{T_1}^{T_2} h_1(t, z) R_s(z, u) dz = R_s(t, u), \quad T_1 \leq t, u \leq T_2. \quad (11.6)$$

Решение интегрального уравнения (11.6) можно записать, используя собственные значения λ_i и собственные функции $\varphi_i(t)$:

$$h_1(t, u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i + N_0/2} \varphi_i(t) \varphi_i(u), \quad T_1 \leq t, u \leq T_2. \quad (11.7)$$

Для первого слагаемого (11.5) учтем соотношение (11.3), тогда (11.5) принимает вид

$$\ln \Lambda(r_k(t)) = \frac{1}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} r(t) \left(\sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i + N_0/2} \varphi_i(t) \varphi_i(u) \right) r(u) dt du -$$

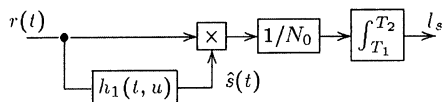


Рис. 11.1

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \ln \left(1 + \frac{2\lambda_i}{N_0} \right).$$

Перейдем к пределу при $k \rightarrow \infty$ и учтем (11.7). В результате получим

$$\ln \Lambda(r_k(t)) = \frac{1}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} r(t) h_1(t, u) r(u) dt du - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \ln \left(1 + \frac{2\lambda_i}{N_0} \right).$$

Решающее правило принимает вид

$$\begin{aligned} H_1: & \quad l_s > \gamma'; \\ H_0: & \quad l_s \leq \gamma', \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} l_s &= \frac{1}{N_0} \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} r(t) h_1(t, u) r(u) dt du; \\ \gamma' &= \ln \gamma + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \ln \left(1 + \frac{2\lambda_i}{N_0} \right). \end{aligned} \quad (11.8)$$

По критерию минимума среднего квадрата ошибки оценку $\hat{s}(t)$ сигнала можно получить, пропустив наблюдаемый СП $r(t)$ через фильтр с импульсной характеристикой $h_1(t, u)$:

$$\hat{s}(t) = \int_{T_1}^{T_2} h_1(t, u) r(u) du, \quad T_1 \leq t \leq T_2, \quad (11.9)$$

где $h_1(t, u)$ удовлетворяет интегральному уравнению (11.6). В таком случае приемник осуществляет коррекцию СП $r(t)$ с оценкой сигнала $\hat{s}(t)$. Поэтому такой приемник называют оценщиком — коррелятором [50] (рис. 11.1).

Возможна и другая реализация приемника, а именно в виде оптимального реализуемого фильтра. Такой подход на основе использования интегрального уравнения (11.6) предложен Швеппе [46]. В данном случае ОП формируется в реальном масштабе времени как выходное напряжение нелинейной динамической системы. На основе теории марковских СП этот же подход ранее был предложен в работах Р.Л. Стратоновича и Ю.Г. Сосулина [51, 133–136].

В дальнейшем положим $T_1 = 0$; $T_2 = T$. Запишем ОП $l_1(T)$

в виде

$$l_s(T) = \int_0^T \frac{dl_s(t)}{dt} dt = \int_0^T \dot{l}_s(t) dt,$$

где $l_s(0) = 0$.

Заменяв T на t в (11.8), получим [50]

$$l_s(t) = \frac{1}{N_0} \int_0^t r(\tau) d\tau \int_0^t h_1(\tau, u : t) r(u) du, \quad (11.10)$$

где $h_1(\tau, u : t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\frac{N_0}{2} h_1(\tau, u : t) + \int_0^t h_1(\tau, z : t) R_s(z, u) dz = R_s(\tau, u); \quad 0 \leq \tau, \quad u \leq t. \quad (11.11)$$

Решение этого уравнения зависит от времени t , что подчеркивается формой записи $h_1(\tau, u : t)$.

Дифференцируя $l_s(t)$ (11.10), получим

$$\begin{aligned} \dot{l}_s(t) = & \frac{1}{N_0} \left\{ r(t) \int_0^t h_1(t, u : t) r(u) du + \right. \\ & \left. + r(t) \int_0^t r(\tau) \left[h_1(\tau, t : t) r(t) + \int_0^t \frac{\partial h_1(\tau, u : t)}{\partial t} r(u) du \right] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

В этом случае интегральное уравнение (11.11) приводится к виду

$$\frac{N_0}{2} h_1(t, u : t) + \int_0^t h_1(t, z : t) R_s(z, u) dz = R_s(t, u), \quad 0 \leq u \leq t. \quad (11.13)$$

Введем оценку $\hat{s}(t)$ сигнала, аналогичного (11.9):

$$\hat{s}(t) = \int_0^t h_1(t, u : t) r(u) du, \quad (11.14)$$

или в форме

$$\hat{s}(t) = \int_0^t h_1(u, t : t) r(u) du. \quad (11.15)$$

Последняя формула следует из симметрии решения уравнения (11.11). Учитывая (11.14), (11.15), из (11.12) находим

$$\dot{l}_s(t) = \frac{1}{N_0} \left[2r(t)\hat{s}(t) + \int_0^t d\tau \int_0^t r(\tau) \frac{\partial h_1(\tau, u : t)}{\partial t} r(u) du \right].$$

Докажем справедливость соотношения

$$\frac{\partial h_1(\tau, u : t)}{\partial t} = -h_1(\tau, t : t)h_1(t, u : t), \quad 0 \leq \tau, u \leq t. \quad (11.16)$$

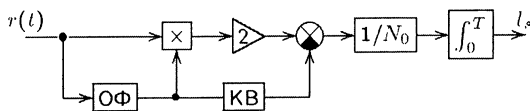


Рис. 11.2

Сначала дифференцируем (11.11):

$$\frac{N_0}{2} \frac{\partial h_1(\tau, u : t)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial h_1(\tau, z : t)}{\partial t} R_s(z, u) dz + h_1(\tau, t : t) R_s(t, u) = 0, \\ 0 \leq \tau, u \leq t.$$

Далее заменим КФ $R_s(t, u)$ левой частью уравнения (11.13) и перегруппируем слагаемые. В результате получим

$$-\frac{N_0}{2} \left[\frac{\partial h_1(\tau, u : t)}{\partial t} + h_1(\tau, t : t) h_1(t, u : t) \right] = \\ = \int_0^t \left[\frac{\partial h_1(\tau, z : t)}{\partial t} + h_1(\tau, t : t) h_1(t, z : t) \right] R_s(z, u) dz, \\ 0 \leq \tau, u \leq t. \quad (11.17)$$

Следует заметить, что суммы в квадратных скобках выполняют роль собственных функций с собственными значениями $\lambda = -N_0/2$, что следует из сравнения (11.17) с интегральным уравнением (11.4). Однако, по определению ядра $R_s(z, u)$, интегральное уравнение с таким ядром не может иметь отрицательного собственного значения. Следовательно, чтобы соблюдалось равенство в (11.17), необходимо приравнять выражения в квадратных скобках. Отсюда следует справедливость (11.16). Подставив значение производной из (11.16) в (11.15) и учитывая (11.13), получаем искомый результат:

$$\dot{l}_s(t) = \frac{1}{N_0} [2r(t)\hat{s}(t) - \hat{s}^2(t)]. \quad (11.18)$$

Отсюда после интегрирования находим ОП

$$l_s = l_s(T) = \frac{1}{N_0} \int_0^T [2r(t)\hat{s}(t) - \hat{s}^2(t)] dt.$$

Структура оптимального приемника имеет вид рис. 11.2. На этом рисунке ОФ — оптимальный фильтр; КВ — квадратор.

Рассмотрим реализацию оптимального приемника в переменных состояния. Здесь информационный процесс описывается уравнением состояния [50]

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{u}(t),$$

где $\mathbf{F}(t)$ и $\mathbf{G}(t)$ — соответствующие матрицы.

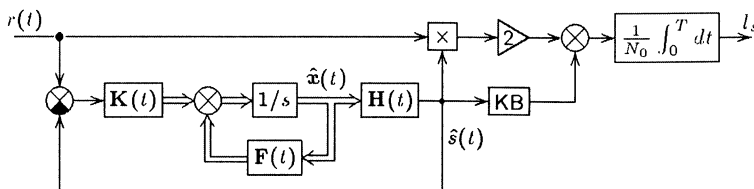


Рис. 11.3

Уравнение наблюдения имеет вид

$$s(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{X}(t).$$

Случайный процесс $\mathbf{u}(t)$ — БШ, такой, что

$$E[\mathbf{u}(t)\mathbf{u}^T(\tau)] = \mathbf{Q}\delta(t - \tau).$$

Начальные условия имеют вид

$$E[\mathbf{X}(0)] = 0, \quad E[\mathbf{X}(0)\mathbf{X}^T(0)] = \mathbf{P}_0.$$

Оценка сигнала $\hat{s}(t)$ оптимальная по критерию минимума среднего квадрата ошибки имеет вид

$$\hat{s}(t) = \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{x}}(t),$$

причем оценка $\hat{\mathbf{x}}(t)$ удовлетворяет уравнению фильтра Калмана [95]

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}(t)\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}(t)[r(t) - \mathbf{H}(t)\hat{\mathbf{x}}(t)],$$

где $\mathbf{K}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{S}_0^{-1}(t)$; $\mathbf{S}_0^{-1}(t) = 2/N_0$; $\mathbf{D}(t)$ — матрица дисперсий, удовлетворяющая уравнению Риккати

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{F}(t)\mathbf{D}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{F}^T(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{G}^T(t) - \mathbf{D}(t)\mathbf{H}^T(t)\mathbf{S}_0^{-1}\mathbf{H}(t)\mathbf{D}(t);$$

$$\mathbf{D}(0) = \mathbf{D}_0.$$

Матрица $\mathbf{D}(t)$ является ковариационной матрицей ошибки $\mathbf{e}(t) = \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)$:

$$\mathbf{D}(t) = E\{[\mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)]\mathbf{X}^T(t) - \hat{\mathbf{X}}^T(t)\}.$$

Средний квадрат ошибки оценки сигнала

$$\sigma_s^2(t) = \mathbf{H}(t)\mathbf{D}(t)\mathbf{H}^T(t).$$

Значение матрицы дисперсий $\mathbf{D}(t)$ и величину $\sigma_s^2(t)$ можно вычислить до приема процесса $r(t)$.

Уравнение состояния для ОП получается по (11.18). Таким образом, ОП формируется как выходное напряжение динамической системы.

Структурная схема оптимального приемника в переменных состояния изображена на рис. 11.3.

12 Обнаружение случайных сигналов (дискретные процессы)

12.1. Энергетический приемник

Сигнал $s[n]$ моделируется стационарным гауссовским белым случайным процессом (ГБШ) с нулевым средним значением и дисперсией σ_s^2 . Помеха (шум) $w[n]$ представляет собой также ГБШ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 . Шум и сигнал — независимые случайные процессы:

$$x[n] = s[n] + w[n]. \quad (12.1)$$

Обнаружитель (приемник) должен различать две гипотезы:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & x[n] = w[n]; \\ H_1 : \quad & x[n] = s[n] + w[n], \quad n = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

Принимается гипотеза H_1 , если ОП превышает некоторый порог γ :

$$\Lambda(X_n) = \frac{W_1(X_n | H_1)}{W_2(X_n | H_0)} > \gamma. \quad (12.2)$$

По предположению, $x \sim N(0; \sigma^2 \mathbf{I})$ при гипотезе H_0 (\mathbf{I} — единичная матрица) и $N(0; (\sigma_s^2 + \sigma^2) \mathbf{I})$ при гипотезе H_1 . Таким образом, получим ОП

$$\Lambda(\mathbf{X}_n) = \frac{\frac{1}{[2\pi(\sigma_s^2 + \sigma^2)]^{N/2}} \exp \left[-\frac{1}{2(\sigma_s^2 + \sigma^2)} \sum_{n=1}^N x^2[n] \right]}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=1}^N x^2[n] \right)}.$$

Логарифм $\Lambda(\mathbf{X}_n)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(\mathbf{X}_n) &= \frac{N}{2} \ln \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_s^2 + \sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right) \sum_{n=1}^N x^2[n] = \\ &= \frac{N}{2} \ln \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2(\sigma_s^2 + \sigma^2)} \sum_{n=1}^N x^2[n]. \end{aligned}$$

Таким образом, принимается решение в пользу гипотезы H_1 , если

статистика $T(\mathbf{X}_n)$ удовлетворяет неравенству

$$T(\mathbf{X}_n) = \sum_{n=1}^N x^2[n] > \gamma'. \quad (12.3)$$

Следовательно, обнаружитель Неймана–Пирсона должен вычислять энергию наблюдаемых данных $\mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n = \sum_{n=1}^N x^2[n]$, $\mathbf{X}_n = \{x[1], x[2], \dots, x[N]\}$, и сравнивать ее с порогом. Такой обнаружитель известен как энергетический приемник. Очевидно, в присутствии сигнала энергия принятого колебания возрастает.

Если ввести эквивалентную статистику

$$T'(\mathbf{X}_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^2[n],$$

то получим устройство оценки дисперсии наблюдаемого колебания.

После нормировки статистики $T(\mathbf{X}_n)$ получим

$$\begin{aligned} \frac{T(\mathbf{X}_n)}{\sigma^2} &\sim \chi_N^2 \quad \text{при гипотезе } H_0, \\ \frac{T(\mathbf{X}_n)}{\sigma_s^2 + \sigma^2} &\sim \chi_N^2 \quad \text{при гипотезе } H_1, \end{aligned} \quad (12.4)$$

так как статистика $T(\mathbf{X}_n)$ представляет собой сумму N квадратов одинаково распределенных гауссовских СВ с нулевым средним значением и дисперсией, равной соответственно σ^2 (при H_0) и $\sigma_s^2 + \sigma^2$ (при H_1).

Таким образом, вероятность обнаружения Q_d и ВЛТ Q_0 выражаются через Q -функцию вида

$$Q_{\chi_\nu^2}(x) = \int_x^\infty W(u) du, \quad (12.5)$$

где $W(u)$ — распределение χ_ν^2 с ν степенью свободы ($\nu = N$, $\nu \geq 1$);

$$W(x) = \begin{cases} \frac{x^{\nu/2-1}}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) & \text{при } x > 0; \\ 0 & \text{при } x < 0; \end{cases}$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

причем $\Gamma(z) = (z-1)\Gamma(z-1)$ при любом z ; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ при целом n .

Выразим ВЛТ Q_0 через Q -функцию $Q(x)$:

$$\begin{aligned} Q_0 &= P\{T(\mathbf{X}_n) > \gamma' \mid H_0\} = \\ &= P\left\{\frac{T(\mathbf{X}_n)}{\sigma^2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2} \mid H_0\right\} = Q_{\chi^2_\nu}\left(\frac{\gamma'}{\sigma^2}\right) = Q_{\chi^2_\nu}(\alpha_\nu), \end{aligned} \quad (12.6)$$

где $\alpha_\nu = \gamma'/\sigma^2$; α_ν — процентная точка χ^2 -распределения. Тогда вероятность обнаружения

$$\begin{aligned} Q_d &= P\left\{\frac{T(X_n)}{\sigma_s^2 + \sigma^2} > \frac{\gamma'}{\sigma_s^2 + \sigma^2} \mid H_1\right\} = Q_{\chi^2_\nu}\left(\frac{\gamma'}{\sigma_s^2 + \sigma^2}\right) = \\ &= Q_{\chi^2_\nu}\left(\frac{\gamma'/\sigma^2}{\sigma_s^2/\sigma^2 + 1}\right) = Q_{\chi^2_\nu}\left(\frac{\alpha_\nu}{\sigma_s^2/\sigma^2 + 1}\right). \end{aligned} \quad (12.7)$$

Очевидно, что с ростом ОСШ σ_s^2/σ^2 вероятность обнаружения возрастает.

Если ввести процентную точку распределения χ^2_ν , равную

$$q = Q_{\chi^2_\nu}^{-1}(Q_0) = \gamma'/\sigma^2, \quad (12.8)$$

то получим

$$Q_d = Q_{\chi^2_\nu}\left(\frac{q}{\sigma_s^2/\sigma^2 + 1}\right). \quad (12.9)$$

При $Q_0 = 10^{-n}$, $n = \overline{1,4}$, по таблице находим для $\nu = 25$ $q_1 = 34,3816$; $q_2 = 44,3141$; $q_3 = 52,620$; $q_4 = 60,140$. При $\nu = 70$ $q_1 = 85,5271$; $q_2 = 100,425$; $q_3 = 112,317$; $q_4 = 122,755$.

Характеристики обнаружения энергетического приемника изображены на рис. 12.1 (при $\nu = 25$) и рис. 12.2 (при $\nu = 70$) при $Q_0 = 10^{-n}$, $n = \overline{1,4}$, в зависимости от ОСШ $d_{\text{дБ}} = 10 \lg(\sigma_s^2/\sigma^2)$ от -20 до 10 дБ.

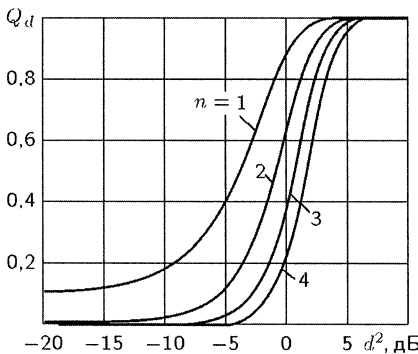


Рис. 12.1

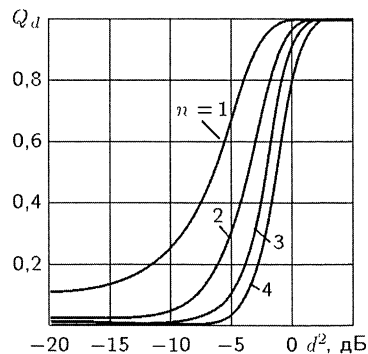


Рис. 12.2

Для вероятности обнаружения могут быть получены приближенные формулы, если использовать асимптотические соотношения для $Q_{\chi^2_\nu}$ -функции [58]:

первая асимптотическая формула

$$Q_{\chi^2_\nu}(x) = Q\left(\frac{x - \nu}{\sqrt{2\nu}}\right); \quad (12.10)$$

вторая асимптотическая формула

$$Q_{\chi^2_\nu}(x) = Q(x_0), \quad x_0 = \frac{(x/\nu)^{1/3} - (1 - 2/9\nu)}{\sqrt{2/9\nu}}; \quad (12.11)$$

третья асимптотическая формула

$$Q_{\chi^2_\nu}(x) = Q(x_1), \quad x_1 = \sqrt{2x} - \sqrt{2\nu - 1} \approx \sqrt{2x} - \sqrt{2\nu}. \quad (12.12)$$

Обозначим $\gamma'/\sigma^2 = \alpha_\nu$. Тогда по (12.6) получим

$$Q\left(\frac{\alpha_\nu - \nu}{\sqrt{2\nu}}\right) = Q_0.$$

Отсюда

$$\frac{\alpha_\nu - \nu}{\sqrt{2\nu}} = \frac{\alpha_\nu}{\sqrt{2\nu}} - \sqrt{\frac{\nu}{2}} = A - \sqrt{\frac{\nu}{2}} = Q^{-1}(Q_0), \quad A = Q^{-1}(Q_0) + \sqrt{\nu/2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_{\chi^2_\nu}\left(\frac{\alpha_\nu}{\sigma_s^2/\sigma^2 + 1}\right) \approx Q\left(\frac{\frac{\alpha_\nu}{\sigma_s^2/\sigma^2 + 1} - \nu}{\sqrt{2\nu}}\right) = \\ &= Q\left(\frac{A}{\sigma_s^2/\sigma^2 + 1} - \sqrt{\frac{\nu}{2}}\right) = Q\left(\frac{\gamma - \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2}\sqrt{\frac{\nu}{2}}}{\sigma_s^2/\sigma^2 + 1}\right); \quad \gamma = Q^{-1}(Q_0). \end{aligned}$$

Таким образом, первая приближенная формула принимает вид

$$Q_d \approx Q\left(\frac{\gamma - d^2\sqrt{\nu/2}}{d^2 + 1}\right), \quad d^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2}. \quad (12.13)$$

Согласно второй асимптотической формуле

$$x_0 = \frac{(x/\nu)^{1/3} - A}{B} = \frac{(x/\nu)^{1/3}}{B} - \frac{A}{B}, \quad A = 1 - \frac{2}{9\nu}, \quad B = \sqrt{\frac{2}{9\nu}}.$$

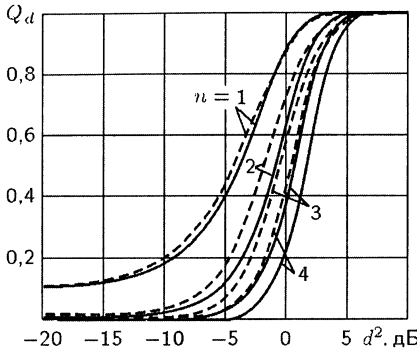


Рис. 12.3

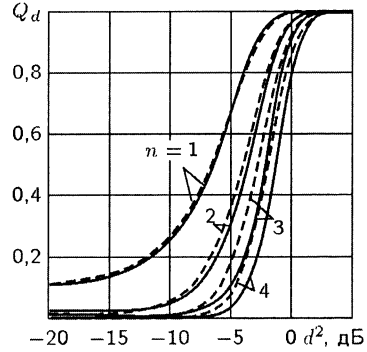


Рис. 12.4

Из условия

$$Q_0 = Q \left(\frac{(x/\nu)^{1/3}}{B} - \frac{A}{B} \right) \quad (12.14)$$

при $x = \alpha_\nu$

$$Q^{-1}(Q_0) = \gamma = \frac{(\alpha_\nu/\nu)^{1/3}}{B} - \frac{A}{B}$$

находим

$$Q_d = Q_{\chi_\nu^2} \left(\frac{\alpha_\nu}{d^2 + 1} \right) \approx Q \left(\frac{(\alpha_\nu/\eta\nu)^{1/3}}{B} - \frac{A}{B} \right) = Q \left(\frac{(\alpha_\nu/\nu)^{1/3}}{B\eta^{1/3}} - \frac{A}{B} \right),$$

где $\eta = d^2 + 1 = \sigma_s^2/\sigma^2 + 1$.

По (12.14)

$$\frac{(\alpha_\nu/\nu)^{1/3}}{B} = \gamma + \frac{A}{B}.$$

Таким образом, вторая приближенная формула принимает вид

$$Q_d = Q \left(\frac{\gamma + A/B}{\eta^{1/3}} - \frac{A}{B} \right) = Q \left[\frac{\gamma}{\eta^{1/3}} - \frac{A}{B}(1 - \eta^{-1/3}) \right]. \quad (12.15)$$

Согласно третьей асимптотической формуле (12.12)

$$\sqrt{2\alpha_\nu} - \sqrt{2\nu} = Q^{-1}(Q_0) = \gamma; \quad \sqrt{2\alpha_\nu} = \gamma + \sqrt{2\nu}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Q_d &= Q_{\chi_\nu^2}(\alpha_\nu/\eta) = Q \left(\sqrt{2\frac{\alpha_\nu}{\eta}} - \sqrt{2\nu} \right) = Q \left(\frac{\sqrt{2\alpha_\nu}}{\sqrt{\eta}} - \sqrt{2\nu} \right) = \\ &= Q \left(\frac{\gamma + \sqrt{2\nu}}{\sqrt{\eta}} - \sqrt{2\nu} \right) = Q \left[\frac{1}{\sqrt{\eta}}\gamma - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\eta}} \right) \sqrt{2\nu} \right]. \end{aligned} \quad (12.16)$$

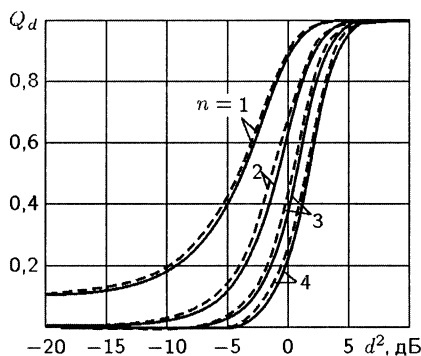


Рис. 12.5

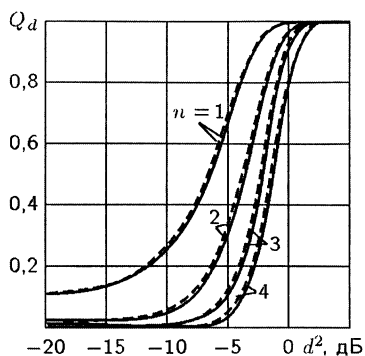


Рис. 12.6

На рис. 12.3 и 12.4 соответственно при $\nu = 25$ и $\nu = 70$ изображены точные зависимости (сплошные линии) по рис. 12.1 и 12.2 и асимптотические по первой приближенной формуле (штриховые линии).

Данные по второй приближенной формуле практически совпадают с точными результатами (см. рис. 12.1 и 12.2). Асимптотические зависимости с учетом третьей приближенной формулы изображены на рис. 12.5 и 12.6.

12.2. Обобщение: сигнал коррелированный гауссовский случайный процесс

Пусть по-прежнему помеха $w[n]$ ГБШ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 , сигнал $s[n]$ гауссовский СП с нулевым средним значением и КФ \mathbf{R}_s .

Наблюдаемая выборка \mathbf{X}_n имеет вид

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{S}_n + \mathbf{W}_n, \quad (12.17)$$

где $\mathbf{X}_n = \{x[1], x[2], \dots, x[n]\}$; $\mathbf{S}_n = \{s[1], s[2], \dots, s[n]\}$; $\mathbf{W}_n = \{w[1], w[2], \dots, w[n]\}$.

Таким образом,

$$\mathbf{X}_n \sim \begin{cases} N(0; \sigma^2 \mathbf{I}) & \text{при } H_0; \\ N(0; \mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I}) & \text{при } H_1. \end{cases}$$

Оптимальный обнаружитель должен составлять ОП

$$\Lambda(\mathbf{X}_n) = \frac{W_1(\mathbf{X}_n | H_1)}{W_0(\mathbf{X}_n | H_0)}.$$

Принимается гипотеза H_1 , если $\Lambda(\mathbf{X}_n) > \gamma$. При этом

$$W_1(\mathbf{X}_n | H_1) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \Delta^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{X}_n^T (\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}_n \right],$$

где $\Delta = \det(\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I})$;

$$W_0(\mathbf{X}_n | H_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n\right).$$

Взяв логарифм ОП и оставляя слагаемые, зависящие только от наблюдаемой выборки \mathbf{X}_n , получим, что принимается гипотеза H_1 , если

$$-\frac{1}{2} \mathbf{X}_n^T \left[(\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} - \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} \right] \mathbf{X}_n > \gamma'.$$

Таким образом, испытывается статистика

$$T(\mathbf{X}_n) = \sigma^2 \mathbf{X}_n^T \left[\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} - (\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \right] \mathbf{X}_n > 2\gamma' \sigma^2. \quad (12.18)$$

Согласно лемме матричного обращения справедливо обращение [61]

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{D} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1})^{-1} \mathbf{D} \mathbf{A}^{-1}. \quad (12.19)$$

Полагая $\mathbf{A} = \sigma^2 \mathbf{I}$, $\mathbf{B} = \mathbf{D} = \mathbf{I}$, $\mathbf{C} = \mathbf{R}_s$, получим

$$(\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} - \frac{1}{\sigma^4} \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} + \mathbf{R}_s^{-1} \right)^{-1}.$$

Следовательно, испытываемая статистика $T(\mathbf{X}_n)$ принимает вид

$$T(\mathbf{X}_n) = \mathbf{X}_n^T \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} + \mathbf{R}_s^{-1} \right)^{-1} \mathbf{X}_n.$$

Введем вектор

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} + \mathbf{R}_s^{-1} \right)^{-1} \mathbf{X}_n.$$

Преобразуя этот вектор, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} + \mathbf{R}_s^{-1} \right)^{-1} \mathbf{X}_n = \frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{R}_s^{-1} \right] \mathbf{X}_n = \\ &= \mathbf{R}_s (\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}_n. \end{aligned}$$

Таким образом, принимается гипотеза H_1 , если

$$T(\mathbf{X}_n) = \mathbf{X}_n^T \mathbf{a} > \gamma'', \quad (12.20)$$

где $T(\mathbf{X}_n) = \sum_{k=1}^n x[k]a[n]$.

Покажем, что вектор \mathbf{a} представляет собой оптимальную по критерию минимума среднего квадрата ошибки оценку сигнального век-

тора \hat{S}_n :

$$\mathbf{a} = \hat{S}_n = \mathbf{R}_s(\mathbf{R}_s + \sigma^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}_n.$$

При входном процессе на входе нерекурсивного фильтра Винера

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{s}[n] + \mathbf{w}[n]$$

известно уравнение Винера–Хопера [60, с. 365]

$$\mathbf{R}_x\mathbf{H} = \mathbf{r}_{sx},$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\text{опт}}$ импульсная характеристика оптимального фильтра, \mathbf{r}_{sx} — вектор взаимной КФ сигнала и выходной последовательности. Если сигнал и помеха не коррелированы, то $\mathbf{r}_{sx} = \mathbf{r}_s$, где \mathbf{r}_s — вектор, состоящий из отсчетов сигнальной КФ; в данном случае $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w = \mathbf{R}_s + \sigma^2\mathbf{I}$, где \mathbf{R}_s — корреляционная матрица сигнала. Тогда по (12.20) находим

$$(\mathbf{R}_s + \sigma^2\mathbf{I})\mathbf{H} = \mathbf{R}_s.$$

Отсюда

$$\mathbf{H} = (\mathbf{R}_s + \sigma^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{R}_s.$$

Скалярная оценка сигнала имеет вид [60, р. 365]

$$\hat{s}_n = \mathbf{H}^T\mathbf{X}_n = \mathbf{r}_s\mathbf{r}_s^T(\mathbf{R}_s + \sigma^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}_n, \quad (12.21)$$

так как матрица $\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_s + \sigma^2\mathbf{I}$ симметрическая.

Векторное обобщение формулы (12.21) имеет вид [24]

$$\hat{\mathbf{S}}_n = \mathbf{R}_s(\mathbf{R}_s + \sigma^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}_n. \quad (12.22)$$

Таким образом, принимается гипотеза H_1 , если

$$T(\mathbf{X}_n) = \mathbf{X}_n^T\hat{\mathbf{S}}_n > \gamma'', \quad (12.23)$$

где

$$T(\mathbf{X}_n) = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}[k]\hat{s}[n]. \quad (12.24)$$

Следовательно, структурная схема обнаружителя принимает вид, показанный на рис. 12.7 (ЦФВ — цифровой фильтр Винера).

Рассмотрим два примера.

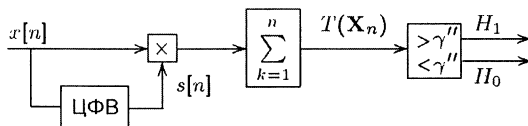


Рис. 12.7

Пример 12.1. Энергетический приемник.

В этом случае $\mathbf{R}_s = \sigma_s^2 \mathbf{I}$ и оценка сигнала $\hat{\mathbf{S}}_n$ принимает вид

$$\hat{\mathbf{S}}_n = \sigma^2 \mathbf{I} (\sigma_s^2 \mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} \mathbf{X}_n.$$

Следовательно,

$$\hat{s}_n[n] = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} x[n].$$

Таким образом, принимается гипотеза H_1 , если

$$T(\mathbf{X}_n) = \sum_{k=1}^n x[k] \hat{s}_n[n] = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} \sum_{k=1}^n x^2[k] > \gamma'', \quad (12.25)$$

или

$$T(\mathbf{X}_n) = \sum_{k=1}^n x^2[k] > \gamma'' \frac{\sigma_s^2 + \sigma^2}{\sigma_s^2}.$$

Этот же критерий получен ранее на основе ОП.

Пример 12.2. Сигнал имеет вид двумерного вектора $n = 2$. Сигнал коррелирован, его корреляционная матрица

$$\mathbf{R}_s = \sigma_s^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix},$$

где ρ — коэффициент корреляции между $s[1]$ и $s[2]$ (k принимает значения 1 и 2).

Испытываемая статистика

$$T(\mathbf{X}_n) = \mathbf{X}_n^T \mathbf{R}_s (\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}_n.$$

Выразим статистику через вектор

$$\mathbf{Y}_n = \mathbf{V}^T \mathbf{X}_n, \quad (12.26)$$

где \mathbf{V} — ортогональная матрица,

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Свойство матрицы \mathbf{V} : $\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^{-1}$.

Преобразуем статистику $T(\mathbf{X}_n)$:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{X}_n) &= \mathbf{X}_n^T \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{R}_s \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{X}_n = \\ &= (\mathbf{V}^T \mathbf{X}_n)^T (\mathbf{V}^T \mathbf{R}_s \mathbf{V}) [\mathbf{V}^{-1} (\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{V}]^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{X}_n = \\ &= (\mathbf{V}^T \mathbf{X}_n)^T (\mathbf{V}^T \mathbf{R}_s \mathbf{V}) (\mathbf{V}^T \mathbf{R}_s \mathbf{V} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{V}^T \mathbf{X}_n. \end{aligned}$$

Преобразованием

$$\mathbf{V}^T \mathbf{R}_s \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}_s$$

приведем матрицу \mathbf{R}_s к диагональному виду:

$$\mathbf{\Lambda}_s = \sigma_s^2 \begin{bmatrix} 1 + \rho & 0 \\ 0 & 1 - \rho \end{bmatrix}.$$

Тогда статистика $T(\mathbf{X}_n)$ приводится к квадратичной форме

$$T(\mathbf{X}_n) = \mathbf{Y}_n^T \mathbf{\Lambda}_s (\mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_n^T \mathbf{A} \mathbf{Y}_n, \quad (12.27)$$

где \mathbf{A} — диагональная матрица,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \frac{\sigma_s^2(1 + \rho)}{\sigma_s^2(1 + \rho) + \sigma^2}; \quad A_2 = \frac{\sigma_s^2(1 - \rho)}{\sigma_s^2(1 - \rho) + \sigma^2}.$$

Таким образом, статистика $T(\mathbf{X}_n)$ принимает вид

$$T(\mathbf{X}_n) = A_1 y^2[1] + A_2 y^2[2]. \quad (12.28)$$

Получили статистику, аналогичную статистике энергетического приемника, но не в виде чистой суммы квадратов, а в виде взвешенной суммы квадратов с весовыми коэффициентами A_1 и A_2 .

Если сигналом является ГБШ, когда $\rho = 0$, то, учитывая соотношение

$$\mathbf{Y}_n^T \mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}_n^T \mathbf{V} \mathbf{V}^T \mathbf{Y}_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{X}_n,$$

получим

$$T(\mathbf{X}_n) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} (y^2[1] + y^2[2]) = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_s^2 + \sigma^2} (x^2[1] + x^2[2]),$$

что совпадает с (12.25).

Следует заметить, что линейное преобразование (12.26) обеляет входной процесс. Это видно из следующего вывода:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_y &= E(\mathbf{Y}_n \mathbf{Y}_n^T) = E(\mathbf{V}^T \mathbf{X}_n \mathbf{X}_n^T \mathbf{V}) = \mathbf{V}^T \mathbf{R}_x \mathbf{V} = \mathbf{V}^T (\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{V} = \\ &= \mathbf{V}^T \mathbf{R}_s \mathbf{V} + \sigma^2 \mathbf{I} = \mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Таким образом, получим диагональную матрицу \mathbf{R}_y . Аналогично при гипотезе H_0 $\mathbf{R}_y = \sigma^2 \mathbf{I}$, и поэтому преобразованный вектор \mathbf{Y}_n состоит из некоррелированных координат, хотя и с разными дисперсиями, чем объясняется наличие разных весовых коэффициентов A_1 и A_2 в (12.28).

Рассмотренный двумерный вариант модифицированного энергетического приемника можно обобщить на n -мерный и таким образом получить его каноническую структурную схему.

Воспользуемся теоремой [62, теорема 7.7]: Для любой симметрической матрицы \mathbf{M} существует такая ортогональная матрица \mathbf{U} , что $\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$, где $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — диагональная матрица, диагональными элементами которой являются собственные значения

матрицы \mathbf{M} , повторяющиеся согласно их кратности. При этом ортогональная матрица \mathbf{U} состоит из собственных векторов матрицы \mathbf{M} . На этом основании для симметрической матрицы \mathbf{R}_s порядка $n \times n$ можно записать

$$\mathbf{V}^T \mathbf{R}_s \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}_s,$$

где $\mathbf{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, v_k , $k = \overline{1, n}$, — собственные векторы матрицы \mathbf{R}_s , $\mathbf{\Lambda}_s = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где λ_k , $k = \overline{1, n}$, — собственные значения матрицы \mathbf{R}_s .

В результате получим новую форму статистику

$$\begin{aligned} T(\mathbf{X}_n) &= \mathbf{X}_n^T \hat{\mathbf{S}}_n = \mathbf{X}_n^T \mathbf{R}_s (\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}_n = \mathbf{Y}_n^T \mathbf{\Lambda}_s (\mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{Y}_n = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \sigma^2} y^2[k], \end{aligned} \quad (12.29)$$

так как справедливо свойство для диагональной матрицы

$$\mathbf{\Lambda}_s^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1/\lambda_n \end{bmatrix}.$$

Заметим, что квадратичная форма

$$\alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

называется квадратической формой канонического вида, сами переменные x_k , $k = \overline{1, n}$, — каноническими переменными. Отсюда и обнаружитель со статистикой (12.29) называется каноническим. Каноническая форма обнаружителя гауссовского случайного сигнала при наличии помехи в виде ГБШ, изображен на рис. 12.8.

Рассмотрим обобщение задачи обнаружения случайного сигнала при условии, что помеха — не ГБШ, а гауссовский шум с нулевым средним значением и корреляционной матрицей \mathbf{R}_w .

Сигнал и помеха независимы. Тогда

$$\mathbf{X}_n \sim \begin{cases} N(0; \mathbf{R}_w) & \text{при } H_0; \\ N(0; \mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w) & \text{при } H_1. \end{cases}$$

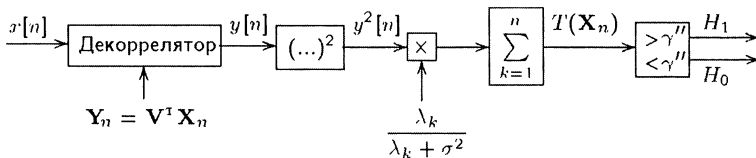


Рис. 12.8

В этом случае ОП принимает вид

$$\Lambda(\mathbf{X}_n) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\Delta_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{X}_n^T(\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w)^{-1}\mathbf{X}_n\right]}{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\Delta_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\mathbf{X}_n^T\mathbf{R}_w^{-1}\mathbf{X}_n\right]} > \gamma,$$

где $\Delta_1 = \sqrt{\det(\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w)}$; $\Delta_2 = \sqrt{\det \mathbf{R}_w}$.

Взяв логарифм и оставляя только те слагаемые, которые зависят от входных данных, получим статистику

$$T(\mathbf{X}_n) = \mathbf{X}_n^T[\mathbf{R}_w^{-1} - (\mathbf{R}_w + \mathbf{R}_s)^{-1}]\mathbf{X}_n > 2\gamma'. \quad (12.30)$$

Преобразуем обратную матрицу $(\mathbf{R}_w + \mathbf{R}_s)^{-1}$, используя лемму об обращении матриц (12.19) при $\mathbf{A} = \mathbf{R}_w$, $\mathbf{B} = \mathbf{D} = \mathbf{I}$, $\mathbf{C} = \mathbf{R}_s$. Тогда получим

$$(\mathbf{R}_w + \mathbf{R}_s)^{-1} = \mathbf{R}_w^{-1} - \mathbf{R}_w^{-1}(\mathbf{R}_w^{-1} + \mathbf{R}_s^{-1})\mathbf{R}_w^{-1}.$$

После вычитания в квадратных скобках в (12.30) остается величина

$$\mathbf{R}_w^{-1}(\mathbf{R}_w^{-1} + \mathbf{R}_s^{-1})^{-1}\mathbf{R}_w^{-1}. \quad (12.31)$$

Рассмотрим отдельно сумму

$$\mathbf{R}_w^{-1} + \mathbf{R}_s^{-1} = \mathbf{R}_w^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{R}_w\mathbf{R}_s^{-1}) = \mathbf{R}_w^{-1}(\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w)\mathbf{R}_s^{-1}.$$

После обращения этой суммы находим

$$[\mathbf{R}_w^{-1}(\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w)\mathbf{R}_s^{-1}]^{-1} = \mathbf{R}_s(\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w)^{-1}\mathbf{R}_w.$$

В результате выражение (12.31) принимает вид

$$\mathbf{R}_w^{-1}\mathbf{R}_s(\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w)^{-1}.$$

Поэтому статистика $T(\mathbf{X}_n)$ упрощается:

$$T(\mathbf{X}_n) = \mathbf{X}_n^T\mathbf{R}_w^{-1}\mathbf{R}_s(\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w)^{-1}.$$

Обозначим через $\hat{\mathbf{S}}_n$ оценку, оптимальную по критерию минимума среднего квадрата ошибки, которую формирует цифровой фильтр Винера:

$$\hat{\mathbf{S}}_n = \mathbf{R}_s(\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_w)^{-1}\mathbf{X}_n.$$

Тогда статистика $T(\mathbf{X}_n)$ принимает окончательный вид:

$$T(\mathbf{X}_n) = \mathbf{X}_n^T\mathbf{R}_w^{-1}\hat{\mathbf{S}}_n. \quad (12.32)$$

Эта статистика характеризует оптимальный обнаружитель случайного сигнала, когда помеха не зависит от сигнала и представляет собой гауссовский СП с КФ \mathbf{R}_w .

В частном случае при $\mathbf{R}_w = \sigma^2 \mathbf{I}$ получаем обнаружитель сигнала на фоне ГБШ, а при $\mathbf{R}_s = \sigma_s^2 \mathbf{I}$ — энергетический приемник.

Рассмотрим общий случай задания уравнения наблюдения

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{W},$$

где $\mathbf{X} = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T$, $\mathbf{H} — N \times p$ -матрица; $\boldsymbol{\lambda}$ — случайный $p \times 1$ -вектор; $\mathbf{W} — N \times 1$ -БШ, причем $\boldsymbol{\lambda} \sim N(0, \mathbf{R}_\lambda)$, $\mathbf{W} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$, СВ $\boldsymbol{\lambda}$ и w независимы.

Проблема обнаружения такова:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad \mathbf{X} &= \mathbf{W} \\ H_1 : \quad \mathbf{X} &= \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Обозначим сигнальный вектор $\mathbf{S} = \mathbf{H}\boldsymbol{\lambda}$, причем $\mathbf{S} \sim N(0, \mathbf{R}_s)$, где \mathbf{R}_s — корреляционная матрица сигнального вектора,

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{H}\mathbf{R}_\lambda\mathbf{H}^T. \quad (12.34)$$

Оценитель-коррелятор принимает гипотезу H_1 , если статистика

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{R}_s (\mathbf{R}_s + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X} > \gamma'', \quad (12.35)$$

или после подстановки (12.34)

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{R}_\lambda \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{R}_\lambda \mathbf{H}^T + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X} > \gamma''.$$

Статистику $T(\mathbf{X})$ можно записать в виде

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{S}} = \mathbf{X}^T \mathbf{H} \hat{\boldsymbol{\lambda}},$$

где $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ — оптимальная оценка случайного вектора по критерию минимума среднего квадрата ошибки.

В качестве примера рассмотрим гармонический сигнал, когда уравнение наблюдения имеет вид

$$x[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \Phi) + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (12.36)$$

где $f_0 < 1/2$; $w[n]$ — ГБШ с нулевым средним значением и дисперсией σ^2 .

Запишем сигнал в форме двух слагаемых

$$s[n] = a \cos(2\pi f_0 n) + b \sin(2\pi f_0 n), \quad (12.37)$$

где $a = A \cos \Phi$; $b = A \sin \Phi$.

Для того чтобы $s[n]$ был стационарным случайным процессом, необходимо выполнение условий [60]

$$E(a) = E(b) = 0; \quad E(a^2) = E(b^2) = \sigma_s^2, \quad (12.38)$$

причем первое условие вытекает из равенства

$$E(s[n]) = E(a) \cos(2\pi f_0 n) + E(b) \sin(2\pi f_0 n) = 0.$$

В результате получим [60]

$$r_s[k] = E[s[n]s[n+k]] = \sigma_s^2 \cos(2\pi f_0 k); \quad \lambda = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \sim N(0, \sigma_s^2 \mathbf{I}). \quad (12.39)$$

Отсюда следует [60], что амплитуда A имеет распределения Релея, а фаза Φ распределена равномерно:

$$W(A) = \begin{cases} \frac{A}{\sigma_s^2} \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma_s^2}\right) & \text{при } A > 0; \\ 0 & \text{при } A < 0. \end{cases}$$

$$W(\Phi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } \Phi \in (0, 2\pi); \\ 0 & \text{при } \Phi \notin (0, 2\pi). \end{cases}$$

Матрица наблюдения \mathbf{H} имеет вид

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos 2\pi f_0 & \sin 2\pi f_0 \\ \dots & \dots \\ \cos 2\pi f_0(N-1) & \sin 2\pi f_0(N-1) \end{bmatrix}. \quad (12.40)$$

Статистика $T(\mathbf{X})$ с учетом свойства $\lambda \sim N(0, \sigma_s^2 \mathbf{I})$ преобразуется к виду

$$T(\mathbf{X}) = \sigma_s^2 \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^T (\sigma_s^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}. \quad (12.41)$$

Воспользуемся леммой об обращении матриц [61]

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{C}^{-1})^{-1} \mathbf{DA}^{-1}$$

при $\mathbf{A} = \sigma^2 \mathbf{I}$; $\mathbf{B} = \sigma_s^2 \mathbf{H}$; $\mathbf{C} = \mathbf{I}$; $\mathbf{D} = \mathbf{H}^T$. В результате получим

$$T(\mathbf{X}) = \sigma_s^2 \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^T \left[\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} - \frac{1}{\sigma^4} \sigma_s^2 \mathbf{H} \left(\frac{\sigma_s^2 \mathbf{H}^T \mathbf{H}}{\sigma^2} + \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \right] \mathbf{X}.$$

Учтем матричное произведение

$$\mathbf{H} \mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix},$$

где

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f_0 n); \quad B = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f_0 n) \sin(2\pi f_0 n);$$

$$C = \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(2\pi f_0 n).$$

Если N достаточно велико и $0 < f_0 < 1/2$, то можно воспользоваться приближенными соотношениями

$$A = \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi f_0 n) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 n) \right] \approx \frac{N}{2};$$

$$B = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f_0 n) \sin(2\pi f_0 n) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(4\pi f_0 n) \approx 0;$$

$$C = \sum_{n=0}^{N-1} \sin^2(2\pi f_0 n) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(4\pi f_0 n) \right] \approx \frac{N}{2}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \frac{N}{2}\mathbf{I}.$$

Поэтому статистика $T(\mathbf{X})$ может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} T(\mathbf{X}) &= \sigma_s^2 \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^T \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} - \frac{\sigma_s^2}{\sigma^4} \mathbf{H} \left(\frac{\sigma_s^2 N/2}{\sigma^2} + 1 \right)^{-1} \mathbf{H}^T \right) \mathbf{X} = \\ &= d^2 \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X} - \frac{d^4 N/2}{d^2 N/2 + 1} \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X} = \frac{c}{N} \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X}, \end{aligned}$$

где $c = Nd^2/(d^2 N/2 + 1)$; $d^2 = \sigma_s^2/\sigma^2$.

Если отнести положительную постоянную c в величину порога, то получим статистику

$$T'(\mathbf{X}) = \frac{1}{N} \mathbf{X}^T \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{X} = \frac{1}{N} \|\mathbf{H}^T \mathbf{X}\|^2,$$

и принимается гипотеза H_1 , если

$$T'(\mathbf{X}) > \gamma''/c = \gamma'''. \quad (12.42)$$

Раскроем статистику $T'(\mathbf{X})$ за счет перемножения $\mathbf{H}^T \mathbf{X}$ с учетом вида матрицы \mathbf{H} (12.40):

$$T'(\mathbf{X}) = \frac{1}{N} \left\| \begin{array}{c} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n) \\ \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n) \end{array} \right\|^2.$$

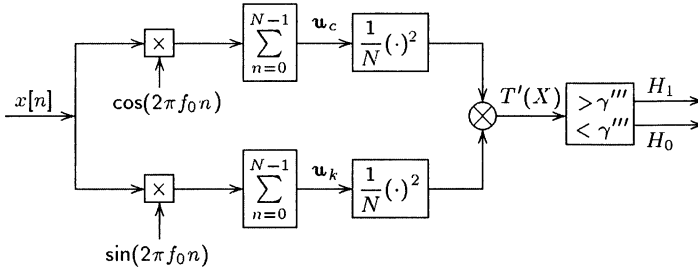


Рис. 12.9

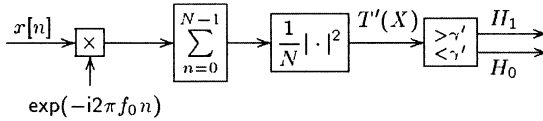


Рис. 12.10

Отсюда получим

$$T'(X) = \frac{1}{N} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos(2\pi f_0 n) \right]^2 + \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin(2\pi f_0 n) \right]^2 \right\}. \quad (12.43)$$

Имеем

$$T'(\mathbf{X}) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i2\pi f_0 n} \right|^2. \quad (12.44)$$

Структурные схемы обнаружителей изображены на рис. 12.9 и 12.10. На рис. 12.9 — по алгоритму (12.42) с учетом (12.43), где u_c и u_k — соответственно синфазная и квадратурная составляющие. На рис. 12.10 — по алгоритму (12.42) с учетом (12.44), причем последний обнаружитель называется периодограммным.

Найдем характеристики обнаружения.

Воспользуемся общими формулами для ВЛТ Q_0 и вероятности обнаружения Q_d [24]

$$Q_0 = \int_{\gamma'''}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1-2i\alpha_n \omega}} e^{-i\omega t} d\omega \right) dt; \quad (12.45)$$

$$Q_d = \int_{\gamma''}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1-2i\lambda_n \omega}} e^{-i\omega t} d\omega \right) dt. \quad (12.46)$$

где λ_n — собственные значения симметрической корреляционной мат-

рицы \mathbf{R}_s сигнального вектора; $\alpha_n = \lambda_n \sigma^2 / (\lambda_n + \sigma^2)$;

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T, \quad (12.47)$$

где \mathbf{v}_i , $i = \overline{1, n}$, — собственные вектора матрицы \mathbf{R}_s .

При $\mathbf{R}_\lambda = \sigma_s^2 \mathbf{I}$ запишем матрицу сигнального вектора

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{H} \mathbf{R}_\lambda \mathbf{H}^T = \sigma_s^2 \mathbf{H} \mathbf{H}^T. \quad (12.48)$$

Двухстолбцовую матрицу \mathbf{H} (12.40) запишем в виде $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_0 \ \mathbf{h}_1]$, тогда

$$\mathbf{R}_s = \sigma_s^2 [\mathbf{h}_0 \ \mathbf{h}_1] \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0^T \\ \mathbf{h}_1^T \end{bmatrix} = \frac{N\sigma_s^2}{2} \frac{\mathbf{h}_0}{\sqrt{N/2}} \frac{\mathbf{h}_0^T}{\sqrt{N/2}} + \frac{N\sigma_s^2}{2} \frac{\mathbf{h}_1}{\sqrt{N/2}} \frac{\mathbf{h}_1^T}{\sqrt{N/2}},$$

причем

$$\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_1 = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(2\pi f_0 n) \sin(2\pi f_0 n) \approx 0$$

при значительных величинах N .

По аналогии с (12.47) запишем

$$\mathbf{R}_s = \lambda_0 \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0^T + \lambda_1 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T,$$

где $\lambda_0 = \lambda_1 = N\sigma_s^2/2$; $\lambda_0 = \lambda_1 = N\sigma_s^2/2$; $\mathbf{v}_1 = \mathbf{h}_1/\sqrt{N/2}$.

Таким образом, можно приближенно рассматривать \mathbf{v}_0 и \mathbf{v}_1 в качестве собственных векторов матрицы \mathbf{R}_s , которым соответствуют собственные значения λ_0 и λ_1 , остальные $N-2$ собственных значений равны нулю, так как матрица \mathbf{R}_s имеет ранг равный двум. Полагая $\lambda_0 = \lambda_1 = N\sigma_s^2/2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{N-1} = 0$ по (12.45) получим

$$Q_0 = \int_{\gamma''}^{\infty} a(t) dt, \quad (12.49)$$

где

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 2i\alpha_0\omega} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\alpha_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x + iu} e^{iut} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\alpha_0} e^{-t/2\alpha_0} 1(t). \end{aligned}$$

Здесь $x = 1/2\alpha_0$; $\alpha_0 = \lambda_0 \sigma^2 / (\lambda_0 + \sigma^2) = \frac{N\sigma_s^2 \sigma^2 / 2}{N\sigma_s^2 / 2 + \sigma^2} = c\sigma^2/2$.

После интегрирования получим

$$Q_0 = P\{T'(\mathbf{X}) < \gamma''' \mid H_0\} = P\{T(\mathbf{X}) < \gamma'' \mid H_0\} = e^{-\gamma''/2\alpha_0},$$

или

$$Q_0 = e^{-\gamma'''/\sigma^2}, \quad \gamma''' = \gamma''/c. \quad (12.50)$$

Аналогично по (12.46) вычисляем вероятность обнаружения

$$Q_d = e^{-\gamma''/2\lambda_0} = e^{-\gamma''/N\sigma_s^2},$$

и, следовательно,

$$Q_d = \exp\left(-\frac{\gamma'''}{N\sigma_s^2/2 + \sigma^2}\right). \quad (12.51)$$

По (12.50) находим значения порога γ'''

$$\gamma''' = \sigma^2 \ln Q_0^{-1}. \quad (12.52)$$

Учтем, что для распределения Релея среднее значение квадрата амплитуды $E(A^2) = 2\sigma_s^2$, и введем параметр $\bar{\eta} = N\sigma_s^2/\sigma^2 = NE(A^2/2)/\sigma^2 = \bar{\varepsilon}/\sigma^2$, где $\bar{\varepsilon} = NE(A^2/2)$ — среднее значение энергии сигнала. Используя (12.52) и значение $\bar{\eta}$, по (12.51) получим

$$Q_d = \exp\left(-\frac{\gamma'''/\sigma^2}{\bar{\eta}/2 + 1}\right) = \exp\left(\frac{1}{\bar{\eta}/2 + 1} \ln Q_0\right) = Q_0^{1/(\bar{\eta}/2 + 1)}. \quad (12.53)$$

Характеристики обнаружения для гармонического колебания с релейским замиранием изображены на рис. 12.11 при $Q_0 = 10^{-n}$, $n = \overline{1, 5}$, причем по оси абсцисс отложены значения $d_{\text{дБ}}^2 = 10 \lg \bar{\eta} = 10 \lg(\bar{\varepsilon}/\sigma^2)$ от 0 до 30 дБ.

В качестве другого важного примера рассмотрим получение характеристик обнаружения сигнала, прошедшего многолучевой канал связи с релейским замиранием. Сам сигнал представляет собой сигнал с модуляцией частотным сдвигом (МЧС, англ. FSK — Frequency Shift Keying).

Рассмотрим обнаружение сигнала $s_0[n] = \cos(2\pi f_0 n)$ при $s_1[n] = \cos(2\pi f_1 n)$ после его прохождения через релейский канал. Допущения следующие:

$0 < f_0 < 1/2$; $0 < f_1 < 1/2$, N — велико.

На выходе канала связи необходимо различать гипотезы

$$\begin{aligned} H_0: & \quad x[n] = A_0 \cos(2\pi f_0 n + \Phi_0) + w[n]; \\ H_1: & \quad x[n] = A_1 \cos(2\pi f_1 n + \Phi_1) + w[n], \end{aligned} \quad n = \overline{0, N-1},$$

где $w[n]$ — ГБШ с дисперсией σ^2 , причем распределение вектора $[A_0 \ \Phi_0]^T$ такое же, как и вектора $[A_1 \ \Phi_1]^T$.

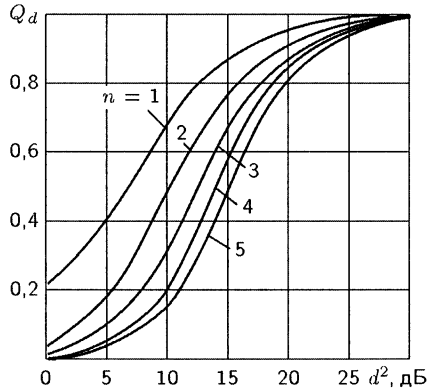


Рис. 12.11

Найдем оптимальный приемник, минимизирующий вероятность ошибки $P_{\text{ош}}$. Для равных априорных вероятностей передачи для сигналов принимается гипотеза H_1 , если

$$\frac{W_1(x | H_1)}{W_0(x | H_0)} > 1,$$

или

$$\frac{B_1 \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T (\mathbf{R}_{s_1} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X} \right]}{B_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T (\mathbf{R}_{s_0} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X} \right]} > 1, \quad (12.54)$$

где $B_i = (2\pi)^{N/2} \sqrt{\det(\mathbf{R}_{s_i} + \sigma^2 \mathbf{I})}$, $i = 0, 1$. Здесь $\mathbf{R}_{s_i} = \mathbf{H}_i \mathbf{R}_\lambda \mathbf{H}_i^T = \sigma_s^2 \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^T$, тогда

$$\det(\mathbf{R}_{s_i} + \sigma^2 \mathbf{I}) = \det(\sigma_s^2 \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^T + \sigma^2 \mathbf{I}) = \det \left(\sigma_s^2 \frac{N}{2} \mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{I} \right),$$

если учесть, что N достаточно велико.

Таким образом, принимается гипотеза H_1 , если

$$\frac{\exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T (\mathbf{R}_{s_1} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X} \right]}{\exp \left[-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T (\mathbf{R}_{s_0} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X} \right]} > 1.$$

Используя лемму об обращении матриц [61] (см. (12.19)), получим

$$\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^T \mathbf{X} - \frac{1}{\sigma^4} \mathbf{X}^T \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} + \mathbf{R}_{s_1}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{X} < \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{X}^T \mathbf{X} - \frac{1}{\sigma^4} \mathbf{X}^T \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} + \mathbf{R}_{s_0}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{X}.$$

Отсюда переходим к неравенству

$$\mathbf{X}^T \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} + \mathbf{R}_{s_1}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{X} > \mathbf{X}^T \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} + \mathbf{R}_{s_0}^{-1} \right)^{-1} \mathbf{X}.$$

Преобразуем обратную матрицу суммы матриц:

$$\left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I} + \mathbf{R}_{s_i}^{-1} \right)^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{I} + \sigma^2 \mathbf{R}_{s_i}^{-1})^{-1} = \sigma^2 \mathbf{R}_{s_i} (\mathbf{R}_{s_i} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1}$$

и учтем, что оценка сигнала

$$\hat{\mathbf{S}}_i = \mathbf{R}_{s_i} (\mathbf{R}_{s_i} + \sigma^2 \mathbf{I}) \mathbf{X}.$$

Поэтому принимается гипотеза H_1 , если выполняется неравенство

$$\mathbf{X}^T \hat{\mathbf{S}}_1 > \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{S}}_0. \quad (12.55)$$

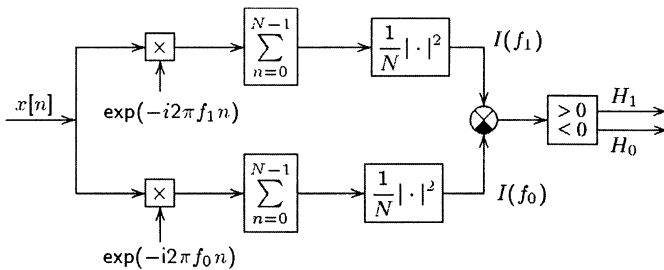


Рис. 12.12

С другой стороны, как было показано, статистика

$$T(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \hat{\mathbf{S}}_0 = cI(f_0),$$

где $I(f_0)$ — периодограмма, определяемая по (12.44). Аналогичная статистика справедлива и для сигнала s_1 . Поэтому принимается гипотеза H_1 , если

$$I(f_1) > I(f_0). \quad (12.56)$$

Структурная схема оптимального приемника изображена на рис. 12.12.

Для того чтобы определить вероятность ошибки

$$P_{\text{ош}} = \pi_1 P(H_1 | H_0) + \pi_0 P(H_0 | H_1),$$

где π_0 и π_1 — априорные вероятности; $\pi_0 + \pi_1 = 1$, предположим, что сигналы существенно не перекрываются, а это значит, что частоты f_0 и f_1 сильно разнесены и выполняется неравенство $|f_1 - f_0| \gg 1/N$. При равных априорных вероятностях $\pi_0 = \pi_1 = 1/2$ получим

$$P_{\text{ош}} = \frac{1}{2} [P(H_1 | H_0) + P(H_0 | H_1)].$$

В силу симметрии $P(H_0 | H_1) = P(H_1 | H_0)$, поэтому

$$\begin{aligned} P_{\text{ош}} &= P(H_0 | H_1) = P\{I(f_0) > I(f_1) | H_1\} = \\ &= \int_0^\infty P\{I(f_1) < t | I(f_0) = t, H_1\} W_{I(f_0)}(t | H_1) dt, \end{aligned}$$

где $W_{I(f_0)}(t | H_1)$ — условная ПРВ периодограммы $I(f_0)$ при условии, что справедлива гипотеза H_1 .

Но статистики $I(f_0)$ и $I(f_1)$ приблизительно независимы при сильном разноразночии частот. Тогда

$$P_{\text{ош}} = \int_0^\infty P\{I(f_1) < t | H_1\} W_{I(f_0)}(t | H_1) dt. \quad (12.57)$$

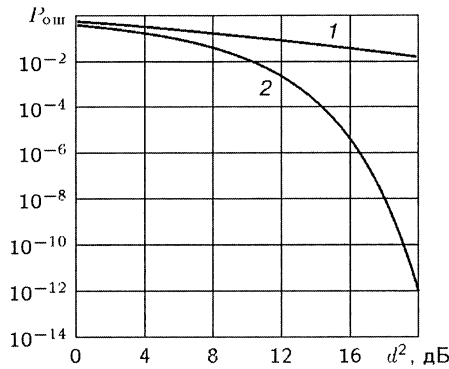


Рис. 12.13

Здесь

$$P\{I(f_1) < t \mid H_1\} = P_1 = 1 - Q_d,$$

где P_1 — вероятность пропуска, причем

$$Q_d = \exp\left(-\frac{t}{N\sigma_s^2/2 + \sigma^2}\right).$$

Так как периодограмма при условии справедливости гипотезы отвечает условию наличия чистого шума (поскольку сигнал $A_1 \cos(2\pi f_1 n + \Phi_1)$ не влияет на периодограмму) при $f = f_0$, то

$$\begin{aligned} W_{I(f_0)}(t \mid H_1) &= \frac{d}{dt} P\{I(f_1) < t \mid \text{чистый шум}\} = \\ &= \frac{d}{dt} (1 - Q_0) = \frac{d}{dt} [1 - e^{-t/\sigma^2}] = \frac{1}{\sigma^2} e^{-t/\sigma^2}. \end{aligned}$$

Причем здесь использовалось значение Q_0 по (12.50).

Окончательно получим

$$P_{\text{ош}} = \int_0^\infty \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{N\sigma_s^2/2 + \sigma^2}\right)\right] \frac{1}{\sigma^2} e^{-t/\sigma^2} dt = \frac{1}{2 + \bar{\eta}/2}, \quad (12.58)$$

где $\bar{\eta} = \bar{\varepsilon}/\sigma^2 = NE(A_i^2/2)/\sigma^2 = N\sigma_s^2/\sigma^2$.

На рис. 12.13 сплошной линией (кривая 1) изображена зависимость вероятности ошибки $P_{\text{ош}}$ от ОСШ $d_{\text{дБ}}^2 = 10 \lg \bar{\eta}$ в диапазоне значений ОСШ от 0 до 20 дБ при многолучевом сигнале. Здесь же изображена зависимость (кривая 2)

$$P_{\text{ош}} = Q(\sqrt{d^2/2}) \quad (12.59)$$

при когерентном приеме сигнала МЧС (при полностью известных сигналах).

13 Совместное обнаружение и фильтрация марковских сигналов

13.1. Рекуррентная связь отношения правдоподобия и апостериорной плотности сигнала*

Предположим, что в моменты времени $t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_n$ наблюдается последовательность СВ $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_i), \dots, y(t_n)$,

$$y(t_i) = y_i = \lambda s(x_i, t_i) + \xi_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13.1)$$

где λ — параметр со значениями $\lambda = 0$ (при гипотезе H_0 сигнал отсутствует) и $\lambda = 1$ (при гипотезе H_1 — при наличии сигнала). При рассмотрении задачи в байесовской постановке λ — СВ с соответствующим распределением вероятностей; $s(x_i, t_i)$ — полезный сигнал; s — известная функция; x_i — СВ, образующая простой марковский процесс (МСП) $\{x_i\}$ с дискретным временем. Переходная плотность вероятностей МСП обозначается через $\pi_{i+1}(x_{i+1}, t_{i+1} | x_i, t_i)$, а начальная ПРВ $\pi_1(x_1, t_1)$; СВ ξ_i — помеха (шум) с независимыми отсчетами $\{\xi_i\}_{i=\overline{1, n}}$ со своей ПРВ $\rho_{i\xi}(z, t_i)$, $i = \overline{1, n}$.

Предполагаются известными ПРВ сигнала и шума. Поэтому оптимальная процедура обнаружения сигнала при фиксированном времени наблюдения сводится к формированию ОП и сравнению его с порогом.

Можно показать [51], что ОП выражается в виде рекуррентного алгоритма

$$\Lambda_{k+1} = \frac{\Lambda_k}{\rho(y_{k+1})} \int \int \rho[y_{k+1} - s(x_{k+1})] \pi(x_{k+1} | x_k) w_k(x_k) dx_k dx_{k+1}, \\ k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (13.2)$$

Здесь $w_k(x_k)$ — апостериорная ПРВ (АПРВ), для которой справедливо рекуррентное соотношение [51]

$$w_{k+1}(x_{k+1}) = \frac{\int \rho[y_{k+1} - s(x_{k+1})] \pi(x_{k+1} | x_k) w(x_k) dx_k}{\int \int \rho[y_{k+1} - s(x_{k+1})] \pi(x_{k+1} | x_k) w(x_k) dx_k dx_{k+1}} \quad (13.3)$$

* В данной главе с разрешения Юрия Георгиевича Сосулина в основном использованы материалы его книги [51].

при начальном условии

$$w_1(x_1) = \frac{\rho[y_1 - s(x_1)]\pi(x_1)}{\int \rho[y_1 - s(x_1)]\pi(x_1) dx_1}. \quad (13.4)$$

При использовании (13.2) начальными условиями являются (13.4) и

$$\Lambda_1 = \frac{1}{\rho(y_1)} \int \rho[y_1 - s(x_1)]\pi(x_1) dx_1. \quad (13.5)$$

Рекуррентные алгоритмы (13.2) и (13.3) позволяют вычислять ОП последовательно, вычисляя $w_1, \Lambda_1; w_2, \Lambda_2 \dots w_n, \Lambda_n$.

Структура совместного обнаружения и фильтрации. Обратим внимание на следующее. Если рекуррентный алгоритм (13.3) можно применять (для задачи фильтрации) независимо от (13.2), то алгоритмы (13.2) невозможно использовать независимо от (13.2). Только совместное решение рекуррентных уравнений (13.2), (13.3) позволяет найти ОП и тем самым решить задачу синтеза оптимального обнаружителя. При этом система, моделирующая данные алгоритмы, наряду с обнаружением будет осуществлять оптимальную (линейную или нелинейную) фильтрацию сигналов и (или) их параметров. Причем фильтрация (оценивание) будет происходить как до, так и после установления факта обнаружения сигналов. В соответствии с указанными обстоятельствами соотношения (13.2), (13.3) называем рекуррентными алгоритмами совместного обнаружения и фильтрации.

На рис. 13.1 представлена структурная схема синтезированной системы совместного обнаружения и фильтрации сигналов. Структура блока оптимальной фильтрации (ОФ) определяется алгоритмами (13.3), а структура блока формирования отношения правдоподобия (ОП) — алгоритмами (13.2). Согласно рекуррентному характеру этих алгоритмов блоки охвачены обратной связью с задержкой на период $\Delta t = (t_{k+1} - t_k)$ поступления наблюдаемых данных. Блок включения В в конечный момент времени t_n пропускает значение Λ_n на пороговое устройство ПУ, где в результате сравнения Λ_n с порогом h выносятся одно из двух решений: d_1 (есть сигнал) или d_0 (нет сигнала). Величина h определяется выбранным критерием оптимальности.

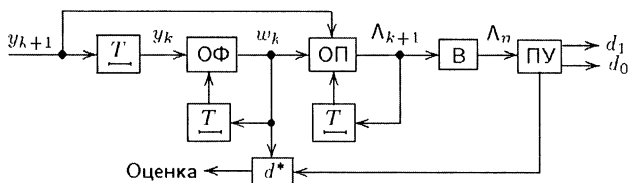


Рис. 13.1

На выходе блока d^* формируются оптимальные оценки сигнала и его параметра. Если блок ОФ смоделирован согласно (13.3), то блок d^* должен включать операции усреднения.

В зависимости от конкретных задач на функционирование блока d^* можно налагать различные требования. Например, он может сразу же после наблюдения формировать на выходе оценки d_1^*, d_2^*, \dots , которые затем отвергаются, если выносится решение d_0 . Во многих практических задачах целесообразна работа блока d^* в ключевом режиме, когда до вынесения решения об обнаружении на выходе d^* оценок нет. Но после принятия решения d_1 с выхода блока d^* сразу же поступают оценки d_n^*, d_{n+1}^*, \dots . При этом, если в блок d^* включить схему памяти, то могут быть использованы предыдущие оценки d_1^*, \dots, d_{n-1}^* .

Не исключен случай, когда в блоке ПУ выносится решение $\theta = 1$, хотя на самом деле имеет место ситуация $\theta = 0$. В этом случае на выходе блока d^* формируются псевдооценки. Возможна также и обратная ситуация: принимается решение d_0 , хотя $\theta = 1$, при этом оценки d_1^*, d_2^*, \dots будут отвергнуты как псевдооценки.

Рассмотрим другую, отличную от (13.1) модель наблюдаемого процесса [132]. Пусть гипотеза H_0 состоит в том, что наблюдаемая выборка $x_1^n = (x_1, \dots, x_n)$ представляет только помеху, которая является марковским случайным процессом $\eta(t)$ с дискретным временем с одномерной плотностью $\omega_{1\eta}(y, t)$ и плотностью вероятностей перехода $\omega_{2\eta}(y_k, t_k | y_{k-1}, t_{k-1})$. Альтернатива H_1 состоит в том, что наблюдаемая выборка представляет аддитивную смесь $x_1^n = s_1^n + y_1^n$ марковской помехи $\eta(t)$ и сигнала, который также является марковским случайным процессом $\xi(t)$ с одномерной плотностью $\omega_{1\xi}(s; t)$ и плотностью вероятностей перехода $\omega_{1\xi}(s_{k1}, t_k | s_{k-1}, t_{k-1})$. При указанных предположениях можно установить рекуррентную связь отношения правдоподобия $\Lambda_k(x_1^k)$ для текущего размера выборки k с отношением правдоподобия $\Lambda_{k-1}(x_1^{k-1})$ и апостериорной плотностью сигнала $W(s_{k-1} | x_1^{k-1}, t_1^{k-1})$ для выборки размера $k-1$.

Искомая рекуррентная связь Λ_k с Λ_{k-1} имеет вид [132]

$$\Lambda_k(\mathbf{x}_1^k) = \frac{\Lambda_{k-1}(\mathbf{x}_1^{k-1})}{\omega_{2\eta}(x_k; t_k | x_{k-1}; t_{k-1})} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(s_{k-1} | \mathbf{x}_1^{k-1}, t_1^{k-1}) \times \\ \times \omega_{2\xi}(s_k, t_k | s_{k-1}, t_{k-1}) \omega_{2\eta}(x_k - s_k; t_k | x_{k-1} - s_{k-1}; t_{k-1}) ds_{k-1} ds_k. \quad (13.6)$$

причем апостериорная плотность сигнала $W(s_{k-1} | \mathbf{x}_1^{k-1}, t_1^{k-1})$ определяется по рекуррентной формуле [51, 132]

$$W(s_n | \mathbf{x}_1^n, t_1^n) = \int_{-\infty}^{\infty} W(s_{n-1} | \mathbf{x}_1^{n-1}, t_1^{n-1}) \omega_{2\xi}(s_n; t_n | s_{n-1}; t_{n-1}) \times$$

чению в конце интервала наблюдения, но также к интерполированному или экстраполированным значениям. При принятии решения d_1 оценка $\hat{\xi}(t_m)$ не учитывает того, что вероятность правильного обнаружения меньше единицы. В отличие от байесовского подхода при таком оценивании предполагается, что присутствие сигнала достоверно.

В частном случае, когда аддитивная помеха представляет случайный процесс с независимыми значениями, из (13.6) получим [132]

$$\Lambda_k(x_1^k) = \frac{\Lambda_{k-1}(x_1^{k-1})}{\omega_{1\eta}(x_k; t_k)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(s_{k-1} | x_1^{k-1}, t_1^{k-1}) \times \\ \times \omega_{2\xi}(s_k, t_k | s_{k-1}, t_{k-1}) \omega_{1\eta}(x_k - s_k; t_k) ds_{k-1} ds_k. \quad (13.9)$$

где апостериорная плотность сигнала $W(s_{k-1} | x_1^{k-1}; t_1^{k-1})$ определяется по рекуррентной формуле [132, 140].

Если помеха представляет процесс с независимыми значениями (например, белый шум), то $\omega_{2\eta}(y_k; t_k | y_{k-1}; t_{k-1}) = \omega_{1\eta}(y_k)$ и формула (13.7) упрощается:

$$W(s_{n-1} | \mathbf{x}_1^n; t_1^n) = \omega_{1\eta}(x_n - s_n; t_n) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} W(s_{n-1} | \mathbf{x}_1^{n-1}; t_1^{n-1}) \omega_{2\xi}(s_n; t_n | s_{n-1}; t_{n-1}) ds_{n-1} \times \\ \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(s_{n-1} | \mathbf{x}_1^{n-1}; t_1^{n-1}) \times \right. \\ \left. \times \omega_{2\xi}(s_n; t_n | s_{n-1}; t_{n-1}) \omega_{1\eta}(x_n - s_n; t_n) ds_{n-1} ds_n \right]^{-1}.$$

В другом частном случае, когда обнаруживается детерминированный сигнал $s(t)$ на фоне аддитивной марковской помехи,

$$\omega_{2\xi}(s_k; t_k | s_{k-1}; t_{k-1}) = \delta[s_k - s(t_k)]; \\ W(s_{k-1} | x_1^{k-1}; t_1^{k-1}) = \delta[s_{k-1} - s(t_{k-1})],$$

плотность вероятности перехода сигнала и апостериорная плотность при гипотезе H_1 равны, и из (13.6) получим [132]

$$\Lambda_k(x_1^k) = \frac{\Lambda_{k-1}(x_1^{k-1})}{\omega_{2\eta}(x_k; t_k | x_{k-1}; t_{k-1})} \int_{-\infty}^{\infty} \delta[s_k - s(t_{k-1})] \times \\ \times \omega_{2\eta}[x_k - s(t_k); t_k | x_{k-1} - s_{k-1}; t_{k-1}] ds_{k-1} = \\ = \Lambda_{k-1}(x_1^{k-1}) \frac{\omega_{2\eta}[x_k - s(t_k); t_k | x_{k-1} - s(t_{k-1}); t_{k-1}]}{\omega_{2\eta}(x_k; t_k | x_{k-1}; t_{k-1})}. \quad (13.10)$$

13.2. Обнаружение и фильтрация марковского нормального сигнала на фоне аддитивной помехи с независимыми значениями

Для марковского нормального стационарного сигнала с априорной дисперсией σ_s^2 и коэффициентом корреляции R и стационарной помехи с независимыми значениями, дисперсия которой σ^2 , а среднее равно нулю, имеем [132]

$$\omega_{1\eta}(x_k - s_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (x_k - s_k)^2 \right]; \quad (13.11)$$

$$\omega_{1\eta}(x_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} x_k^2 \right]; \quad (13.12)$$

$$\omega_{2\xi}(s_k | s_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2(1-R^2)}} \exp \left[-\frac{(s_k - Rs_{k-1})^2}{2\sigma_s^2(1-R^2)} \right]; \quad (13.13)$$

$$W(s_{k-1} | x_1^{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{k-1}^2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_{k-1}^2} (s_{k-1} - \hat{\xi}_{k-1})^2 \right], \quad (13.14)$$

где $R = \exp[-\alpha|t_k - t_{k-1}|]$; $\hat{\xi}_{k-1}$ и σ_{k-1}^2 определяются рекуррентными формулами [132]

$$\hat{\xi}_{k-1} = x_k \frac{\sigma_k^2}{\sigma^2} + \frac{\hat{\xi}_k R \sigma_k^2}{\sigma_s^2(1-R^2) + \sigma_{k-1}^2 R^2}; \quad \hat{\xi}_1 = \frac{x_1}{1 + \mu^2}; \quad (13.15)$$

$$\sigma_k^2 = \left[\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_s^2(1-R^2) + \sigma_{k-1}^2 R^2} \right]^{-1}; \quad \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1 + \mu^2}; \quad \mu^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma_s^2}. \quad (13.16)$$

Если воспользоваться (13.9), то для рассматриваемого случая можно найти отношение $\Lambda_k(x_1^k)/\Lambda_{k-1}(x_1^{k-1})$. После подстановки (13.13) и (13.14) в (13.9) и последующего интегрирования по переменной s_{k-1} находится искомое отношение [132]

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_k(x_1^k)}{\Lambda_{k-1}(x_1^{k-1})} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(R\hat{\xi}_{k-1} - s_k)^2}{2[\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2]} \right] \frac{\omega_{1\eta}(x_k - s_k)}{\omega_{1\eta}(x_k)} ds_k = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(R\hat{\xi}_{k-1} - s_k)^2}{2[\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2]} - \frac{s_k^2 - 2x_k s_k}{2\sigma^2} \right] ds_k. \end{aligned}$$

После интегрирования по переменной s_k следует [132]

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_k(x_1^k)}{\Lambda_{k-1}(x_1^{k-1})} &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2 + \sigma^2}} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{R^2\hat{\xi}_{k-1}^2}{2[\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2]} \right] \exp \left[\frac{1}{2\sigma^2} \frac{\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2}{\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2 + \sigma^2} \times \right. \\ &\times \left. \left(x_k + \hat{\xi}_{k-1} \frac{\sigma^2 R}{\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (13.17)$$

где в соответствии с (13.15) и (13.16)

$$\begin{aligned} \sigma_{k-1}^{-2} &= \sigma^{-2} + [\sigma_s^2(1-R^2) + \sigma_{k-2}^2 R^2]^{-1}; \\ x_k + \hat{\xi}_{k-1} \frac{\sigma^2 R}{\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2} &= \frac{\sigma^2}{\sigma_k^2} \hat{\xi}_k. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Начальные условия для рекуррентного алгоритма (13.17):

$$\hat{\xi}_1 = \frac{\sigma_s^2 x_1}{\sigma^2 + \sigma_s^2} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma^2} x_1; \quad \sigma_1^2 = \frac{\sigma_s^2 \sigma^2}{\sigma^2 + \sigma_s^2}; \quad (13.19)$$

$$\Lambda_1(x_1) = \frac{\sigma_1}{\sigma_s} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{\sigma^2 + \sigma_s^2} - \frac{x_1^2}{\sigma^2} \right) \right] = \frac{\sigma_1}{\sigma_s} e^{\sigma_1^2 x_1^2 / (2\sigma^4)} = \frac{\sigma_1}{\sigma_s} e^{\hat{\xi}_1^2 / (2\sigma_1^2)}. \quad (13.20)$$

При $R \rightarrow 0$ (нормально распределенный сигнал с независимыми значениями) из (13.17) следует очевидное равенство

$$\Lambda_k(x_1^k) = \Lambda_{k-1}(x_1^{k-1}) \frac{\sigma_1}{\sigma_s} e^{\sigma_1^2 x_k^2 / (2\sigma^4)} = \Lambda_{k-1}(x_1^{k-1}) \Lambda_1(x_k).$$

Формула (13.17) устанавливает рекуррентную связь отношения правдоподобия и оптимальной оценки марковского нормального сигнала. Логарифмируя обе части равенства (13.17), получим [132]

$$\ln \Lambda_k(x_1^k) = \ln \Lambda_{k-1}(x_1^{k-1}) + a_k^2 \hat{\xi}_k^2 - b_k^2 \xi_{k-1}^2 - c_k^2, \quad (13.21)$$

где

$$a_k^2 = \frac{\sigma^2}{2\sigma_k^4} \frac{\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2}{\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2 + \sigma^2}; \quad (13.22)$$

$$b_k^2 = \frac{R^2}{2} \frac{1}{\sigma_s^2(1-R^2) + R^2\sigma_{k-1}^2}; \quad (13.23)$$

$$c_k^2 = \frac{1}{2} \ln \left[1 + (1-R^2) \frac{\sigma_s^2}{\sigma^2} + R^2 \frac{\sigma_{k-1}^2}{\sigma^2} \right]. \quad (13.24)$$

Структурная схема устройства совместного обнаружения и филь-

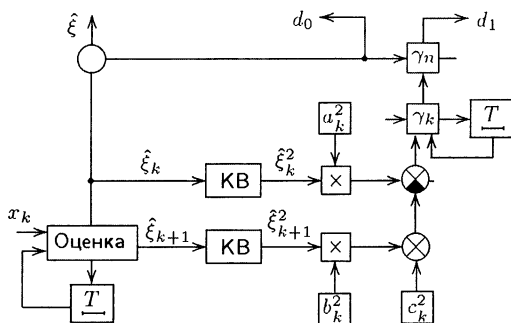


Рис. 13.3

трации, работающего согласно рекуррентному алгоритму (13.21), представлена на рис. 13.3, где $\gamma_k = \ln \Lambda_k$.

13.3. Связь функционала отношения правдоподобия с оценками сигнала по критерию минимума среднего квадрата ошибки

Рассмотрим задачу обнаружения непрерывного марковского сигнала $\xi(t)$ на фоне аддитивного нормального белого шума $\eta(t)$. В этом случае наблюдаемый процесс может быть представлен при помощи стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi(t) = \xi(t)dt + \sqrt{N_0}dv(t), \quad (13.25)$$

если верна гипотеза H_1 , и при помощи уравнения

$$d\xi(t) = \sqrt{N_0}dv(t), \quad (13.26)$$

если верна гипотеза H_0 . В приведенных уравнениях $v(t)$ — стандартный винеровский процесс, $\eta(t) = \sqrt{N_0}dv(t)/dt$ — белый нормальный шум со спектральной плотностью N_0 , $x(t) = d\xi(t)/dt$ — наблюдаемая реализация.

Для установления связи функционала отношения правдоподобия с оценками сигнала воспользуемся предельной формой соотношения (13.9). Для этого необходимо сначала перейти к дискретному варианту рассматриваемой задачи, вводя интервал дискретизации Δt между последовательными наблюдениями. Выборочному значению x_k при гипотезе H_0 соответствует $\sqrt{N_0}[v(t_k) - v(t_{k-1})]$. Так как винеровский процесс представляет процесс с независимыми приращениями, причем $m_1\{v(t_k) - v(t_{k-1})\} = 0$ и $m_1\{[v(t_k) - v(t_{k-1})]^2\} = \Delta t$, то в рассматриваемом случае отношение плотностей $\omega_{1\eta}(x_k - s_k)/\omega_{1\eta}(x_k)$

в (13.9) равно (при замене s_k на $s_k \Delta t$)

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \frac{1}{2N_0 \Delta t} [2x_k s_k \Delta t] - s_k^2 \Delta t^2 \right\} &= \exp \left[\frac{x_k s_k}{N_0} - \frac{s_k^2}{2N_0} \Delta t \right] = \\ &= 1 + \frac{x_k s_k}{N_0} - \frac{s_k^2}{2N_0} \Delta t + \frac{x_k^2 s_k^2}{2N_0^2} + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (13.27)$$

Подставляя (13.27) в выражение (13.9) вместо отношения $\omega_{1\eta}(x_k - s_k)/\omega_{1\eta}(x_k)$ и интегрируя по s_{k-1} , получим*

$$\begin{aligned} \Lambda_k(x_1^k) &= \Lambda_{k-1}(x_1^{k-1}) \left[1 + \frac{x_k}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} s_k W(s_k | x_1^{k-1}) ds_k - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2N_0} \left(\frac{x_k^2}{N_0} - \Delta t \right) \int_{-\infty}^{\infty} s_k^2 W(s_k | x_1^{k-1}) ds_k + o(\Delta t) \right]. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, т.е. заменяя $\Lambda_k(x_1^k) - \Lambda_{k-1}(x_1^{k-1})$ на $d\Lambda(x_t)$ и x_k на $\sqrt{N_0} d\xi(t)$, получим

$$d\Lambda(x_t) = \Lambda(x_t) N_0^{-1/2} \hat{s}(t) d\xi(t), \quad (13.29)$$

где x_t — реализация, наблюдаемая на интервале $(0, t)$;

$$\hat{s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s W(s, t | x_t) ds \quad (13.30)$$

представляет оптимальную оценку сигнала по критерию минимума среднего квадрата ошибки, вычисленную в предположении, что сигнал присутствует.

При переходе от $d\Lambda(x_t)$ к $d \ln \Lambda(x_t)$ используется правило дифференцирования Ито:

$$d \ln \Lambda(x_t) = \frac{\hat{s}(t)}{\sqrt{N_0}} d\xi(t) - \frac{1}{2N_0} [\hat{s}(t)]^2 dt. \quad (13.31)$$

Из (13.31) находим связь функционала логарифма отношения правдоподобия с оценкой марковского сигнала по критерию минимума среднего квадрата ошибки:

$$\ln \Lambda(x_t) = \frac{1}{N_0} \left[\oint_{0 \rightarrow T} \hat{s}(t) x(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^T [\hat{s}(t)]^2 dt \right], \quad (13.32)$$

где \oint — условное обозначение стохастического интеграла Ито.

Приемник, выполняющий операции (13.32), назовем приемником Стратоновича–Сосулина.

* Здесь использовано соотношение $(dv)^2 \sim dt$, из-за чего последнее слагаемое в (13.27) обращается в нуль. Уравнение (13.28) — стохастическое дифференциальное уравнение Ито.

Нетрудно заметить, что структура формулы (13.32) аналогична структуре выражения логарифма функционала отношения правдоподобия в задаче обнаружения детерминированного сигнала $s(t)$ на фоне аддитивного нормального белого шума (см. гл. 1). Отличие состоит лишь в том, что детерминированный сигнал $s(t)$ заменяется оценкой $\hat{s}(t)$ марковского сигнала, вычисленной согласно (13.30), а интеграл, содержащий реализацию, заменен интегралом Ито.

13.4. Метод порождающего процесса

13.4.1. Определение и свойства порождающего процесса

Пусть наблюдаемая на интервале $(0, T)$ реализация $x(t)$ представляет сумму стохастического сигнала $\xi(t)$ и нормального белого шума $\eta(t)$ со спектральной плотностью N_0 . Оптимальная по критерию минимума квадрата ошибки линейная оценка $\hat{\xi}(t)$ сигнала равна следующему функционалу реализации:

$$\hat{\xi}(t) = \int_0^T h^*(t, t-u)x(t-u) du, \quad (13.33)$$

где $h^*(t, y)$ в случае белого шума, независимого от сигнала, удовлетворяет интегральному уравнению

$$R_\xi(t, y) = N_0 h^*(t, y) + \int_0^T h^*(t, u) B_\xi(u, y) du, \quad (13.34)$$

где $R_\xi(t, y)$ — корреляционная функция сигнала.

Ошибка оценивания $\Delta(t) = \xi(t) - \hat{\xi}(t)$ и значения наблюдаемой реализации $x(\tau)$ некоррелированы при любых $\tau < t$.

Назовем *порождающим процессом** $\nu(t)$ разность

$$\nu(t) = x(t) - \hat{\xi}(t) = \Delta(t) + \eta(t), \quad (13.35)$$

где $\hat{\xi}(t)$ определяется согласно (13.33), (13.34). Покажем, что порождающий процесс так же, как и процесс $\eta(t)$, является белым шумом. Для этого найдем корреляционную функцию процесса $\nu(t)$

$$\begin{aligned} & E\{\nu(t), \nu(u)\} = \\ & = E\{\Delta(t)\Delta(u)\} + E\{\Delta(t)\eta(u)\} + E\{\Delta(u)\eta(t)\} + N_0\delta(t-u). \end{aligned} \quad (13.36)$$

Но

$$E\{\Delta(t)\Delta(u)\} = E\{\delta(t) \mid \xi(u) - \hat{\xi}(u)\} = E\{\Delta(t)\xi(u)\} -$$

* Метод, разработанный Кайлатом [53], представляет развитие идеи обеляющего фильтра. В оригинальных работах Кайлата он назван *innovation approach* [144]. Трудно переводимый неологизм автора заменен термином «порождающий процесс» (имеется также русский термин «обновляющий процесс» [143]).

$$- \int_0^T h^*(u, u-y) E\{\Delta(t)x(u-y)\} dy,$$

и так как $E\{\Delta(t)x(u-y)\} = 0$, $t > u, y > 0$, то

$$E\{\Delta(t)\Delta(u)\} = E\{\Delta(t)\xi(u)\}. \quad (13.37)$$

Далее, согласно (13.37)

$$\begin{aligned} E\{\Delta(t)\Delta(u)\} + E\{\Delta(t)\eta(u)\} &= E\{\Delta(t)[\xi(u) + \eta(u)]\} = \\ &= E\{\Delta(t)x(u)\} = 0, \quad t > u. \end{aligned}$$

Кроме того, для белого шума

$$E\{\Delta(t)\eta(u)\} = E\{\xi(u)\eta(t)\} - E\{\hat{\xi}(u)\eta(t)\} = 0,$$

и из (13.36) при $t > u$ находим

$$E\{\nu(t)\nu(u)\} = N_0\delta(t-u). \quad (13.38)$$

Ясно, что (13.38) справедливо и при $u > t$.

Из определения порождающего процесса [см. (13.35)] следует, что этот процесс связан с наблюдаемой реализацией функциональным преобразованием

$$\nu(t) = x(t) - \int_0^T h^*(t, t-u)x(t-u) du = \int_0^T [\delta(u) - h^*(t, t-u)]x(t-u) du. \quad (13.39)$$

Фильтр с импульсной переходной функцией $\delta(u) - h^*(t, t-u)$ — «обеляющий», так как он преобразует наблюдаемую реализацию в белый шум.

Если сигнал является нормальным случайным процессом, то порождающий процесс (13.39) как линейный функционал нормального процесса представляет нормальный белый шум.

Замечательное свойство порождающего процесса состоит в том, что он представляет нормальный белый шум даже и в тех случаях, когда распределение стохастического сигнала $\xi(t)$ не является нормальным.

13.4.2. Общая структура логарифма функционала отношения правдоподобия

Рассмотрим задачу обнаружения стохастического сигнала $\xi(t)$ на фоне нормального белого шума $\eta(t)$. Эта задача формулируется в терминах проверки статистических гипотез. Вводится гипотеза H_0 о том, что наблюдаемая реализация $x(t)$ на интервале $(0, T)$ принадлежит белому нормальному шуму $\eta(t)$ против альтернативы H_1 , что эта реализация принадлежит сумме сигнала и шума $\xi(t) + \eta(t)$. Так как порождающий процесс $v(t)$, определенный в предыдущем разделе, и

нормальный белый шум $\eta(t)$ статистически *неразличимы*, то сформулированная задача полностью эквивалентна следующей: проверяется гипотеза H_0 , что на интервале $(0, T)$

$$x(t) = \nu(t) = \eta(t), \quad (13.40)$$

против альтернативы, что на указанном интервале

$$x(t) = \hat{\xi}(t) + \nu(t) = \xi(t) + \eta(t), \quad (13.41)$$

где $\hat{\xi}(t)$ — оптимальная по критерию минимума среднего квадрата ошибки оценка сигнала $\xi(t)$. В этой формулировке роль обнаруживаемого сигнала играет оценка $\hat{\xi}(t)$, а роль аддитивного нормального белого шума — порождающий процесс $\nu(t)$. Хотя в обеих формулировках сигнал случайный, но во втором случае он может быть вычислен по наблюдаемой реализации согласно (13.33). Поэтому естественно предположить, что формула для функционала отношения правдоподобия в задаче обнаружения детерминированного сигнала на фоне аддитивного нормального белого шума остается справедливой при замене детерминированного сигнала условно известным значением $\hat{\xi}(t)$ после наблюдения реализации $x(\tau)$ на заданном интервале времени. Это предположение подтвердилось, и строгое его доказательство дано в [144].

Таким образом, заменяя в алгоритме различения сигналов ($s_1(t)$ и $s_0(t)$) на $\hat{\xi}(t)$ (при $s_0 \equiv 0$), получаем общее выражение логарифма функционала отношения правдоподобия

$$\ln \Lambda[x(t)] = \frac{1}{N_0} \int_0^T \hat{\xi}(t)x(t) dt - \frac{1}{2N_0} \int_0^T [\hat{\xi}(t)]^2 dt. \quad (13.42)$$

Формула (13.42) обобщает выражения функционалов отношения правдоподобия для случаев обнаружения на фоне нормального белого шума нормального стохастического сигнала и диффузионного марковского процесса.

13.5. Общие алгоритмы (непрерывное время)

Пусть наблюдение и марковские процессы, на основе которых строятся модели сигналов, протекают в непрерывном времени. Наблюдаемый процесс в данном случае имеет вид

$$y(t) = \theta s(x_t, t) + \xi_t; \quad \theta \neq 0; \quad 0 \leq t \leq T, \quad (13.43)$$

где параметр x_t сигнала $s(x_t, t)$ является марковским процессом с непрерывным временем. Этот параметр может описываться гауссовским и негауссовским распределением вероятностей, иметь непрерывное и дискретное фазовое пространство.

Шум ξ_t представляет собой процесс с независимыми значениями $\{\xi_t, i = 1, 2, \dots\}$ и определяется плотностями вероятностей $\rho(\xi_i, t_i)$, которые могут быть гауссовскими и негауссовскими. При непрерывном времени случайный процесс с независимыми значениями переходит в обобщенный случайный процесс типа белого шума, который можно рассматривать как производную процесса с независимыми приращениями. Среди процессов такого типа важнейшее место занимает гауссовский белый шум — производная винеровского процесса. В дальнейшем под ξ_t понимается гауссовский белый шум со спектральной плотностью N , статистически не зависящий от процесса x_t .

13.5.1. Уравнения для отношения правдоподобия [51].

Приемник Стратоновича–Сосулина

Выведем стохастические уравнения путем предельного перехода в рекуррентном алгоритме.

Гауссовскому белому шуму $\{\xi_t, t \geq 0\}$ соответствует в дискретном времени гауссовский процесс с независимыми значениями $\{\xi(t_k), k = 1, 2, \dots\}$, описываемый ПРВ

$$\rho(\xi_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N/\Delta t}} \exp\left(-\frac{\Delta t}{2N} \xi_k^2\right), \quad \Delta t = t_k - t_{k-1}. \quad (13.44)$$

Далее необходимо подставить (13.44) в (13.2) и разложить экспоненту в ряд по степеням Δt . Затем при использовании условия нормировки

$$\int \int \pi(x_{k+1} | x_k) w_k(x_k) dx_k dx_{k+1} = 1,$$

(13.2) приводится к виду

$$\begin{aligned} \Lambda_{k+1} = \Lambda_k + \Lambda_k \int \int \left\{ \frac{\Delta t}{2N} [2y_{k+1}s(x_{k+1}) - s^2(x_{k+1})] + \right. \\ \left. + \frac{(\Delta t)^2 y_{k+1}^2}{2N^2} s^2(x_{k+1}) \right\} \pi(x_{k+1} | x_k) w_k(x_k) dx_k dx_{k+1} + o[(\Delta t)^2], \end{aligned} \quad (13.45)$$

где $o[(\Delta t)^2]$ — члены порядка малости $(\Delta t)^2$ и выше. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int \int s(x_{k+1}) \pi(x_{k+1} | x_k) w_k(x_k) dx_k dx_{k+1} = \\ = \int s(x_{k+1}) W(x_{k+1} | y_1^k, \Theta = 1) dx_k. \end{aligned}$$

В пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ он переходит в апостериорное среднее значение сигнала $s(x_t, t)$, параметр которого x_t является марковским

диффузионным процессом,

$$E[s(x_t, t) | y_0^t, \Theta = 1] = \int s(x, t) w_t(x) dx \equiv \hat{s}_t. \quad (13.46)$$

Здесь

$$w_t(x) = W(x_t | y_0^t, \Theta = 1) \quad (13.47)$$

— АПРВ параметра сигнала. Через y_0^t обозначена наблюдаемая на отрезке $[0, t]$ реализация процесса $\{y_t\}$.

При переходе в рекуррентном соотношении (13.45) к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ можно получить стохастические дифференциальные уравнения двух видов в зависимости от того, учитывается или отбрасывается член типа $(\Delta t y_{k+1})^2$.

Если под шумом понимать строго дельта-коррелированный процесс, то указанный член необходимо учитывать, поскольку при $\Delta t \rightarrow 0$ он дает вклад $N\Delta t$ в силу свойства (13.3) стандартного винеровского процесса. При этом соответствующее стохастическое уравнение будет записано в форме Ито.

В результате из (13.45) при $\Delta t \rightarrow 0$ получаем стохастическое уравнение для функционала отношения правдоподобия (ОП)

$$\Lambda_t = \frac{W(y_0^t | \Theta = 1)}{W(y_0^t | \Theta = 0)}.$$

В форме Ито получим [51]

$$d^* \Lambda_t = \frac{1}{N} \Lambda_t \hat{s}_t d\bar{y}_t, \quad (13.48)$$

где

$$d\bar{y}_t = \int_0^t y_\tau d\tau. \quad (13.49)$$

В практических задачах шум является «сглаженным» процессом, не дельта-коррелированным. При этом член $(\Delta t y_{k+1})^2$ имеет порядок малости уже не $o[(\Delta t)]$, а $o[(\Delta t)^2]$ и в пределе дает нулевой вклад. Переходя в (13.45) к пределу, отбрасывая указанный член, получим стохастическое уравнение для ОП, записанное в симметризованной форме (в форме Стратоновича):

$$d\Lambda_t = \frac{1}{N} \Lambda_t \hat{s}_t d\bar{y}_t - \frac{1}{2N} \Lambda_t \hat{s}_t^2 dt, \quad (13.50)$$

или

$$\dot{\Lambda}_t = \frac{1}{N} \Lambda_t \hat{s}_t y_t - \frac{1}{2N} \Lambda_t \hat{s}_t^2. \quad (13.51)$$

Здесь обозначено

$$\hat{s}_t^2 = E[s^2(x_t, t) | y_0^t, \Theta = 1] = \int s^2(x, t) w_t(x) dx. \quad (13.52)$$

При симметризованной записи стохастических выражений с ними можно обращаться, используя обычные правила дифференцирования и интегрирования, как если бы процессы $\{x_t\}, \{\xi_t\}$ были гладкими функциями. Найдем решения полученных стохастических дифференциальных уравнений. Для этого сделаем замену $z_t = \ln \Lambda_t$. Рассмотрим вначале симметризованное уравнение (13.51). Учитывая, что дифференцирование в этом случае осуществляется по обычному правилу $\dot{z}_t = \dot{\Lambda}_t / \Lambda_t$, из (13.51) получим

$$\dot{z}_t = \frac{1}{N} \hat{s}_t y_t - \frac{1}{2N} \hat{s}_t^2. \quad (13.53)$$

Используя начальное условие $z_0 = 0$ (так как $\Lambda_0 = 1$), находим логарифм отношения правдоподобия (ЛОП) приемника Стратоновича–Сосулина

$$z_T = \frac{1}{N} \int_0^T \hat{s}_t y_t dt - \frac{1}{2N} \int_0^T \hat{s}_t^2 dt, \quad (13.54)$$

откуда

$$\Lambda_t = \exp \left(\frac{1}{N} \int_0^T \hat{s}_t y_t dt - \frac{1}{2N} \int_0^T \hat{s}_t^2 dt \right). \quad (13.55)$$

Рассмотрим теперь уравнение (13.48). В данном случае дифференцирование производится по правилу Ито. Для того чтобы непосредственно использовать указанное правило в рассматриваемой задаче, нужно стохастический дифференциал (13.49) выразить через дифференциал стандартного винеровского процесса ω_t , для которого $E(\omega_t) = 0$, $D_{\omega_t} = t$. Учитывая (13.43), (13.49), а также то, что $\xi_t = \sqrt{N}\omega_t$, получим

$$d\bar{y}_t = \Theta s(x_t, t) dt + \sqrt{N} d\omega_t. \quad (13.56)$$

Подставим это выражение в (13.48), затем применим к $\ln \Lambda_t$ формулу дифференцирования Ито и вновь воспользуемся (13.56). В результате получим

$$d^* z_t = \frac{1}{N} \hat{s}_t d\bar{y}_t - \frac{1}{2N} \hat{s}_t^2 dt. \quad (13.57)$$

Таким образом,

$$z_T = \frac{1}{N} \int_0^T \hat{s}_t d^* \bar{y}_t - \frac{1}{2N} \int_0^T \hat{s}_t^2 dt,$$

или, что то же,

$$z_T = \frac{1}{N} \int_0^T \hat{s}_t y_t d^* t - \frac{1}{2N} \int_0^T \hat{s}_t^2 dt. \quad (13.58)$$

При этом ОП приемника Стратоновича–Сосулина

$$\Lambda_t = \exp \left(\frac{1}{N} \int_0^T \hat{s}_t y_t d^* t - \frac{1}{2N} \int_0^T \hat{s}_t^2 dt \right). \quad (13.59)$$

Здесь введено обозначение для стохастического дифференциала Ито $d^* y_t = y_t d^* t$.

Формулы (13.55) и (13.59) определяют ОП для проблемы (13.43). Различный вид этих выражений является следствием использования различных форм записи стохастических интегралов.

Полученные алгоритмы дают ОП в виде функционального преобразования наблюдаемого процесса и байесовских среднеквадратических оценок (13.46), (13.52). Основные операции при обработке наблюдаемого процесса y_t в ряде случаев сводятся к моделированию первого члена в алгоритмах (13.54), (13.58). Эти операции состоят в умножении y_t на оценку \hat{s}_t полезного сигнала и последующем интегрировании. Таким образом, основной элемент обнаружения представляет собой коррелятор наблюдаемых данных и оценки сигнала. Поэтому полученные алгоритмы называют алгоритмами оценочно-корреляционного типа.

В частном случае, когда сигнал является детерминированным $s(x_t, t) = s(t)$, оценка равна самому сигналу:

$$\hat{s}_t = s(t). \quad (13.60)$$

В этом вырожденном случае стохастические интегралы Ито и симметризованный совпадают. Поэтому в данном случае должны совпадать полученные здесь симметризованный алгоритм и алгоритм в форме Ито. Действительно, для детерминированного сигнала

$$\hat{s}_t^2 = s_t^2.$$

При этом алгоритмы (13.54) и (13.58) приобретают одинаковый вид:

$$z_T = \frac{1}{N} \int_0^T s_t y_t dt - \frac{1}{2N} \int_0^T s_t^2 dt. \quad (13.61)$$

Формула (13.61) определяет ЛОП в задаче обнаружения детерминированного сигнала на фоне белого шума. Она дает структуру оптимального приемника в виде коррелятора или согласованного линейного фильтра. Импульсная характеристика согласованного фильтра, формирующего интеграл $\int_0^T s(t)y(t) dt$, равна

$$h(t) = s(T - t). \quad (13.62)$$

Таким образом, корреляционная обработка является частным случаем оценочно-корреляционных алгоритмов.

Если сигнал не является детерминированным, то необходимо отыскать оценку \hat{s}_t (13.46) сигнала $s(x_t, t)$. Для этого потребуется АПРВ (13.47).

13.5.2. Уравнения нелинейной фильтрации [51]

Выведем уравнения для АПРВ (13.47) методом предельного перехода к непрерывному времени в соответствующем рекуррентном алгоритме.

Подставляя (13.44) в (13.3) и поступая затем также, как и при получении (13.45), найдем:

$$\begin{aligned} \omega_{k+1}(x_{k+1}) = & \left\{ \left[1 + \frac{\Delta t}{N} \left(y_{k+1}s(x_{k+1}) - \frac{1}{2}s^2(x_{k+1}) \right) + \frac{(\Delta t y_{k+1})^2}{2N^2} s^2(x_{k+1}) \right] \times \right. \\ & \times \int \pi(x_{k+1} | x_k) \omega_k(x_k) dx_k \left. \right\} \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{N} \left[y_{k+1}\hat{s}_{k,k+1} - \frac{1}{2}\hat{s}_{k,k+1}^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{(\Delta t y_{k+1})^2}{2N^2} \hat{s}_{k,k+1}^2 \right\}^{-1} + o[(\Delta t^2)], \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{s}_{k,k+1} &= \int \int s(x_{k+1}) \pi(x_{k+1} | x_k) \omega_k(x_k) dx_k dx_{k+1} = \\ &= E[s(x_{k+1}) | y_1^k, \Theta = 1]; \quad \hat{s}_{k,k+1}^2 = E[s^2(x_{k+1}) | y_1^k, \Theta = 1]. \end{aligned}$$

Далее, используя разложение

$$\frac{1}{1 + \Delta t} = 1 - \Delta t + (\Delta t)^2 - \dots,$$

получим

$$\begin{aligned} \omega_{k+1}(x_{k+1}) &= \int \pi(x_{k+1} | x_k) \omega_k(x_k) dx_k + \\ &+ L(\omega_k) \int \pi(x_{k+1} | x_k) \omega_k(x_k) dx_k + o[(\Delta t)^2]. \end{aligned} \quad (13.63)$$

где

$$\begin{aligned} L(\omega_k) &= \frac{\Delta t}{N} y_{k+1} [s(x_{k+1}) - \hat{s}_{k,k+1}] - \frac{\Delta t}{2N} [s^2(x_{k+1}) - \hat{s}_{k,k+1}^2] + \\ &+ \frac{(\Delta t y_{k+1})^2}{N^2} \left[\frac{1}{2} s^2(x_{k+1}) - \frac{1}{2} \hat{s}_{k,k+1}^2 - s(x_{k+1}) \hat{s}_{k,k+1} + \hat{s}_{k,k+1}^2 \right]. \end{aligned} \quad (13.64)$$

Нетрудно видеть, что если исключить произведение $L(\omega_k) \times \int \pi \omega_k dx_k$ из (13.63), то (13.63) перейдет в уравнение Колмогорова-Чемпена, которое в пределе при $\Delta t \rightarrow 0$ переходит в соотношение,

определяющее эволюцию априорной плотности вероятностей процесса x_t , т.е. уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) с оператором

$$L_{pr} = -\frac{\partial}{\partial x}a(x, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}b(x, t). \quad (13.65)$$

Оставив $L(\omega_k) \int \pi \omega_k dx_k$ в (13.63), в пределе получим уравнение для АПРВ (13.47), которое можно записать в виде

$$\dot{\omega}_t(x) = L_{pr}\omega_t(x) + L(\omega_t)\omega_t(x), \quad t \geq 0. \quad (13.66)$$

Оператор $L(\omega_t)$ определяется в результате предельного перехода в (13.64). Заменяв $(\Delta ty_{k+1})^2$ при $\Delta t \rightarrow 0$ на $N\Delta t$, получим $L(\omega_t)$ в форме Ито:

$$L(\omega_t) = \frac{1}{N}[s(x, t) - \hat{s}_t][y_t - \hat{s}_t], \quad (13.67)$$

где $\hat{s}_t = \hat{s}_t(\omega_t)$ определяется соотношением (13.46).

Отбросив в (13.64) члены содержащие $(\Delta ty_{k+1})^2$, найдем симметризованное выражение

$$L(\omega_t) = \frac{1}{N}y_t[s(x, t) - \hat{s}_t] - \frac{1}{2N}[s^2(x, t) - \hat{s}_t^2]. \quad (13.68)$$

где \hat{s}^2 определяется формулой (13.52).

Итак, получено стохастическое уравнение (13.66), описывающее эволюцию во времени АПРВ $\omega_t(x)$ диффузионного параметра x_t сигнала $s(x_t, t)$, наблюдаемого на фоне белого шума. Оно является уравнением в форме Ито, если $L(\omega_t)$ берется из (13.67), и симметризованным, если используется (13.68). Оператор L_{pr} для обоих случаев определяется формулой (13.65). Начальное условие для (13.66) задается априорной ПРВ $\omega_0(x)$ случайной величины x_0 .

Уравнение (13.66) является нелинейным интегро-дифференциальным с частными производными. Определяя АПРВ $\omega_t(x)$, это уравнение позволяет находить оптимальные (линейные и нелинейные) оценки сигнала $s(x_t, t)$ и интерпретируется как уравнение оптимальной нелинейной фильтрации. Впервые это уравнение получено Стратоновичем [133, 134].

Введем обозначение:

$$F_1(x, t) = 2y_t s(x, t) - s^2(x, t); \quad \langle F_1(x, t) \rangle = \int F(x, t) \omega_t(x) dx.$$

Тогда уравнение Стратоновича примет вид

$$\frac{\partial \omega_t(x)}{\partial t} = L_{pr}\omega_t(x) + [F_1(x, t) - \langle F_1(x, t) \rangle]\omega_t(x). \quad (13.69)$$

Пусть модели сообщения и наблюдения удовлетворяют стохастическим ДУ в форме Ито:

$$\begin{aligned} d\mathbf{X} &= \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)dt + \mathbf{G}d\mathbf{w}_t; \quad E\{\mathbf{X}(t_0)\} = \bar{\mathbf{X}}_0; \\ d\mathbf{Y} &= \mathbf{H}(\mathbf{X}, t)dt + d\mathbf{v}_t, \end{aligned} \quad (13.70)$$

где $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t)$ — n -мерный вектор состояния системы; $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ — n -мерный вектор; $\mathbf{G}(\mathbf{X}, t)$ — $n \times r$ -матрица; \mathbf{w}_t — r -мерный винеровский процесс с ковариационной матрицей $E\{\mathbf{w}_t\mathbf{w}_{t+\tau}^T\} = \mathbf{Q}(t - \tau)$; $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)$ — m -мерный вектор, реализация которого доступна наблюдению; $\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)$ — m -мерный вектор; \mathbf{v}_t — m -мерный винеровский СП с ковариационной матрицей $E\{\mathbf{v}_t\mathbf{v}_{t+\tau}^T\} = \mathbf{R}(t - \tau)$, независимой от \mathbf{w}_t и $\mathbf{X}(t)$.

Уравнение Стратоновича при уравнениях Ито (13.70) имеет вид [154]:

$$dW_t(x) = L_{pr}[W_t(x)]dt + [\mathbf{H}(x, t) - \overline{\mathbf{H}(x, t)}]^T \mathbf{R}^{-1} [d\mathbf{Y} - \overline{\mathbf{H}(x, t)}] W_t(x); \quad (13.71)$$

или в другой форме [145]:

$$\frac{\partial W_t(x)}{\partial t} = L_{pr}[W_t(x)] + [\mathbf{H}(x, t) - \overline{\mathbf{H}(x, t)}]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \overline{\mathbf{H}(x, t)}] W_t(x), \quad (13.72)$$

где $\mathbf{z} = d\mathbf{y}/dt$; $\overline{\mathbf{H}(x, t)} = E\{\mathbf{H}(x, t)\}$.

Построение точного решения уравнения Стратоновича не представляется возможным.

Уравнения относительно апостериорных среднего значения (оценки) и матрицы дисперсий имеют вид [154]:

$$d\bar{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)}dt + \overline{[\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}]\mathbf{H}^T(\mathbf{x}, t)\mathbf{R}^{-1}[d\mathbf{y} - dt\overline{\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)}]}, \quad (13.73)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}}(t) &= \int \mathbf{x} W_t(\mathbf{x}) d\mathbf{x}; \quad \overline{\mathbf{H}(\mathbf{x}, t)} = \int \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) W_t(\mathbf{x}) d\mathbf{x}; \\ d\mathbf{D} &= \overline{\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T} + \overline{(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})\mathbf{F}^T(\mathbf{X}, t)} + \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{G}^T - \\ &- \overline{(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})\mathbf{H}^T(\mathbf{X}, t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T}dt + \overline{[(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T\mathbf{H}^T(\mathbf{X}, t) - \\ &- (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T\mathbf{H}^T(\mathbf{X}, t)]\mathbf{R}^{-1}[d\mathbf{Y} - \overline{\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)}dt]}. \end{aligned} \quad (13.74)$$

Уравнения (13.73) и (13.74) могут быть записаны в эквивалентной форме [154]:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} &= \overline{\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)} + \overline{[\mathbf{X}\mathbf{H}^T(\mathbf{X}, t) - \bar{\mathbf{X}}\mathbf{H}^T(\mathbf{X}, t)]}\mathbf{R}^{-1}[\mathbf{Z}(t) - \overline{\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)}]; \quad (13.75) \\ \bar{\mathbf{X}}(t_0) &= \bar{\mathbf{X}}_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dD_{ij}}{dt} = & [\overline{X_i F_j(\mathbf{X}, t)} - \overline{X_i} \overline{F_j(\mathbf{X}, t)}] + [\overline{F_i(\mathbf{X}, t) X_j} - \overline{F_i(\mathbf{X}, t)} \overline{X_j}] + \\
& + (\mathbf{G} \mathbf{Q} \mathbf{G}^T)_{ij} - [\overline{X_i \mathbf{H}(\mathbf{X}, t)} - \overline{X_i} \overline{\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)}]^T \mathbf{R}^{-1} [\overline{\mathbf{H}(\mathbf{X}, t) X_j} - \overline{\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)} \overline{X_j}] + \\
& + [\overline{X_i X_j \mathbf{H}(\mathbf{X}, t)} - \overline{X_i X_j} \overline{\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)} - \overline{X_i} \overline{X_j} \overline{\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)} - \overline{X_j} \overline{X_i} \overline{\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)} + \\
& + 2 \overline{X_i X_j} \overline{\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)}]^T \mathbf{R}^{-1} [\overline{Z(t)} - \overline{\mathbf{H}(\mathbf{X}, t)}], \quad (13.76) \\
i, j = \overline{1, n}; \quad D_{ij}(t_0) = (\mathbf{D}_0)_{ij}.
\end{aligned}$$

Пример 13.1. Оценивание состояния одномерной нелинейной системы.

В этом случае z и x являются скалярами, и в исходных уравнениях (13.70) необходимо принять $m = n = r = 1$. При этом исходные уравнения (13.70) принимают вид:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) + g(x, t)w(t); \quad E[x(t_0)] = \overline{x_0}; \quad z(t) = h(x, t) + v(t). \quad (13.77)$$

Стохастические ДУ (13.75) и (13.76) упрощаются:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \hat{f}(x, t) + [\widehat{xh} - \hat{x}\hat{h}]R^{-1}(t)[z(t) - \hat{h}]; \quad (13.78)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dD}{dt} = & 2(\widehat{x\hat{f}} - \hat{x}\hat{f}) + \hat{g}^2 Q - [\widehat{xh} - \hat{x}\hat{h}]R^{-1}(t)[\widehat{hx} - \hat{h}\hat{x}] + \\
& + [\widehat{x^2h} - \hat{x}^2\hat{h} - 2\hat{x}\widehat{xh} + 2\hat{x}^2\hat{h}]R^{-1}[z(t) - \hat{h}], \quad (13.79)
\end{aligned}$$

где знак $\hat{}$ соответствует усреднению по АПРВ.

13.6. Гауссовское приближение

Обозначим в (13.65)

$$a(x, t) = K_1(x, t); \quad b(x, t) = K_2(x, t). \quad (13.80)$$

Если априорный процесс, который описывается уравнением ФПК, является гауссовским, для чего необходимо выполнение условий:

$$K_1(x, t) = ax + b; \quad a, b = \text{const}; \quad K_2(x, t) = \text{const}, \quad (13.81)$$

то АПРВ будет гауссовской в том случае, когда функция $F_1(x, t)$ представляет собой полином от x степени не выше второй [146]. Это утверждение основано на предполагаемой форме АПРВ (гауссовской)

$$W_{ps}(x, t) = w_1(x) = \sqrt{\frac{h_t}{2\pi}} \exp \left[-\frac{h_t}{2} (x - m_t)^2 \right], \quad (13.82)$$

где $h_t = 1/\sigma_t^2$; $m(t)$ и $\sigma^2(t)$ — среднее значение и дисперсия АПРВ.

Если подставить функцию (13.82) в уравнение Стратоновича (13.69), то в левой части после взятия производной по t будут члены, содержащие x в нулевой, первой и второй степенях. Равенство при

такой подстановке будет обеспечено, когда правая часть уравнения после взятия производных по x будет содержать x только в приведенных степенях. При $F_1(x, t) = a + bx + cx^2$ ($a, b, c = \text{const}$) это условие выполняется.

В результате указанной подстановки получены следующие уравнения гауссовского приближения [51]:

$$\begin{aligned} \dot{h}_t = & -b(m_t, t)h_t^2 - 2h_t \frac{\partial a(m_t, t)}{\partial x} - \\ & - \frac{1}{N} [y_t - s(m_t, t)] \frac{\partial^2 s(m_t, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{N} \left[\frac{\partial s(m_t, t)}{\partial x} \right]^2; \end{aligned} \quad (13.83)$$

$$\dot{m}_t = a(m_t, t) + \frac{1}{Nh_t} [y_t - s(m_t, t)] \frac{\partial s(m_t, t)}{\partial x}; \quad (13.84)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_t = & \frac{y_t}{N} \left[s(m_t, t) + \frac{1}{2h_t} \frac{\partial^2 s(m_t, t)}{\partial x^2} \right] - \\ & - \frac{1}{2N} \left[s^2(m_t, t) + \frac{1}{h_t} \left(\frac{\partial s(m_t, t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{h_t} s(m_t, t) \frac{\partial^2 s(m_t, t)}{\partial x^2} \right], \end{aligned} \quad (13.85)$$

где z_t — логарифм ОП (ЛОП).

Если ввести дисперсию $\sigma_t^2 = D_t = 1/h_t$, которая является апостериорной дисперсией (в гауссовском приближении) процесса x_t , то по (13.83) получим ДУ [51]:

$$\begin{aligned} \dot{D}_t = & b(m_t, t) + 2D_t \frac{\partial a(m_t, t)}{\partial x} + \\ & + \frac{D_t^2}{N} \left\{ [y_t - s(m_t, t)] \frac{\partial^2 s(m_t, t)}{\partial x^2} - \left[\frac{\partial s(m_t, t)}{\partial x} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (13.86)$$

Тогда из (13.84) вытекает ДУ оценки сигнала:

$$\dot{m}_t = a(m_t, t) + \frac{D_t}{N} [y_t - s(m_t, t)] \frac{\partial s(m_t, t)}{\partial x}. \quad (13.87)$$

Следует отметить, что ДУ (13.86) и (13.87) при условии (13.80) эквивалентны следующим ДУ [17]:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} &= K_1(x) + DF'_x(x, t); \\ \frac{dD}{dt} &= K_2(x) + 2DK'_{1x}(x) + D^2 F''_{xx}(\dot{x}, t), \end{aligned} \quad (13.88)$$

где

$$F(x, t) = -\frac{1}{2N} [y_t - s(\dot{x}, t)]^2. \quad (13.89)$$

При $K_1(x) = -\alpha x$; $K_2(x) = N_x/2$ по (13.88) следует [17]:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = -\alpha\hat{x} + DF'_x(x, t); \quad \frac{dD}{dt} = \frac{N_x}{2} - 2\alpha D + D^2 F''_{xx}(x, t). \quad (13.90)$$

Пример 13.2. Пусть уравнения сообщения и наблюдения заданы в виде [60]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= fx + gw(t); \\ y_t &= hx + v(t), \end{aligned} \quad (13.91)$$

где $w(t)$ и $v(t)$ — ГБШ с нулевыми средними значениями и КФ:

$$R_w(\tau) = q\delta(\tau); \quad R_v(\tau) = R\delta(\tau); \quad q, R = \text{const}; \quad f, g, h = \text{const}.$$

Тогда $K_1(x) = fx$; $K_2 = g^2q$; $s = hx$; $\partial s/\partial x = h$; $\partial^2 s/\partial x^2 = 0$, поэтому по (13.86), (13.87) получим систему ДУ:

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = f\hat{x} + K(y_t - h\hat{x}); \quad (13.92)$$

$$\frac{dD}{dt} = 2fD - \frac{h^2}{R}D^2 + g^2q. \quad (13.93)$$

Таким образом, получили уравнение фильтра Калмана [154] при коэффициенте усиления фильтра $K = Dh/R$ и соответствующее уравнение Риккати [60, формула (33.3)].

При задании одномерной нелинейной системы в виде (13.77) гауссовское приближение имеет вид [145, 154]:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= f(\hat{x}, t) + \frac{1}{2}Df''_{xx}(\hat{x}, t) + \\ &+ Dh'_x(\hat{x}, t)R^{-1}(t) \left[z(t) - h(\hat{x}, t) - \frac{1}{2}Dh''_{xx}(\hat{x}, t) \right]; \end{aligned} \quad (13.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} &= 2Df'_x(\hat{x}, t) + \hat{g}^2q - Dh'_x(\hat{x}, t)R^{-1}(t)h'_x(\hat{x}, t)D + \\ &+ \frac{1}{2}D^2h''_{xx}(\hat{x}, t)R^{-1}(t) \left[z(t) - h(\hat{x}, t) - \frac{1}{2}Dh''_{xx}(\hat{x}, t) \right]; \end{aligned} \quad (13.95)$$

$$\hat{x}(t_0) = \bar{x}_0; \quad D(t_0) = D_0,$$

где \hat{g}^2q определяется соотношением [145]:

$$\hat{g}^2q = g^2(\hat{x}, t)q + [g'_x(\hat{x}, t)]^2Dq + g(\hat{x}, t)g''_{xx}(\hat{x}, t)Dq + \frac{3}{4}[g''_{xx}(\hat{x}, t)]^2D^2q. \quad (13.96)$$

Положим, как в (13.90): $f(x, t) = fx$; $h(x, z) = hx$; $g(x, t) = g$ при $f, g, h = \text{const}$, тогда $f'_x = f$; $h'_x = h$; $f''_{xx} = 0$; $h''_{xx} = 0$; $g'_x = 0$; $g''_{xx} = 0$; $\hat{g}^2q = g^2q$. Поэтому по (13.94), (13.95) снова приходим к

уравнениям (13.92), (13.93) фильтра Калмана. Для сравнения приведем ДУ фильтра Стратоновича второго порядка [154]:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} = & f(\hat{x}, t) + \frac{1}{2} D f''_{xx}(\hat{x}, t) + \\ & + D h'_x(\hat{x}, t) R^{-1}(t) \left[z(t) - h(\hat{x}, t) - \frac{1}{2} D h''_{xx}(\hat{x}, t) \right]; \quad (13.97) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dt} = & 2D f'_x(\hat{x}, t) + \hat{g}^2 Q - D h'_x(\hat{x}, t) R^{-1}(t) h'_x(\hat{x}, t) D; \quad (13.98) \\ \hat{x}(t_0) = & \bar{x}_0; \quad D(t_0) = D_0. \end{aligned}$$

Замечаем, что ДУ для оценки \hat{x} (13.93) и (13.97) совпадают. Уравнение (13.98) образуется отбрасыванием последнего слагаемого в правой части ДУ (13.95).

Пусть сигнал $s(t, \lambda_1, \lambda_2)$ зависит от двух параметров $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$. В этом случае уравнение ФПК имеет вид [17]:

$$\begin{aligned} \frac{W_\tau(\lambda_{1\tau}, \lambda_{2\tau}; \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \tau} = & \quad (13.99) \\ = & - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial \lambda_{i\tau}} [a_i(\lambda_{1\tau}, \lambda_{2\tau}) W_\tau] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{i\tau} \partial \lambda_{j\tau}} [b_{ij}(\lambda_{1\tau}, \lambda_{2\tau}) W_\tau]. \end{aligned}$$

Здесь необходимо использовать двумерную нормальную АПРВ

$$\begin{aligned} \bar{W}(t, \lambda_1, \lambda_2) = & \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_1^2 \sigma_2^2 - k^2}} \exp \left\{ -\frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{2(\sigma_1^2 \sigma_2^2 - k^2)} \right. \\ \times & \left[\frac{(\lambda_1 - \lambda_{10})^2}{\sigma_1^2} - \frac{2k(\lambda_1 - \lambda_{10})(\lambda_2 - \lambda_{20})}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_{20})^2}{\sigma_2^2} \right] \Big\}, \quad (13.100) \end{aligned}$$

где $k(t)$ — функция взаимной корреляции между параметрами.

Введем обозначение

$$F(t, \lambda_1, \lambda_2) = -\frac{1}{2N} [y_t - s(t, \lambda_1, \lambda_2)]^2. \quad (13.101)$$

Тогда можно получить уравнения оптимальной нелинейной фильтрации следующего вида (уравнения расширенного фильтра Стратоновича):

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_{10}}{dt} = & a_1 + \sigma_1^2 \frac{dF}{d\lambda_1} + k \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}; \\ \frac{d\lambda_{20}}{dt} = & a_2 + \sigma_2^2 \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} + k \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}; \\ \frac{d\sigma_1^2}{dt} = & b_{11} + 2\sigma_1^2 \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_1} + \sigma_1^4 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} + 2k\sigma_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + 2k \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_2}; \end{aligned} \quad (13.102)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_2^2}{dt} &= b_{22} + 2\sigma_2^2 \frac{\partial a_2}{\partial \lambda_2} + \sigma_2^4 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + 2k\sigma_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + 2k \frac{\partial a_2}{\partial \lambda_1}; \\
\frac{dk}{dt} &= b_{12} + k \left(\frac{\partial a_1}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial a_2}{\partial \lambda_2} \right) + k \left(\sigma_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1^2} + \sigma_2^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_2^2} \right) + \\
&\quad + (\sigma_1^2 \sigma_2^2 + k^2) \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2} + \sigma_1^2 \frac{\partial a_2}{\partial \lambda_1} + \sigma_2^2 \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_2}.
\end{aligned} \tag{13.103}$$

13.7. Применение алгоритмов гауссовского приближения к задаче синтеза систем

Пример 13.3. Рассмотрим задачу, когда обнаруживаемый в БШ сигнал имеет вид

$$s(x_t, t) = A_0 \sin(\omega_0 t + x_t) \tag{13.104}$$

и является фазомодулированным процессом. Причем A_0 и ω_0 известные постоянные, а флуктуации фазы x_t определяются уравнением

$$\dot{x}_t = -\gamma x_t + w_t, \tag{13.105}$$

где w_t — ГБШ с нулевым средним значением $E(w_t) = 0$ и КФ вида $R_w(\delta) = q\delta(\tau)$. Начальное условие задается гауссовской СВ x_0 .

Таким образом, в (13.104) фаза x_t — гауссовско-марковский СП. Сигнал $s(x_t, t)$ описывается негауссовской ПРВ.

Используем соотношения (13.83)–(13.85) при $a(x) = -\gamma x$; $\partial a / \partial x = -\gamma$; $b = q$; $\partial s / \partial x = A_0 \cos(\omega_0 t + x_t)$; $\partial^2 s / \partial x^2 = -A_0 \sin(\omega_0 t + x_t)$; получим

$$\begin{aligned}
\dot{m}_t &= -\gamma m_t + \frac{1}{N h_t} \left\{ y_t A_0 \cos(\omega_0 t + m_t) - A_0^2 \frac{1}{2} \sin[2(\omega_0 t + m_t)] \right\}; \\
\dot{h}_t &= -q h_t^2 + 2 h_t \gamma - \frac{1}{N} \left\{ -y_t A_0 \sin \omega_0 t - \frac{A_0^2}{2N} [1 + \cos(2[\omega_0 t + m_t])] \right\} + \\
&\quad + \frac{A_0}{2N} \{1 + \cos[2(\omega_0 t + m_t)]\}; \\
\dot{z}_t &= \frac{y_t}{N} [A_0 \sin(\omega_0 t + m_t) - \frac{A_0}{2 h_t} \sin(\omega_0 t + m_t)] - \\
&\quad - \frac{1}{2N} \left\{ \frac{A_0^2}{2} - \frac{A_0^2}{2} \cos[2(\omega_0 t + m_t)] + \frac{A_0^2}{2 h_t} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos[2(\omega_0 t + m_t)] \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2 h_t} A_0^2 (1 - \cos[2(\omega_0 t + m_t)]) \right\},
\end{aligned}$$

где z_t — логарифм ОП (ЛОП).

Пренебрегая вторыми гармониками, а в третьем ДУ и постоянными $\frac{A_0^2}{4 h_t N}$ и $\frac{A_0^2}{4 N}$, которые можно отнести к порогу, получим окон-

чительно систему ДУ [51]

$$\dot{m}_t = -\gamma m_t + \frac{A_0 y_t}{N h_t} \cos(\omega_0 t + m_t); \quad (13.106)$$

$$\dot{h}_t = -q h_t^2 + 2\gamma h_t + \frac{A_0 y_t}{N} \sin(\omega_0 t + m_t); \quad (13.107)$$

$$\dot{z}_t = \frac{A_0 y_t}{N} \left(1 - \frac{1}{2h_t}\right) \sin(\omega_0 t + m_t). \quad (13.108)$$

Полученные уравнения определяют структурную схему квазиоптимальной системы совместного обнаружения и оценивания фазы фазомодулированного сигнала. Отметим, что блок нелинейной фильтрации, описываемый (13.106), (13.108), моделируется следящим устройством типа фазовой автоподстройки частоты с переменным коэффициентом усиления в цепи обратной связи. Согласно (13.106) коэффициент усиления зависит от наблюдаемого процесса.

13.7.1. Фазовая автоподстройка в задачах совместного обнаружения и фильтрации

Если в (13.106), (13.107) положить $\gamma = 0$, то получим уравнения, описывающие квазиоптимальную систему, когда фаза x_t сигнала (13.104) испытывает нестационарные блуждания и является винеровским процессом: $\dot{x}_t = w_t$. Для этого случая в соответствии с (13.106)–(13.108) на рис. 13.4 представлена структурная схема системы. (При моделировании (13.108) учтено, что при выполнении условий, необходимых для асимптотической оптимальности алгоритмов гауссовского приближения, апостериорная дисперсия $1/h_t$ мала, при этом $(1 - 1/2h_t) \approx 1$.)

На рис. 13.4 обозначено: ПГ — перестраиваемый генератор, РЭ — реактивный элемент, управляющий частотой ПГ; $\pi/2$ — фазовращатель, осуществляющий поворот фазы сигнала ПГ на $\pi/2$; ПУ — пороговое устройство. Коэффициент усиления $K = 1/h_t$ усилителя в цепи обратной связи ПГ, вообще говоря, переменный, причем случайный (зависит от y_t).

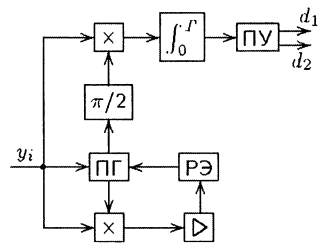


Рис. 13.4

Поэтому схему рис. 13.4 следовало бы дополнить схемой регулирования усиления, структура которой определяется уравнением (13.107). Для простоты технической реализации можно в стационарном режиме пренебречь флуктуациями коэффициента усиления и взять в качестве его компоненту $\bar{K} = 1/\bar{h}$ (в рамках гауссовского приближения), где \bar{h} — среднее значение параметра h_t . Такая упрощающая процедура предложена в [139] при решении задач фильтрации.

Проведя указанное усреднение (см. [135]), получим (при $\gamma = 0$)

$$1/\bar{h} = \sqrt{2qN/A_0^2}. \quad (13.109)$$

Этот же результат можно получить из второго ДУ РФК (13.98) при $g = 1$; $R = N$; $Q = q$; $f'_x = 0$; $dD/dt = 0$; $h'_t(\hat{x}, t) = [A_0 \sin(\omega_0 t + x)]_x = A_0 \cos(\omega_0 t + x)$. Тогда по (13.98) находим

$$q - \frac{D^2}{N} (h'_x)^2 = 0, \quad \text{или} \quad q = \frac{D^2}{N} \frac{A_0^2}{2} \{1 + \cos[2(\omega_0 t m_t)]\}.$$

Пренебрегая второй гармоникой, получим

$$D = \sqrt{2qN/A_0^2},$$

что совпадает с (13.109).

В результате приходим к постоянному коэффициенту усиления \bar{K} , при этом блок фильтрации в схеме рис. 13.4 будет моделироваться типовой схемой фазовой автоподстройки частоты (ФАП) 1-го порядка (коэффициент передач фильтра нижних частот в цепи обратной связи равен 1).

Таким образом, синтезированная система представляет собой оценочно-корреляционный обнаружитель, блоком оценки которого служит типовая схема ФАП 1-го порядка. Чтобы получить обнаружитель, схема ФАП дополняется фазовращателем, умножителем (который может быть выполнен, например, при помощи фазового детектора), интегратором и пороговым устройством. Система осуществляет обнаружение, оценку сигнала и его параметра.

13.7.2. Частотно-модулированный радиосигнал

Пример 13.4. Рассмотрим теперь другой практически важный случай, когда полезный сигнал

$$s(x_{1t}, t) = A_0 \sin(\omega_0 t + x_{1t}) \quad (13.110)$$

является частотно-модулированным процессом, для которого изменения фазы и частоты описываются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1t} &= x_{2t}, & \dot{x}_{2t} &= -\gamma x_{2t} + w_t; \\ E(w_t) &= 0, & R_w(\tau) &= q\delta(\tau). \end{aligned} \quad (13.111)$$

Сигнал (13.110), (13.111) может служить моделью доплеровского радиосигнала, при этом рассматриваемая задача может быть использована при решении вопросов обнаружения и измерения скорости движущейся цели.

Применительно к рассматриваемой задаче

$$y_t = A_0 \sin(\omega_0 t + x_{1t}) + n(t),$$

где $n(t)$ — ГБШ с нулевым средним значением и КФ

$$R_n(\tau) = N\delta(\tau); \quad F(t, x_t) = \frac{1}{N} y_t A_0 \sin(\omega_0 t + x_{1t}).$$

В (13.102) $a_1 = x_{2t}$; $a_2 = -\gamma x_{2t}$; $b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0$; $b_{22} = q$;

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{A_0 y_t}{N} \cos(\omega_0 t + x_{1t}); \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0.$$

Тогда по (13.102) получим первые два уравнения следующей системы ДУ, третье уравнение определяется по [51]:

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = \hat{x}_2 + \sigma_1^2 \frac{A_0}{N} y_t \cos(\omega_0 t + \hat{x}_{1t}); \quad (13.112)$$

$$\frac{d\hat{x}_2}{dt} = -\gamma \hat{x}_2 + k \frac{A_0}{N} y_t \cos(\omega_0 t + \hat{x}_{1t});$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y_t}{N} A_0 \sin(\omega_0 t + \hat{x}_{1t}). \quad (13.113)$$

Параметры $\sigma_1^2 = \sigma_1^2(t)$ и $k = k(t)$ находятся из системы ДУ (13.103). В первом ДУ этой системы $b_{11} = 0$; $\partial a_1 / \partial \lambda_1 = 0$; $\partial^2 F / \partial \lambda_2^2 = 0$; $\partial^2 F / \partial \lambda_1 \partial \lambda_2 = 0$; $\partial a_1 / \partial x_2 = 1$; во втором ДУ $b_{22} = q$; $\partial a_2 / \partial \lambda_2 = -\gamma$; $\partial^2 F / \partial \lambda_2^2 = 0$; $\partial^2 F / \partial \lambda_1 \partial \lambda_2 = 0$; $\partial a_2 / \partial \lambda_1 = 0$; в третьем ДУ $b_{12} = 0$; $\partial a_1 / \partial \lambda_1 = 0$; $\partial a_2 / \partial \lambda_2 = -\gamma$; $\partial^2 F / \partial \lambda_2^2 = 0$; $\partial^2 F / \partial \lambda_1 \partial \lambda_2 = 0$; $\partial a_2 / \partial \lambda_1 = 0$; $\partial a_1 / \partial \lambda_2 = 1$.

Следовательно, система ДУ (13.103) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1^2}{dt} &= 2k + \sigma_1^4 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}; \\ \frac{d\sigma_2^2}{dt} &= q - 2\sigma_2^2 \gamma + k^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}; \end{aligned} \quad (13.114)$$

$$\frac{dk}{dt} = -k\gamma + k\sigma_1^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \sigma_2^2.$$

В этой системе ДУ вторая частная производная заменяется на ее среднее значение [17] $\langle \partial^2 F / \partial x_1^2 \rangle = A_0^2 / 2N$. В результате система ДУ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_1^2}{dt} &= 2k - \sigma_1^4 \varkappa; \\ \frac{d\sigma_2^2}{dt} &= q - 2\sigma_2^2 \gamma - k^2 \varkappa; \\ \frac{dk}{dt} &= -k\gamma + \sigma_2^2 - k\sigma_1^2 \varkappa, \end{aligned} \quad (13.115)$$

где $\varkappa = A_0^2 / 2N$.

В стационарном режиме, когда $\frac{d\sigma_1^2}{dt} = \frac{d\sigma_2^2}{dt} = \frac{dk}{dt} = 0$, находится система алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2k - \sigma_1^4 \varkappa &= 0; \\ q - 2\gamma\sigma_2^2 - k^2 \varkappa &= 0; \\ \sigma_2^2 - \gamma k - k\sigma_1^2 \varkappa &= 0. \end{aligned} \quad (13.116)$$

Введем обозначения: $k = d_{12}$; $\sigma_1^2 = d_{11}$; $\sigma_2^2 = d_{22}$; $\varkappa \equiv \rho$; $\gamma \equiv \alpha$; $g \equiv Q$, тогда система уравнений (13.116) приводится к виду [154, система (31.32)]

$$\begin{aligned} 2d_{12} - \rho d_{11}^2 &= 0; \\ d_{22} - \alpha d_{12} - \rho d_{11} d_{12} &= 0; \\ Q - 2\alpha d_{22} - \rho d_{12}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (13.117)$$

Из первого уравнения выразим

$$d_{12} = \frac{\rho d_{11}^2}{2}.$$

С учетом этого из последнего уравнения получим

$$d_{22} = \frac{Q}{2\alpha} - \frac{\rho}{2\alpha} d_{12}^2 = \frac{Q}{2\alpha} - \frac{\rho^3}{8\alpha} d_{11}^4.$$

Подставим найденные значения d_{12} и d_{22} во второе уравнение. В результате находим соотношение

$$\frac{Q}{2\alpha} = \frac{\rho^3}{8\alpha} d_{11}^2 \left(d_{11} + \frac{2\alpha}{\rho} \right)^2,$$

или

$$d_{11}^2 \left(d_{11} + \frac{2\alpha}{\rho} \right)^2 = \frac{4Q}{\rho^3}.$$

Поскольку $d_{22} > 0$, получим

$$d_{11} \left(d_{11} + \frac{2\alpha}{\rho} \right) = \frac{2\sqrt{Q}}{\rho\sqrt{\rho}}, \quad \text{или} \quad d_{11}^2 + \frac{2\alpha}{\rho} d_{11} - \frac{2\sqrt{Q}}{\rho\sqrt{\rho}} = 0.$$

Отсюда

$$d_{11} = -\frac{\alpha}{\rho} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{\rho^2} + \frac{2\sqrt{Q}}{\rho^{3/2}}}.$$

Обозначим $r = \rho/\alpha$, тогда после преобразований получаем

$$d_{11} = \frac{A/r}{1 + \sqrt{1 + A}}; \quad A = 2\sqrt{\rho Q}/\alpha^2.$$

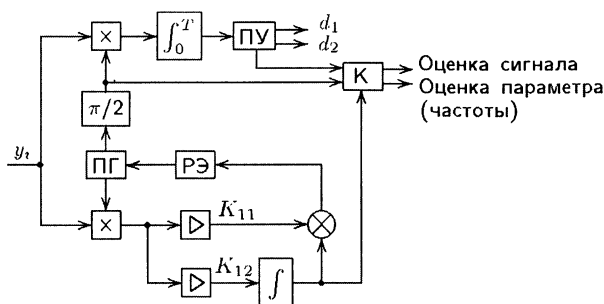


Рис. 13.5

При этом

$$d_{12} = \frac{\rho}{2} d_{11}^2 = \frac{\rho A^2 / 2r^2}{(1 + \sqrt{1 + A})^2} = \frac{2Q/\alpha^2}{(1 + \sqrt{1 + A})^2};$$

$$d_{22} = \frac{Q}{2\alpha} - \frac{\rho}{2\alpha} d_{12}^2 = \frac{Q}{2\alpha} \left(1 - \frac{\rho}{Q} d_{12}^2 \right) = \frac{Q}{2\alpha} \left[1 - \frac{A^2}{(1 + \sqrt{1 + A})^4} \right].$$

При этом алгоритм (13.112), (13.113) приводит к оценочно-корреляционной системе, в которой блок оценки опять моделируется схемой ФАП. В отличие от предыдущего случая (рис. 13.4), здесь цепи обратной связи ФП имеют два канала (см. (13.112)). В одном из них есть интегрирующая цепочка RC, образующая фильтр, который может быть представлен как пропорционально-интегрирующий фильтр [17].

В данном примере изменение частоты представляет собой гауссовский экспоненциально-коррелированный процесс (см. (13.111)). Остановимся на другом частном случае, когда процесс изменения частоты является винеровским процессом. Для этого нужно положить $\gamma = 0$. Соответствующая этому случаю схема системы, моделирующая (13.112), (13.113) ($\gamma = 0$), показана на рис. 13.5 ($k_{11} = \sigma_1^2 = d_{11}$; $k_{12} = \sigma_1^2 = d_{12}$). Блок оценки синтезированного оценочно-корреляционного обнаружителя представляет собой астатическую ФАП. Система наряду с обнаружением формирует оценку радиосигнала, а также оценку его частоты.

Сравним уравнения фильтрации гауссовского приближения [уравнения (3.112)] и фильтра Стратоновича первого порядка для модели наблюдения

$$y_t = A \sin(\omega_0 t + x_1) + n(t), \quad (13.118)$$

где $n(t)$ — ГБШ с нулевым средним значением при КФ $R_n(\tau) = N\delta(\tau)$.

Уравнения сообщения имеют вид (13.111). Запишем эти уравнения в векторно-матричном виде. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, тогда получим

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}w_t, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (13.119)$$

где w_t — ГБШ с нулевым средним значением и КФ $R_w(\tau) = q\delta(\tau)$. Уравнение наблюдения (13.118) имеет вид

$$y_t = s(t, x_1) + n(t) = \mathbf{H}_0 \mathbf{s} + n(t); \\ \mathbf{s} = [s_1, s_2]^T; \quad s_2 = 0; \quad s_1 = s(t, x_1); \quad \mathbf{H}_0 = [1 \quad 0].$$

Уравнения фильтра Стратоновича первого порядка имеют вид [154]

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, t) + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{H}^T(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}} N^{-1} [y_t - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}, t)]; \quad (13.120)$$

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \mathbf{D} + \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{F}^T(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \mathbf{G}q\mathbf{G}^T - \mathbf{D} \left(\frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \right) \frac{1}{N} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} \mathbf{D}. \quad (13.121)$$

В данном случае $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}\mathbf{x}$; $\partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{x} = \mathbf{A}$; $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \mathbf{s} = A_0 \sin(\omega_0 t + x_1) + x_1) \mathbf{H}_0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= A_0 \cos(\omega_0 t + x_1) \mathbf{H}_0; \\ \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{H}^T}{\partial \hat{\mathbf{x}}} &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + x_1) = \\ &= \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix} A_0 \cos(\omega_0 t + x_1) = \boldsymbol{\delta} A_0 \cos(\omega_0 t + x_1); \quad \boldsymbol{\delta} = [d_{11} \quad d_{12}]^T. \end{aligned}$$

В результате по (13.120) получим

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + (A_0/N) \cos(\omega_0 t + x_1) [y_t - A_0 \sin(\omega_0 t + x_1)] \boldsymbol{\delta} = \\ &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + (A_0 y_t / N) \boldsymbol{\delta} \cos(\omega_0 t + x_1) + (A_0 / 2N) \boldsymbol{\delta} \sin[2(\omega_0 t + x_1)]. \end{aligned}$$

Пренебрегая второй гармоникой, получим систему ДУ для оценок \hat{x}_1, \hat{x}_2 в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_1}{dt} &= \hat{x}_2 + d_{11} \frac{A_0}{N} y_t \cos(\omega_0 t + \hat{x}_1); \\ \frac{d\hat{x}_2}{dt} &= -\gamma \hat{x}_2 + d_{12} \frac{A_0}{N} y_t \cos(\omega_0 t + \hat{x}_1). \end{aligned} \quad (13.122)$$

Эти уравнения совпадают с уравнением (13.112) гауссова приближения при $d_{11} = \sigma_1^2$, $d_{12} = k$.

Рассмотрим дисперсионное уравнение (13.121)

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T + q\mathbf{G}\mathbf{G}^T - \frac{1}{N}\delta\mathbf{A}_0 \cos(\omega_0 t + x_1)\delta\mathbf{A}_0 \cos(\omega_0 t + x_1),$$

где

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{A}_1 &= \mathbf{H}_0\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \end{bmatrix}; \quad \delta\delta\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & d_{11}d_{12} \\ d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{G}\mathbf{G}^T &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{A}\mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} & d_{22} \\ -\gamma d_{12} & -\gamma d_{22} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{D}\mathbf{A}^T &= \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{12} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{12} & -\gamma d_{12} \\ d_{22} & -\gamma d_{22} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Пренебрегая второй гармоникой, получаем систему ДУ в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{d}_{11} & \dot{d}_{12} \\ \dot{d}_{12} & \dot{d}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2d_{12} & d_{22} - \gamma d_{12} \\ d_{22} - \gamma d_{12} & -2\gamma d_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} - \frac{A_0^2}{2N} \begin{bmatrix} d_{11}^2 & d_{11}d_{12} \\ d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \end{bmatrix}.$$

Перепишем эту систему в скалярном виде:

$$\begin{aligned}\frac{d(d_{11})}{dt} &= 2d_{12} - \frac{A_0^2}{2N}d_{11}^2; \\ \frac{d(d_{12})}{dt} &= d_{22} - \gamma d_{12} - \frac{A_0^2}{2N}d_{11}d_{12}; \\ \frac{d(d_{22})}{dt} &= q - 2\gamma d_{22} - \frac{A_0^2}{2N}d_{12}^2.\end{aligned}\tag{13.123}$$

Система ДУ (13.123) совпадает с системой ДУ (13.115), так как $d_{11} = \sigma_1^2$; $d_{12} = k$; $d_{22} = \sigma_2^2$. При этом отсутствует необходимость в усреднении величины $\partial^2 F / \partial x_1^2$.

Пример 13.5. Обнаружение замирающего радиосигнала. Рассмотрим задачу обнаружения сигнала $s(t, \lambda(t))$ на фоне ГБШ $n_0(t)$:

$$\xi(t) = \theta s(t, \lambda(t)) + n_0(t), 0 \leq t \leq T, \tag{13.124}$$

где $E[n_0(t)] = 0$; $R_{n_0}(\tau) = (N_0/2)\delta(\tau)$; θ — дискретный информационный параметр, принимающий два значения: 0 или 1 с априорными вероятностями p_0 и p_1 , $p_0 + p_1 = 1$. Полезный сигнал имеет вид

$$s(t, \lambda(t)) = A_0 \cos \omega_0 t + \mathbf{H}(t)\boldsymbol{\lambda}(t), \tag{13.125}$$

где $\mathbf{H}(t) = [\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t]$, $\boldsymbol{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t)]^T$ — вектор независимых сопутствующих параметров, представляющих собой гауссовско-

марковские процессы, заданные уравнениями:

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\alpha\lambda_i + n_i(t); \quad E\{n_i(t)\} = 0; \quad E\{n_i(t)n_i(t+\tau)\} = \frac{N}{2}\delta(\tau), \quad i = 1, 2,$$

или, что то же самое, в векторно-матричном виде

$$d\mathbf{\lambda}/dt = \mathbf{A}(t)\mathbf{\lambda}(t) + \mathbf{n}(t), \quad (13.126)$$

где

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}; \quad \mathbf{n}(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N/2 & 0 \\ 0 & N/2 \end{bmatrix};$$

$$E\{\mathbf{n}(t)\mathbf{n}(t+\tau)\} = \mathbf{N}\delta(\tau).$$

Примем начальные условия для $\mathbf{\lambda}(t)$ нулевыми: $\mathbf{\lambda}(0) = 0$.

Сигнал (13.124) можно представить в другом виде:

$$s(t) = B(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]; \quad B(t) = \sqrt{[A_0 + \lambda_1(t)]^2 + \lambda_2^2(t)};$$

$$\varphi(t) = \text{arctg} \frac{\lambda_2(t)}{A_0 + \lambda_1(t)},$$

где огибающая $B(t)$ распределена по закону Райса, а случайная фаза распределена в интервале $(-\pi, \pi)$.

Так как дискретный параметр θ на интервале наблюдения T постоянный, то совместная апостериорная ПРВ $p(t, \theta, \mathbf{\lambda})$ будет определяться уравнением

$$\frac{\partial p(t, \theta, \mathbf{\lambda})}{\partial t} = L_{pr}\{p(t, \theta, \mathbf{\lambda})\} + [F(t, \theta, \mathbf{\lambda}) - F(t)]p(t, \theta, \mathbf{\lambda}), \quad (13.127)$$

где $L_{pr}\{\cdot\}$ — априорный оператор ФПК для процесса $\mathbf{\lambda}(t)$;

$$F(t, \theta, \mathbf{\lambda}) = \frac{2\xi(t)s(t, \theta, \mathbf{\lambda}) - s^2(t, \theta, \mathbf{\lambda})}{N_0};$$

$$F(t) = \sum_{\theta} \int_{\mathbf{\lambda}} F(t, \theta, \mathbf{\lambda}) p(t, \theta, \mathbf{\lambda}) d\mathbf{\lambda}. \quad (13.128)$$

Представим совместную АПРВ в виде

$$p(t, \theta, \mathbf{\lambda}) = p(t, \theta) p(t, \mathbf{\lambda} | \theta). \quad (13.129)$$

Подставив (13.129) в (13.127) и проинтегрировав обе части уравнения по $\mathbf{\lambda}$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, \theta) = \left[\int_{\mathbf{\lambda}} F(t, \theta, \mathbf{\lambda}) p(t, \mathbf{\lambda} | \theta) d\mathbf{\lambda} - F(t) \right] p(t, \theta). \quad (13.130)$$

Здесь было учтено условие нормировки для $p(t, \mathbf{\lambda} | \theta)$ и получающееся

из него дифференцированием по времени тождество

$$\int L\{p(t, \lambda | \theta)\} d\lambda \equiv 0.$$

С учетом выражения для $F(t, \theta, \lambda)$ (13.127) можно написать

$$\int_{\lambda} F(t, \theta, \lambda) p(t, \lambda | \theta) d\lambda = \frac{1}{N_0} [2\xi(t)\hat{s}(t, \theta) - \hat{s}^2(t, \theta) - R(t, \theta)]. \quad (13.131)$$

Здесь $\hat{s}(t, \theta)$ — апостериорное среднее значение полезного сигнала по сопутствующему параметру λ при фиксированном θ :

$$\hat{s}(t, \theta) = \int_{\lambda} \hat{s}(t, \lambda) p(t, \lambda | \theta) d\lambda = \begin{cases} s(t), & \theta = 1; \\ 0, & \theta = 0; \end{cases} \quad (13.132)$$

$R(t, \theta)$ — дисперсия оценки сигнала при фиксированном θ :

$$R(t, \theta) = \int_{\lambda} [s(t, \theta, \lambda) - \hat{s}(t, \theta)]^2 p(t, \lambda | \theta) d\lambda = \begin{cases} R(t), & \theta = 1; \\ 0, & \theta = 0. \end{cases} \quad (13.133)$$

Подставив (13.131) в (13.130), для апостериорных вероятностей $p_1(t) = p(t, \theta = 1)$ и $p_0(t) = p(t, \theta = 0)$ получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dp_1(t)}{dt} &= \frac{1}{N_0} [2\xi(t)\hat{s}(t) - \hat{s}^2(t) - R(t)] p_1(t) p_0(t); \\ \frac{dp_0(t)}{dt} &= -\frac{1}{N_0} [2\xi(t)\hat{s}(t) - \hat{s}^2(t) - R(t)] p_1(t) p_0(t) \end{aligned} \quad (13.134)$$

с начальными условиями $p_1(0) = p_1$, $p_0(0) = p_0$.

Как известно, решение принимается на основании сравнения с порогом ЛОП $z(t) = \ln[p_1(t)/p_0(t)]$. Для него из (13.134) имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{N_0} [2\xi(t)\hat{s}(t) - \hat{s}^2(t) - R(t)]; \quad z(0) = \ln \frac{p_1}{p_0}. \quad (13.135)$$

Определение величины $z(t = T)$ является основой алгоритма обнаружения сигнала. По критерию минимума вероятности средней ошибки (идеального наблюдателя) оптимальный алгоритм имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{N_0} \int_0^T [2\xi(t)\hat{s}(t) - \hat{s}^2(t) - R(t)] dt > \ln \frac{p_0}{p_1} = h; \quad \hat{\theta} = 1; \\ \frac{1}{N_0} \int_0^T [2\xi(t)\hat{s}(t) - \hat{s}^2(t) - R(t)] dt < \ln \frac{p_0}{p_1} = h; \quad \hat{\theta} = 0. \end{aligned} \quad (13.136)$$

Этот алгоритм будет оптимальным и по критерию Неймана–Пирсона, если выбрать соответствующий порог h .

Как следует из (13.132), для нахождения $\hat{s}(t)$ необходимо знать

ПРВ $p(t, \lambda | \theta)$. Для нее путем подстановки (13.129) в (13.127) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dp(t, \lambda | \theta)}{dt} = & L_{pr}\{p(t, \lambda, \theta)\} + \\ & + \left[F(t, \theta, \lambda) - \int_{\lambda} F(t, \theta, \lambda) p(t, \lambda | \theta) d\lambda \right] p(t, \lambda | \theta). \end{aligned} \quad (13.137)$$

В рассматриваемом примере плотность вероятности $p(t, \lambda | \theta)$ является нормальной, так как $\lambda(t)$ есть гауссовский процесс и он входит в уравнения наблюдения (13.124) и сообщения (13.126) линейно. Если опустить слагаемые с удвоенной частотой $2\omega_0$, то для вектора среднего значения $\hat{\lambda}(t)$ и корреляционной матрицы ошибок оценок $\mathbf{D}(t)$ получим уравнения:

$$\frac{d\hat{\lambda}(t)}{dt} = \mathbf{A}\hat{\lambda} + \frac{2}{N_0} \mathbf{D}\mathbf{H}^T[\xi(t) - \mathbf{H}\lambda - A_0 \cos(\omega_0 t,)]; \quad (13.138)$$

$$\frac{d\mathbf{D}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{A}^T - \frac{2}{N_0} \mathbf{D}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{D} + \mathbf{N}. \quad (13.139)$$

Рассмотрим решение дисперсионного уравнения (13.139). Учтем, что матрица $\mathbf{A} = -\alpha\mathbf{I}$ (\mathbf{I} — единичная матрица), тогда $\mathbf{A}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{A}^T = -\alpha\mathbf{D}$. Кроме того, пренебрегая вторыми гармониками, получим произведение $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ в виде матрицы $\mathbf{H}^T\mathbf{H} = \frac{1}{2}\mathbf{I}$. В результате систему ДУ (13.139) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = -2\alpha\mathbf{D} - \frac{1}{N_0}\mathbf{D}^2 + \mathbf{N},$$

где $\mathbf{N} = (N/2)\mathbf{I}$.

Запишем эту систему ДУ в скалярном виде:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{d}_{11} & \dot{d}_{12} \\ \dot{d}_{21} & \dot{d}_{22} \end{bmatrix} = & -2\alpha \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} - \\ - \frac{1}{N_0} \begin{bmatrix} d_{11}^2 + d_{12}^2 & d_{12}(d_{11} + d_{22}) \\ d_{12}(d_{11} + d_{22}) & d_{12}^2 + d_{22}^2 \end{bmatrix} + & \frac{N}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \frac{d(d_{11})}{dt} = & -2\alpha d_{11} - \frac{1}{N_0}(d_{11}^2 + d_{12}^2) + \frac{N}{2}; \\ \frac{d(d_{12})}{dt} = & -2\alpha d_{12} - \frac{1}{N_0}d_{12}(d_{11} + d_{22}); \\ \frac{d(d_{22})}{dt} = & -2\alpha d_{22} - \frac{1}{N_0}(d_{22}^2 + d_{12}^2) + \frac{N}{2}. \end{aligned} \quad (13.140)$$

Таким образом, в стационарном режиме

$$d_{12} = 0; \quad d_{11} = d_{22} = \alpha N_0(\sqrt{1 + 2d/\alpha N_0} - 1) = R, \quad (13.141)$$

где $d = N/4\alpha$; R совпадает с дисперсией (13.133) оценки сигнала.

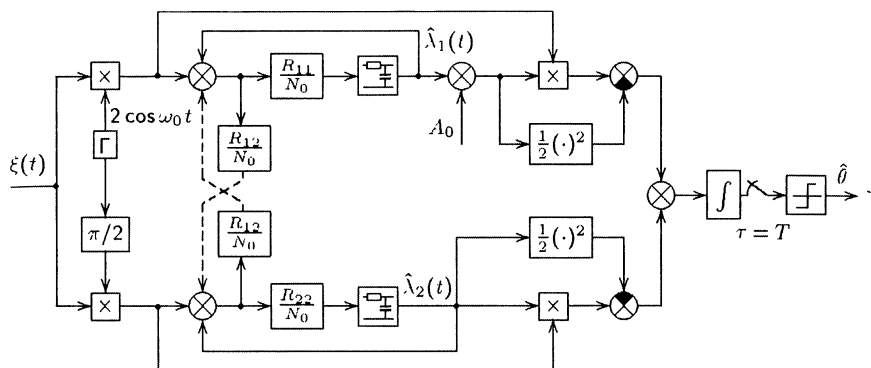


Рис. 13.6

Структурная схема оптимального обнаружителя замирающего радиосигнала (13.125), реализующая алгоритм (13.136), (13.138), изображена на рис. 13.6. Схема состоит из двух квадратурных каналов, связанных между собой через параметр R_{12} . Однако в стационарном режиме работы эта связь исчезает ($R_{12} = 0$).

Аналитический расчет характеристик обнаружения полученного оптимального обнаружителя является довольно сложной и трудоемкой задачей. Его удастся выполнить, например, в том случае, когда случайный процесс $z(t)$ является приближенно одномерным марковским диффузионным [51]. Для рассматриваемого примера это выполняется, если интервал корреляции процесса $\lambda(t)$ много меньше интервала наблюдения T (быстрые замирания сигнала). В общем случае эти формулы имеют вид [51, ф-ла (8.2.36)]

$$Q_0 = \alpha = Q(u_0); \quad Q_d = Q(u_1),$$

где

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du; \quad u_0 = \frac{h - TM_0}{\sqrt{K_0 T}}; \quad u_1 = \frac{h - TM_1}{\sqrt{K_1 T}}.$$

Коэффициенты TM_0 , TM_1 , TK_0 , TK_1 суть «приближенные средние значения при использовании гауссовской аппроксимации ПРВ $W(Z_T | \theta = 0)$ и $W(Z_T | \theta = 1)$ и дисперсии СВ $Z = Z_T$ (при $\theta = 0$ и 1 соответственно)» [51].

Окончательные формулы для ВЛТ Q_0 и вероятности обнаружения Q_d следующие [56]:

$$Q_0 = 1 - \Phi(u_0); \quad Q_d = 1 - \Phi(u_1), \quad (13.142)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du$;

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{h - a_0 T}{\sqrt{b_0 T}}; \quad u_1 = \frac{h - a_1 T}{\sqrt{b_1 T}}; \\ a_0 &= -\frac{A_0^2}{2N_0} \left(1 - \frac{R}{\gamma N_0}\right)^2 - \frac{R^2}{2\gamma N_0^2}; \quad \lambda = \alpha + \frac{R}{N_0}; \\ a_1 &= \frac{A_0^2}{2N_0} - \frac{R^2}{2\gamma N_0^2} + \frac{dR}{\gamma N_0^2}; \\ b_0 &= \frac{A_0^2}{N_0} \left(1 - \frac{R}{\gamma N_0}\right)^4 + \frac{R^2}{\gamma N_0^2} \left(1 - \frac{R}{2\gamma N_0^2}\right)^2; \\ b_1 &= b_0 + \frac{2dR}{(\alpha + \gamma)N_0^2} \left[1 + \frac{d}{\alpha N_0} - \frac{dR}{2\alpha(\alpha + \gamma)N_0^2}\right]. \end{aligned}$$

Выражения для коэффициентов a_i , b_i , $i = 0, 1$, можно упростить, если воспользоваться условием

$$d/\alpha N_0 \ll 1$$

или эквивалентным условием

$$2(dT/N_0)/\alpha T \ll 1.$$

Тогда по (13.141) находим $R \approx d$. В этом случае

$$\gamma = \alpha(1 - d/\alpha N_0) \approx \alpha.$$

В результате получим

$$a_0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{A_0^2 T}{N_0} + \frac{d^2}{\alpha N_0^2} \right) = a_1; \quad b_0 = \frac{A_0^2}{N_0} + \frac{d^2}{\alpha N_0^2} = b_1 = 2a_1. \quad (13.143)$$

Таким образом, выполняется условие [51, Ф-ла (8.2.66)].

$$a_1 = -a_0 = 0,5b_0 = 0,5b_1.$$

Подставляя найденные приближенные (при $\alpha T \gg 1$) соотношения (13.143) в (13.142), получим

$$Q_0 = Q(x) = 1 - \Phi(x); \quad Q_d = Q(x - q_1) = 1 - \Phi(x - q_1),$$

где

$$q_1 = \frac{2a_1 T}{\sqrt{b_1 T}} = \frac{2a_1}{b_1} \sqrt{b_1 T} = \sqrt{\frac{A_0^2 T}{N_0} + \frac{d^2}{\alpha N_0^2}}.$$

Следовательно, снова выполняется условие [51, Ф-ла (8.2.66)]

$$a_1 = -a_0 = 0,5b_0 = 0,5b_1 = \frac{q_1^2}{2T}.$$

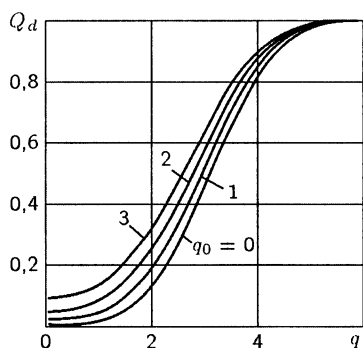


Рис. 13.7

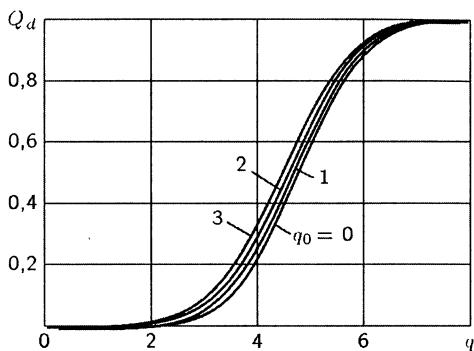


Рис. 13.8

Запишем ОСШ q_1 в виде $q_1 = \sqrt{q^2 + q_0}$.

На рис. 13.7 изображены характеристики обнаружения $Q_d = Q_d(q)$ при $Q_0 = 10^{-3}$, когда $x = 3,09 = Q^{-1}(Q_0)$, или $x = \Phi^{-1}(1 - Q_0)$. Параметром кривых обнаружения служит величина $q_0 = 0; 1; 2; 3$. Как и следовало ожидать, увеличение отношения q_0 при фиксированном значении ОСШ q улучшает обнаруживаемость исследуемого в данной задаче сигнала. Аналогичные кривые обнаружения приведены на рис. 13.8 при ВЛТ $Q_0 = 10^{-6}$.

14 Обнаружители с постоянным уровнем ложной тревоги

14.1. Классические модели обнаружителей

Рассмотрим вначале алгоритм классического обнаружителя одиночного сигнала, принимаемого на фоне узкополосного гауссовского шума, полагая, что сигнал отражен от нефлуктуирующей цели. Обозначим смесь сигнала и шума величиной $\nu(t)$.

Тогда, положив порог, равный T , и взяв некоторую статистику $D(\nu)$, алгоритм обнаружителя сигнала можно сформулировать в виде:

а) при $D(\nu) \geq T$ принимается решение D_1 : сигнал (цель) присутствует в интервале наблюдения;

б) при $D(\nu) < T$ сигнал (цель) отсутствует в интервале наблюдения (принимается решение D_0).

Будем полагать, что в качестве детектора используется детектор огибающей, которая в интервале наблюдения формируется из откликов двух фильтров, согласованных для синфазной и квадратурной составляющих принимаемого сигнала.

При отсутствии сигнала (цели) в интервале наблюдения СВ $D(\nu)$ представляет собой огибающую помехи. Тогда вероятность ложной тревоги

$$\alpha = Q_0 = P\{D(\nu) \geq T \mid H_0\} = \int_T^\infty W_0(x) dx, \quad (14.1)$$

где $W_0(x)$ — ПРВ СВ $D_0(\nu)$.

Порог T находится по (14.1) при заданной ВЛТ Q_0 .

Вероятность обнаружения имеет вид

$$\gamma = Q_d = P\{D(\nu) \geq T \mid H_1\} = \int_{T(\alpha)}^\infty W_1(x) dx, \quad (14.2)$$

где $W_1(x)$ — ПРВ СВ $D_1(\nu)$ при условии, что сигнал (цель) присутствует в интервале наблюдения.

При сформулированном условии приема, если сигнал отсутствует, то огибающая шума имеет распределение Релея

$$W_0(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x \geq 0, \quad (14.3)$$

где σ — параметр закона Релея; σ^2 — дисперсия входного гауссовского узкополосного шума.

В результате по (14.1) находим

$$Q_0 = \int_T^\infty \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} dx = \int_{T^2/2\sigma^2}^\infty e^{-y} dy = -e^{-y}|_{T^2/2\sigma^2}^\infty = e^{-T^2/2\sigma^2}. \quad (14.4)$$

Отсюда находим значение порога

$$T = \sigma \sqrt{2 \ln(1/\alpha)}. \quad (14.5)$$

Известно (см. Приложение 1), что среднее значение СВ, распределенной по закону Релея, равно

$$m_1 = \sigma \sqrt{\pi/2} = E[D_0(\nu)].$$

Следовательно, величину порога (14.3) можно выразить в виде

$$T = E[D_0(\nu)] \sqrt{\frac{4}{\pi} \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right)}. \quad (14.6)$$

Для того чтобы получить конкретное выражение для статистики $D(\nu)$, рассмотрим логарифм ОП (ЛОП) (3.41) для одиночного радиоимпульса

$$l(\nu) = -q + \frac{2}{N_0} \int_0^{T_0} \nu(t)s(t) dt, \quad (14.7)$$

где $q = \mathcal{E}/N_0$ — ОСШ; $N_0/2$ — двухсторонний энергетический спектр шума, $\mathcal{E} = \int_0^T s^2(t) dt$ — энергия сигнала; $[0, T_0]$ — интервал наблюдения.

Пусть радиоимпульс имеет вид

$$s(t) = Aa(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t) + \varphi], \quad 0 < t \leq T_0, \quad (14.8)$$

где A , $a(t)$, $\theta(t)$, T_0 , ω_0 — известные величины; φ — СВ, равномерно распределенная на интервале $(0, 2\pi)$.

Введем обозначения

$$u_c(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \theta(t)]; \quad u_s(t) = a(t) \sin[\omega_0 t + \theta(t)]. \quad (14.9)$$

Тогда сигнал $s(t)$ принимает вид

$$s(t) = Au_c \cos \varphi - Au_s \sin \varphi, \quad (14.10)$$

причем $u_c(t)$ и $u_s(t)$ называются квадратурными составляющими сигнала.

Энергия сигнала

$$\mathcal{E} = A^2 \int_0^{T_0} u_c^2(t) dt = A^2 \int_0^{T_0} u_s^2(t) dt.$$

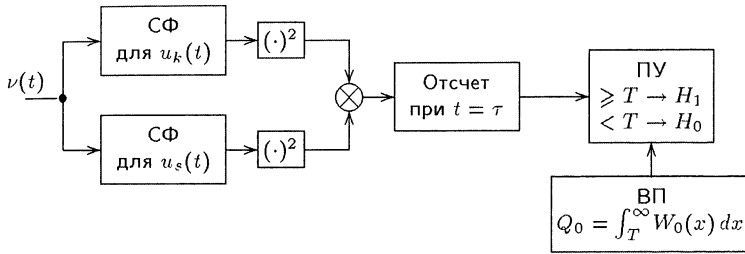


Рис. 14.1

Пусть

$$\varepsilon = \int_0^{T_0} u_c^2(t) dt = \int_0^{T_0} u_s^2(t) dt,$$

тогда

$$\Xi = A^2 \varepsilon. \quad (14.11)$$

Подставив $s(t)$ (14.8) в (14.7), получим

$$l(\nu | \varphi) = -q + \left(\frac{2A}{N_0} \int_0^{T_0} \nu(t) u_c(t) dt \right) \cos \varphi - \left(\frac{2A}{N_0} \int_0^{T_0} \nu(t) u_s(t) dt \right) \sin \varphi.$$

Обозначим интегралы

$$I(\nu) = k \int_0^{T_0} \nu(t) u_c(t) dt; \quad Q(\nu) = k \int_0^{T_0} \nu(t) u_s(t) dt, \quad (14.12)$$

где $I(\nu)$ и $Q(\nu)$ — отклики фильтров, согласованных для $u_c(t)$ и $u_s(t)$, с коэффициентами усиления k (рис. 14.1).

На рис. 14.1 ПУ — пороговое устройство; ВП — вычислитель порога.

Положим

$$D(\nu) = \sqrt{I^2(\nu) + Q^2(\nu)}, \quad \alpha(\nu) = \arctg[Q(\nu)/I(\nu)]. \quad (14.13)$$

Тогда ЛОП

$$\begin{aligned} l(\nu | \varphi) &= -q + \frac{2A}{kN_0} [I(\nu) \cos \varphi - Q(\nu) \sin \varphi] = \\ &= -q + \frac{2A}{kN_0} \sqrt{I^2(\nu) + Q^2(\nu)} \cos[\varphi + \alpha(\nu)] = -q + \frac{2A}{kN_0} D(\nu) \cos[\varphi + \alpha(\nu)]. \end{aligned}$$

Введем ОП $\Lambda(\nu | \varphi) = e^{l(\nu)}$ и усредним ОП с весом ПРВ $W(\varphi) = 1/(2\pi)$. Тогда получим

$$\Lambda(\nu) = E[\Lambda(\nu | \varphi)] = \int_0^{2\pi} e^{-q} \exp \left\{ \frac{2A}{kN_0} D(\nu) \cos[\varphi + \alpha(\nu)] \right\} W(\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-q} \exp \left\{ \frac{2A}{kN_0} D(\nu) \cos[\varphi + \alpha(\nu)] \right\} d\varphi = e^{-q} I_0 \left[\frac{2A}{kN_0} D(\nu) \right]. \quad (14.14)$$

Здесь $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка

$$I_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{r \cos(\theta + \xi)} d\theta.$$

В результате приходим к решающему правилу:

$$\begin{aligned} H_1: I_0 \left[\frac{2A}{kN_0} D(\nu) \right] &\geq e^q k — \text{цель (сигнал) присутствует;} \\ H_0: I_0 \left[\frac{2A}{kN_0} D(\nu) \right] &< e^q k — \text{цель (сигнал) отсутствует,} \end{aligned}$$

где величина k определяется значением (1.10) $k = \Lambda_0 = \pi_0 C_0 / (\pi_1 C_1)$.

В силу монотонности функции $I_0(r)$ решающее правило можно сформулировать в виде

$$\begin{aligned} D(\nu) &\geq T \Leftrightarrow \Lambda(\nu) \geq k, \\ D(\nu) &< T \Leftrightarrow \Lambda(\nu) < k. \end{aligned}$$

Следовательно, байесовское правило сводится к сравнению с порогом T :

— цель (сигнал) присутствует, если

$$D(\nu) \geq T; \quad (14.15)$$

— цель (сигнал) отсутствует, если

$$D(\nu) < T.$$

Замечание 1. Обнаружитель с правилом решения (4.15) (см. рис. 14.1) называется линейным обнаружителем (детектором) однократного радиоимпульса (англ.: single pulse linear detector).

Поскольку $n(t)$ — гауссовский СП, то величины $I(\nu)$ и $Q(\nu)$ подчинены нормальному распределению $N(0, \sigma^2)$, так как

$$E[I(\nu)] = E[Q(\nu)] = 0.$$

Найдем величину дисперсии $\sigma^2 = \text{var } I(\nu)$:

$$\begin{aligned} \text{var } I(\nu) &= k^2 E \left[\int_0^{T_0} n(t) u_c(t) dt \int_0^{T_0} n(\alpha) u_c(\alpha) d\alpha \right] = \\ &= k^2 \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} E[n(t)n(\alpha)] u_c(t) u_c(\alpha) dt d\alpha = \end{aligned}$$

$$= \frac{N_0}{2} k^2 \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} \delta(t-\alpha) u_c(t) u_c(\alpha) dt d\alpha = \frac{N_0}{2} k^2 \int_0^{T_0} u_c^2(t) dt = \frac{N_0 k^2 \varepsilon}{2}.$$

Аналогично получим

$$\text{var } Q(\nu) = \frac{N_0 k^2 \varepsilon}{2}.$$

Покажем, что СВ $I(\nu)$ и $Q(\nu)$ некоррелированы:

$$\begin{aligned} K_{IQ} &= R_{IQ} = \\ &= E[I(\nu)Q(\nu)] = k^2 E \left[\int_0^{T_0} n(t) u_c(t) dt \int_0^{T_0} n(\alpha) u_s(\alpha) d\alpha \right] = \\ &= k^2 \int_0^{T_0} \int_0^{T_0} E[n(t)n(\alpha)] u_c(t) u_s(\alpha) dt d\alpha = \frac{N_0}{2} k^2 \int_0^{T_0} u_c(t) u_s(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, СВ $I(\nu)$ и $Q(\nu)$ независимы. Поэтому их совместная ПРВ

$$W_{I,Q}(x, y) = W_I(x) W_Q(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right).$$

Отсюда следует [154], что СВ $D(\nu)$ подчиняется распределению Релея (14.3) с параметром

$$\sigma = k\sqrt{N_0\varepsilon/2}. \quad (14.16)$$

При этом согласно (14.4) ВЛТ

$$\alpha = Q_0 = \exp(-T^2/N_0 k^2 \varepsilon) \quad (14.17)$$

и по (14.5) определяется порог

$$T = \sqrt{N_0 k^2 \varepsilon \ln(1/\alpha)}. \quad (14.18)$$

Можно показать [156] (рис. 14.2), что небольшие изменения в спектральной плотности N_0 (или параметра $\sigma = k\sqrt{N_0\varepsilon/2}$) приводят к значительным изменениям ВЛТ $Q_0 = \alpha$.

Процесс стабилизации ВЛТ сопровождается в свою очередь потерями, которые, однако, не превосходят 3 дБ при больших объемах выборки (при большой длине окна K).

Вероятность обнаружения Q_d определяется формулой

$$Q_d = \int_{\mu}^{\infty} x e^{-(x^2+d^2)/2} I_0(dx) dx = Q(d, \mu), \quad (14.19)$$

где $Q(d, \mu)$ — Q -функция Маркума; $\mu = \sqrt{2 \ln(1/Q_0)}$.

Как и в случае (7.14), вероятности обнаружения можно придать

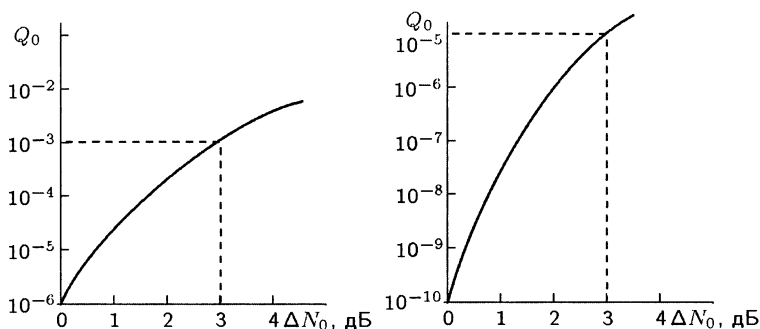


Рис. 14.2

вид

$$Q_d = Q_{\chi^2_2(d)} \left(2 \ln \frac{1}{Q_0} \right) \quad (14.20)$$

где d — коэффициент нецентральности $\chi^2_2(d)$ распределения (см. приложение 1).

Кривые обнаружения $Q_d(d)$ при $Q_0 = \text{const}$ ($Q_0 = 10^{-n}$, $n = \overline{1, 7}$) изображены на рис. 14.2.

При одиночном радиоимпульсе и гауссовском СП в аддитивной смеси сигнала и шума на входе квадратичного детектора (КД) на его выходе (после ФНЧ) процесс имеет показательные распределения (см. гл. 12, п. 12.1, а также [154, лекция 5])

$$\begin{aligned} W_0(x) &= \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda = 1/a\sigma^2, \quad a = \text{const}, \\ W_1(x) &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, \quad \lambda_1 = 1/a\sigma^2(1 + \bar{d}) = \lambda/(1 + \bar{d}), \end{aligned} \quad (14.21)$$

где $\bar{d} = \sigma_s^2/\sigma^2$ — ОСШ.

При отсутствии ПУЛТ-процессора при фиксированной величине порога T и релеевском законе распределения огибающей ВЛТ Q_0 и вероятность обнаружения Q_d согласно (14.21) выражаются в виде

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int_T^\infty W_0(z) dz = e^{-\lambda T}; \\ Q_d &= \int_T^\infty W_1(z) dz = e^{-\lambda_1 T} = Q_0^{1/(1+\bar{d})}. \end{aligned} \quad (14.22)$$

Отсюда находим ОСШ

$$\bar{d} = \frac{\ln(Q_0/Q_d)}{\ln Q_d}. \quad (14.23)$$

Зависимости $Q_d(\bar{d})$ при $Q_0 = 10^{-n}$, $n = 2, 4, 6$, изображены на рис. 14.3.

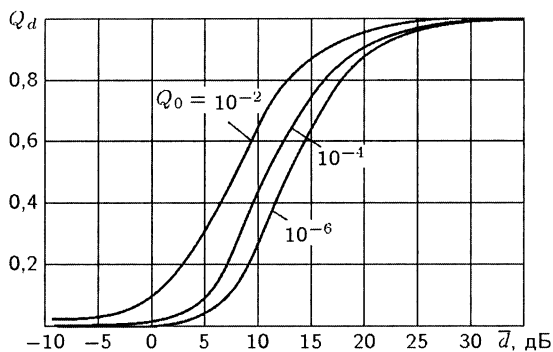


Рис. 14.3

14.2. Обнаружители с постоянным уровнем ложной тревоги с релейским распределением помех

Обнаружитель с постоянным уровнем ложной тревоги по терминологии П.А. Бакулева [30, 31, 158] сокращенно называется ПУЛТ-процессор (ПУЛТ — постоянный уровень ложной тревоги) (англ.: constant false alarm rate (CFAR) processor).

Основное назначение ПУЛТ-процессоров при релейских помехах, когда параметр σ или неизвестен или меняется во времени, — обеспечить оценку порога обнаружения T таким образом, чтобы обнаружение сигнала происходило с относительно неизменной ВЛТ Q_0 .

Рассмотрим вначале наиболее широко распространенный вид ПУЛТ-процессора, а именно, ПУЛТ-процессор с усреднением (УС ПУЛТ [30, 31, 156–158], англ.: CA CFAR, CA-cell-averaging).

Как было показано [см. (14.10)], величина порога T при обнаружении сигнала со случайной начальной фазой на фоне ГБШ определяется равенством (при линейном детектировании)

$$T = E(D_0) \sqrt{\frac{4}{\pi} \ln \left(\frac{1}{Q_0} \right)}. \quad (14.24)$$

Однако, если интенсивность помехи неизвестна, то среднее значение $E(D_0)$ заменяется на выборочное среднее отсчетов статистики $D = D(\nu)$:

$$E'(D_0) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K D_i, \quad (14.25)$$

где D_i , $i = \overline{1, K}$, — статистики, формируемые в элементах разрешения, которые предшествуют, следуют за и окружают так называемый анализируемый элемент; K — размер ПУЛТ-окна (рис. 14.4).

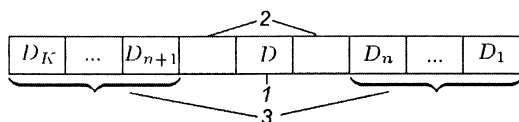


Рис. 14.4

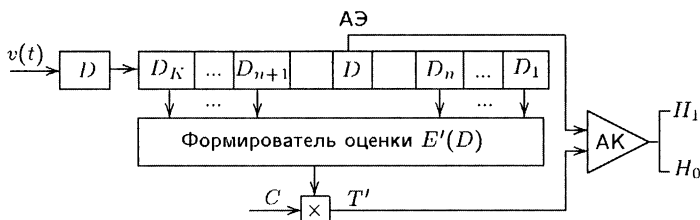


Рис. 14.5

На рис. 14.4 1 — анализируемый элемент (test cell); 2 — защитные элементы (ячейки, guard cell); 3 — опорные элементы окна (элементы разрешения, reference window cell).

Схематично УС ПУЛТ можно представить в виде рис. 14.5 (Д — детектор, АК — амплитудный компаратор, АЭ — анализируемый элемент, С — скалярный множитель). После детектора отсчеты статистик поступают на линию задержки (сдвигающий регистр). Регистр сдвига записывает уровень отраженных сигналов и помех в ячейках (дальности) и далее усредняются значения ячеек (элементов разрешения), прилегающих к ячейке с целью (см. D на рис. 14.5).

Таким образом, правило различения альтернативных гипотез отсутствия (H_0) и наличия (H_1) сигнала имеет вид

$$\begin{aligned} H_1: D &> T' C; \\ H_0: D &< T' C, \end{aligned} \quad (14.26)$$

где D — решающая статистика — элемент выборки в центральном (анализируемом) элементе (АЭ) ПУЛТ-окна.

Для исключения влияния сигнала (от цели) на формирование оценки $E(D_0)$ УС ПУЛТ-процессоры не используют анализируемый и соседние с ним «защитные» элементы ПУЛТ-окна, чтобы гарантировать независимость статистик D_i , и их одинаковые распределения.

В качестве детектора Д в УС ПУЛТ-процессоре может быть использован линейный детектор (рис. 14.6), квадратичный или логарифмический детекторы.

На рис. 14.6 изображена схема УС ПУЛТ процессора с линейным детектором ЛД при помехе с распределением Релея при приеме одиночного радиоимпульса, на рис. 14.6 заштрихованы защитные элементы ПУЛТ окна: ФС — формирователь статистик I_i и Q_i ; АК — амплитудный компаратор.

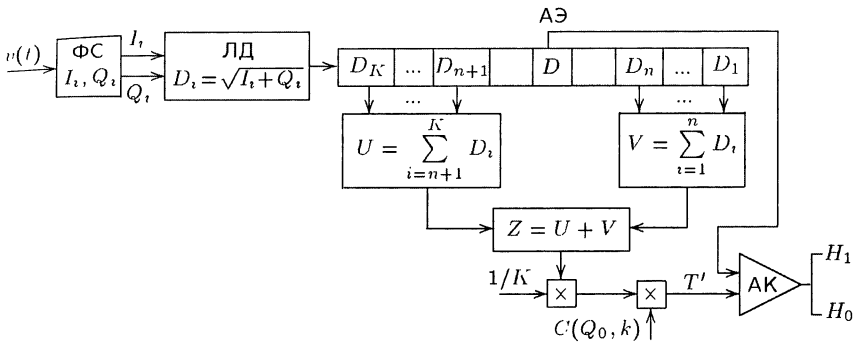


Рис. 14.6

В УС ПУЛТ-процессоре порог T' определяется произведением

$$T' = E'(D_0)C(Q_0, K), \quad (14.27)$$

где $E'(D_0) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K D_i$; $C(Q_0, K)$ — скалярный множитель, зависящий только от ВЛТ $\alpha = Q_0$ и длины окна K . Этот множитель не зависит от неизвестного параметра σ распределения Релея.

Справедливо предельное соотношение

$$\lim_{K \rightarrow \infty} C(Q_0, K) = \sqrt{\frac{4}{\pi} \ln \left(\frac{1}{Q_0} \right)}. \quad (14.28)$$

При конечных значениях K величина множителя $C(Q_0, K)$ больше его значения на бесконечности: $C(Q_0, K) > C(Q_0, \infty)$.

Зависимость ВЛТ Q_0 от величины $C(Q_0, K)$ изображена на рис. 14.7 [156]. Эта зависимость имеет вид [156]

$$Q_0 = \frac{1}{2\pi} \delta \int_0^\infty e^{-x^2/2} \int_{-\infty}^\infty [G(\tau)]^K e^{-i\tau x \delta} d\tau dx, \quad (14.29)$$

где $\delta = K/C(Q_0, K)$; $G(\tau) = \int_0^\infty y e^{-y^2/2} [\cos \tau y + i \sin \tau y] dy$.

Зависимость вероятности обнаружения Q_d от отношения сигнал/помеха $d_1 = k^2 A^2 \varepsilon^2 / 2\sigma^2$ и величины ПУЛТ-окна K изображены на рис. 14.8 и 14.9 при ВЛТ $Q_0 = 10^{-4}$ и $Q_0 = 10^{-8}$ соответственно [159].

Критерием сравнения ПУЛТ процессоров являются потери в отношении сигнал/помеха по сравнению с асимптотически (при $K \rightarrow \infty$) оптимальным ПУЛТ-процессором. Потери Π зависят от длины K ПУЛТ-окна, ВЛТ Q_0 и вероятности обнаружения Q_d . На рис. 14.10 и 14.11 приведены потери УС ПУЛТ-процессора для релейского распределения амплитуд помехи при $Q_0 = 10^{-4}$ (рис. 14.10) и $Q_0 = 10^{-6}$ (рис. 14.11) [156].

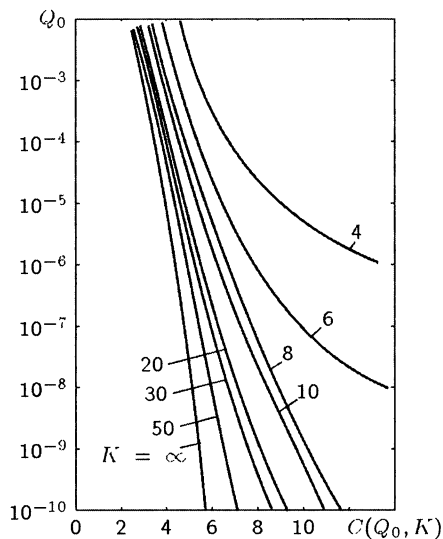


Рис. 14.7

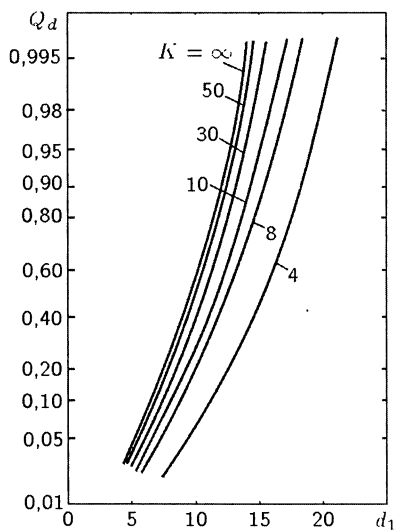


Рис. 14.8

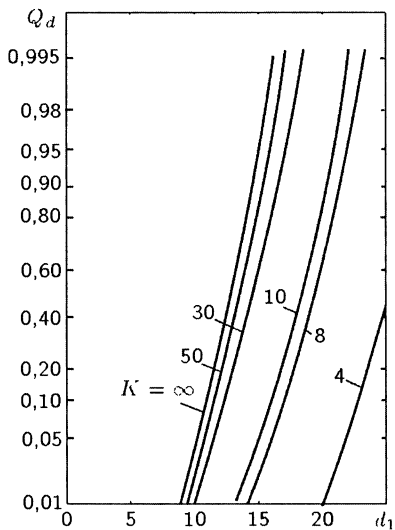


Рис. 14.9

Задаваясь вероятностями Q_0 , Q_d и допустимым уровнем потерь, можно выбрать необходимую длину K УС ПУЛТ-окна.

В [159] приводится универсальная кривая Хансена УС ПУЛТ-потерь в зависимости от универсального показателя $\delta = n/m_3$, где $n = -\lg Q_0$ — показатель степени ВЛТ $Q_0 = 10^{-n}$ (рис. 14.12).

Пусть K — длина УС ПУЛТ-окна, тогда $m_3 = K$ для квадратич-

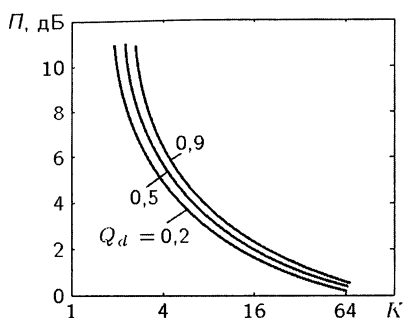


Рис. 14.10

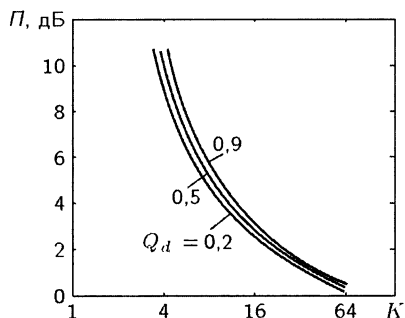


Рис. 14.11

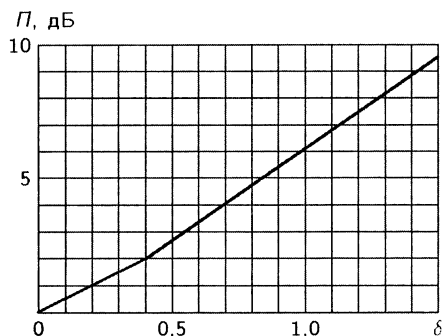


Рис. 14.12

ного детектора. В более общем случае

$$m_{\Sigma} = (K + l)/(1 + l), \quad (14.30)$$

где $l = 0,09$ для линейного детектора (детектора огибающей); $l = 0,65$ для логарифмического детектора. Так, например, при $Q_0 = 10^{-4}$ и $m = 8$ (при $\delta = 0,5$) получим $P < 3$ дБ.

При анализе УС ПУЛТ-процессоров использовалось предположение, что помеха однородная и стационарная в пределах ПУЛТ-окна (модель 1 [31]). Если помеха неоднородная по мощности в пределах ПУЛТ-окна (модель 2 [31]), то обычные УС ПУЛТ-процессоры имеют недопустимо большие потери и не обеспечивают постоянного уровня ложных тревог [31]. Это же относится и к помехе, однородной с мешающими целями в ПУЛТ-окне (модель 3 [31]).

Действие неоднородных помех и помех модели 3 [31] можно минимизировать, если модифицировать УС ПУЛТ процессоры. Три модификации ПУЛТ процессоров наиболее известны. Две из них характеризуются логикой на элементах ПУЛТ окна (второй класс ПУЛТ процессоров [31]). Одна из них — это ПУЛТ процессоры с выбором «большого из» (БИ ПУЛТ) (англ.: GO CFAR, GO — greatest

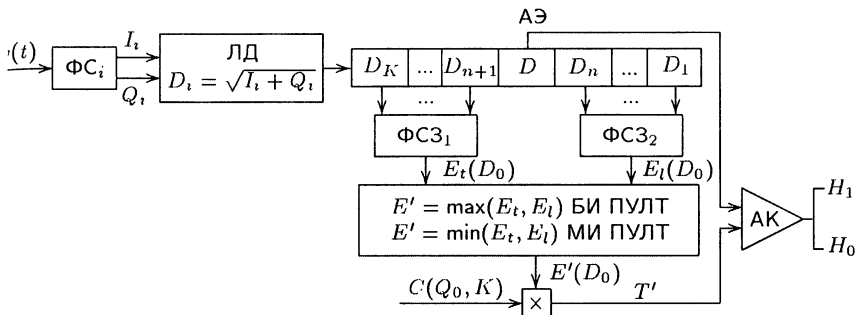


Рис. 14.13

of CFAR), другая с выбором «меньшего из» (МИ ПУЛТ) (англ.: SO CFAR, SO — smallest of CFAR).

Третья модификация известна как ПУЛТ-процессоры на основе порядковой статистики (ПС ПУЛТ-процессоры, англ.: OS CFAR, OS — order statistic CFAR).

На рис. 14.13 приведена схема БИ ПУЛТ- и МИ ПУЛТ-процессоров. В том и другом процессоре ячейки регистра делятся на два плеча: до анализируемого элемента (АЭ) и последнего по M ячеек в каждом плече. В каждом из них формируются средние значения

$$E_t(D_0) = \frac{1}{M} \sum_{i=M+1}^K D_i; \quad E_l(D_0) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n=M} D_i, \quad K = 2M.$$

На рис. 14.13 ΦC_i — формирователь статистик I_i и Q_i i -й ячейки; ЛД — линейный детектор (формирует статистику $D_i = \sqrt{I_i^2 + Q_i^2}$); ФЗС — формирователь среднего значения.

Потери БИ ПУЛТ-процессора на 0,1...0,3 дБ больше потерь в УС ПУЛТ-процессоре при использовании модели 1 помехи [31], этот процессор стабилизирует заданный уровень ложной тревоги при использовании моделей 2 и 3 помехи.

Потери БИ ПУЛТ-процессора можно рассчитывать по универсальной кривой Хансена (см. рис. 14.12), полагая в (14.30) $l = 0,37$ для квадратичного детектора, $l = 0,5$ для детектора огибающей, $l = 1,26$ для логарифмического детектора.

Эффект маскировки обнаруживаемой цели кромкой помехи и мешающими целями БИ ПУЛТ процессоры не устраняют [31].

Ослабить эффект маскировки цели позволяет МИ ПУЛТ-процессор (см. рис. 14.13). Этот процессор исключает эффект маскировки цели для моделей помех 2 и 3, когда мешающие цели сосредоточены в одном из полуокон, поскольку МИ-логика устраняет мешающие цели и кромку помехи, как аномальные выбросы.

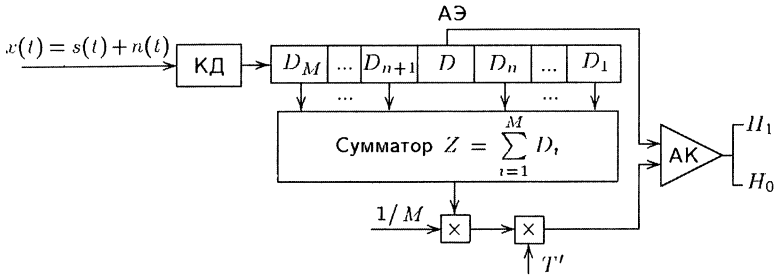


Рис. 14.14

Рассмотрим УС ПУЛ-процессор при реелевской помехе и квадратичном детекторе на входе (рис. 14.14).

Если в схеме рис. 14.14 величину $1/M$ отнести к порогу $T = T'/M$, то правило различения альтернативных гипотез (14.26) принимает вид

$$\begin{aligned} H_1: D &> TZ, \\ H_0: D &< TZ. \end{aligned} \quad (14.31)$$

Тогда вероятность обнаружения

$$Q_d = \int_0^\infty P\{D > TZ \mid z, H_1\} W_1(x) dx = E_z[P(D > TZ \mid Z, H_1)]. \quad (14.32)$$

Подставляя в (14.32) ПРВ $W_1(x)$ из (14.21), находим

$$Q_d = E_z \left\{ \int_{TZ}^\infty \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx \right\} = E_z(e^{-TZ\lambda_1}). \quad (14.33)$$

Аналогично находим ВЛТ

$$Q_0 = \alpha = E_z(e^{-TZ\lambda}). \quad (14.34)$$

Поскольку

$$Z = \sum_{i=1}^M D_i, \quad (14.35)$$

где статистики D_i независимы и одинаково распределены,

$$E_z(e^{-TZ\lambda}) = \prod_{i=1}^M E_{D_i}(e^{-T\lambda D_i}).$$

Поскольку согласно (14.21) статистики D_i распределены по показательному закону $W(D_i) = \lambda e^{-\lambda D_i}$,

$$E_{D_i}(e^{-\lambda T D_i}) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda T D_i} W(D_i) dD_i = \lambda \int_0^\infty e^{-(1+T)\lambda D_i} dD_i = \frac{1}{1+T}.$$

Следовательно, ВЛТ

$$Q_0 = \alpha = E_z(e^{-\lambda T Z}) = \frac{1}{(1+T)^M}. \quad (14.36)$$

Отсюда находим порог

$$T = -1 + \alpha^{-1/M}. \quad (14.37)$$

Аналогично находится вероятность обнаружения (при $\lambda = \lambda_1$)

$$Q_d = \left(1 + \frac{T}{1+\bar{d}}\right)^{-M} = \left(\frac{1+\bar{d}}{1+\bar{d}+T}\right)^M. \quad (14.38)$$

Из соотношений (14.37), (14.38) получим

$$Q_d^{-1/M} = 1 + \frac{T}{1+\bar{d}} = 1 + \frac{-1 + Q_0^{-1/M}}{1+\bar{d}}, \quad (14.39)$$

отсюда следует

$$1 + \bar{d} = \frac{-1 + Q_0^{-1/M}}{-1 + Q_d^{-1/M}} = \frac{Q_d^{1/M} - Q_0^{1/M} - 1}{Q_0^{1/M} - Q_d^{1/M} + 1}. \quad (14.40)$$

Далее находим

$$\bar{d} = -1 + \frac{(1 - Q_0^{1/M})Q_d^{1/M}}{(1 - Q_d^{1/M})Q_0^{1/M}} = \frac{Q_d^{1/M} - Q_0^{1/M}}{(1 - Q_d^{1/M})Q_0^{1/M}}.$$

Окончательно получим, что в случае релейского распределения помехи для УС ПУЛТ-процессора

$$\bar{d} = \bar{d}_M = \frac{(Q_d/Q_0)^{1/M} - 1}{1 - Q_d^{1/M}}. \quad (14.41)$$

Раскрывая неопределенность при $M \rightarrow \infty$ ($x = 1/M \rightarrow 0$) (предварительно обозначив $f(x) = Q_d^x - Q_0^x$, $g(x) = 1 - Q_d^x$ и используя правило Лопиталя $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x)/g'(x)$), в результате находим

$$\bar{d}_\infty = \frac{\ln(Q_0/Q_d)}{\ln Q_d}. \quad (14.42)$$

что совпадает с (14.23).

Можно получить приближенную формулу для величины потерь [174]

$$\Pi_{дв} = 10 \lg(\bar{d}_M/\bar{d}_\infty).$$

Запишем числитель формулы (14.41) в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{Q_d}{Q_0}\right)^{1/M} - 1 &= \exp\left[\frac{1}{M} \ln\left(\frac{Q_d}{Q_0}\right)\right] - 1 \approx 1 + \frac{1}{M} \ln\left(\frac{Q_d}{Q_0}\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{M} \ln\left(\frac{Q_d}{Q_0}\right)\right]^2 - 1 = \frac{1}{M} \ln\left(\frac{Q_d}{Q_0}\right) \left[1 + \frac{1}{2M} \ln\left(\frac{Q_d}{Q_0}\right)\right]. \end{aligned}$$

Аналогично записывается знаменатель (14.41)

$$\begin{aligned} 1 - Q_d^{1/M} &= 1 - e^{(1/M) \ln Q_d} \approx 1 - \left[1 + \frac{1}{M} \ln Q_d + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} \ln Q_d\right)^2\right] = \\ &= -\frac{1}{M} \ln Q_d \left(1 + \frac{1}{2M} \ln Q_d\right). \end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}_M}{d_\infty} &= \left[1 + \frac{1}{2M} \ln\left(\frac{Q_d}{Q_0}\right)\right] / \left[1 + \frac{1}{2M} \ln(Q_d)\right] \approx \\ &\approx \left[1 + \frac{1}{2M} \ln\left(\frac{Q_d}{Q_0}\right)\right] \left[1 - \frac{1}{2M} \ln(Q_d)\right] \approx \\ &\approx 1 + \frac{1}{2M} \ln\left(\frac{Q_d}{Q_0}\right) - \frac{1}{2M} \ln(Q_d) = 1 - \frac{1}{2M} \ln Q_0. \end{aligned}$$

Окончательно находим [174]

$$\Pi_{\text{дБ}} = 10 \lg \left[1 - \frac{1}{2M} \ln Q_0\right] = \frac{10}{\ln 10} \ln \left[1 - \frac{1}{2M} \ln Q_0\right] \approx -\frac{5 \ln(Q_0)}{M \ln 10}.$$

Таким образом, приближенная формула потерь принимает вид

$$\Pi_{\text{дБ}} = \frac{5}{M} \lg\left(\frac{1}{Q_0}\right) = \frac{5n}{M},$$

где $-n$ — показатель степени ВЛТ $Q_0 = 10^{-n}$.

При $n = 6$ и $M = 30$ получим $\Pi = 1$ дБ, здесь отношение $n/M = 0,2$, поэтому по кривой Хансена (рис. 14.12) находим $\Pi \approx 1$ дБ, т.е. полученная формула является довольно точной и тем точнее, чем больше величина M .

Предполагая в дальнейшем вычислить и потери ПС ПУЛТ-процессора, положим

$$Q_0 = 10^{-6}, \quad Q_d = 0,5; \quad M = 16; \quad k = 10. \quad (14.43)$$

Тогда с учетом (14.43) по (14.23) и (14.42) $\bar{d} = d_\infty = 18,93$, или 12,77 дБ, в то же время по (14.41) $\bar{d} = 29,97$, или 14,77 дБ [172].

Таким образом, потери УС ПУЛТ процессора по сравнению с оптимальным обнаружителем составляют 2 дБ. Этот же результат мож-

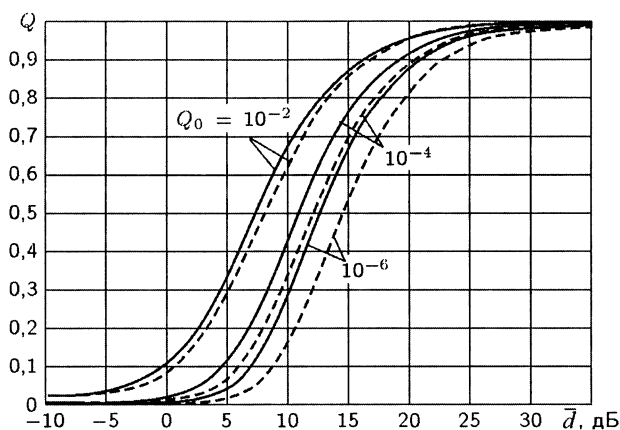


Рис. 14.15

но получить по кривой Хансена (см. рис. 14.12) при $M/n = 16/6 = 0,375$; $\Pi_{\text{дв}} \approx 2$ дБ.

Согласно формуле (14.38) рабочая характеристика УС ПУЛТ процессора в принятых здесь обозначениях принимает вид

$$Q_d = \frac{(1 + \bar{d})^M}{(\bar{d} + Q_0^{-1/M})^M} = Q_0 \frac{(1 + \bar{d})^M}{(1 + \bar{d} Q_0^{1/M})^M}. \quad (14.44)$$

По (14.42) при $M \rightarrow \infty$ находим

$$Q_d = Q_0^{1/(1+\bar{d}_\infty)},$$

что совпадает с (14.22).

Если положить $Q_0 = 10^{-n}$, то получим

$$Q_d = \frac{(1 + \bar{d})^M}{(\bar{d} + 10^{n/M})^M}. \quad (14.45)$$

Зависимости $Q_d = f(\alpha, M, \bar{d})$ изображены на рис. 14.15–14.16 при $M = 16$; 100 соответственно. Сплошные кривые построены по (14.22), штриховые — по (14.45); на рис. 14.16 при $Q_0 = 10^{-2}$ обе кривые практически сливаются.

Третья модификация УС ПУЛТ-процессора, а именно процессоры на основе порядковой статистики (ПС ПУЛТ-процессоры), обладают улучшенными характеристиками по сравнению с УП ПУЛТ-процессорами как по отношению мешающей цели, так и по нейтрализации маскировки цели кромкой помехи в модели 2.

Схема ПС ПУЛТ-процессора изображена на рис. 14.17. На этом рисунке ФС — формирователь статистик I_i и Q_i ; ЛД — линейный детектор; ФПС — формирователь порядковых статистик. Этот про-

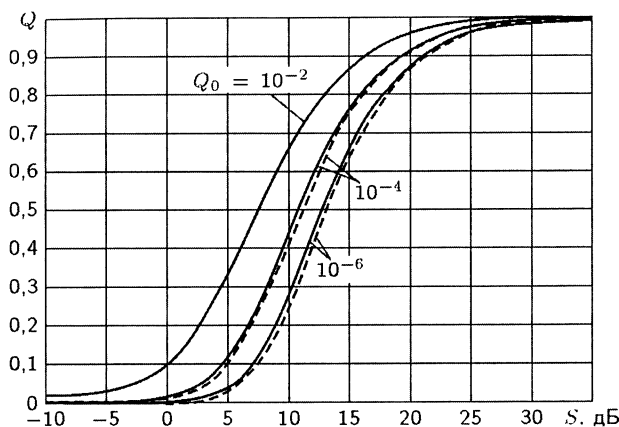


Рис. 14.16

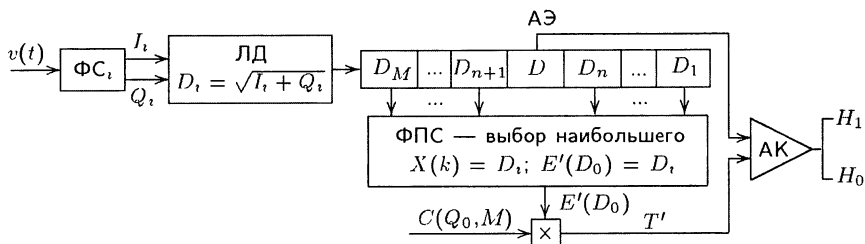


Рис. 14.17

цессор выбирает k -ю наибольшую выборку D_i в ячейках регистра, в которых отсутствует сигнал, и величина $E'(D_0) = D_i$ формирует порог T .

Замечание 2. Порядковая статистика (order statistic) — это статистика $X_{(k)}$, $1 \leq k \leq n$, определяется как k -й член вариационного ряда [170]

$$X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(k)}, \quad (14.46)$$

по выборке $(X_i)_{i=1}^n$.

Таким образом, на рис. 14.17 ФПС выбирает наибольшее $X_{(k)}$, $1 < k < N$, в (14.46), в качестве которого выступает отсчет D_i , и эта порядковая статистика является оценкой среднего значения $E(D_0)$ (мощности помехи).

Величина k выбирается из компромисса между возможностью обеспечить заданную ВЛТ, потерями в отношении сигнал/помеха и эффектом маскировки цели в анализируемом элементе кромки помехи и мешающими целями [31].

При $k \geq M/2$ стабилизируется уровень ложных тревог в модели

1 помехи, однако имеет место маскировка цели кромкой помехи в модели 2 [31].

ПС ПУЛТ-процессоры стабилизируют уровень ложных тревог для всех моделей 1, 2, 3 помехи и имеют малые потери, лежащие между значениями потерь в УС ПУЛТ и БИ ПУЛТ процессорах при одинаковой длине окна [31, 161, 162].

При большом значении k относительно длины окна M ПС ПУЛТ-процессор обеспечивает уровень ложной тревоги с учетом кромки помехи такой же, как БИ ПУЛТ-процессор. Однако для таких значений k эффективность обнаружения ПС ПУЛТ-процессора будет меньше, чем у БИ ПУЛТ-процессора. В процессе обнаружения с учетом мешающих целей характеристики ПС ПУЛТ-процессора сравнимы с характеристиками МИ ПУЛТ-процессора.

В силу простоты вычисления Q_d и Q_0 ПС ПУЛТ-процессор является достаточно популярным.

Если величины X_i , отмеченные в замечании 2, независимы и имеют общую функцию распределения F , то ПРВ порядковой статистики при гауссовском фоне определяется производной

$$W_{X(k)}(z) = \frac{d}{dz} F_k(z) = \frac{d}{dz} P\{X_{(k)} \leq z\}. \quad (14.47)$$

Характеристики ПС ПУЛТ-процессора (OS CFAR processor)

Величина z на входе ПУЛТ-процессора является случайной. Допустим, что в ПУЛТ процессоре имеется M опорных ячеек. В ПС ПУЛТ-процессоре значение СВ z ранжируется согласно их величине на входе процессора (см. (14.46))

$$z_1 \leq z_2 \leq \dots \leq z_i \leq \dots \leq z_k \leq \dots \leq z_m, \quad (14.48)$$

где M — длина опорного окна ПС ПУЛТ-процессора (см. рис. 14.17).

Величина k согласно замечанию 2 является рангом ячейки (элемента окна), который вычисляется для определения порога. Пороговый уровень Z_T находится умножением порядковой статистики z_K на скалярный множитель δ :

$$Z_T = \delta z_K. \quad (14.49)$$

Эта величина связывается с ВЛТ Q_0 .

Случайная величина Z , как показано в [161], имеет ПРВ $W(z)$ и функцию распределения $F(z)$, тогда порядковая статистика z_K имеет ПРВ [161, 170] (см. (9.5))

$$W_K(z) = k C_M^k [F(z)]^{k-1} [1 - F(z)]^{M-k} W(z). \quad (14.50)$$

При релейском распределении помехи $W(z)$ и $F(z)$ имеют вид [161]

$$W(z) = \frac{1}{\mu} e^{-z/\mu}, \quad F(z) = 1 - e^{-z/\mu}, \quad (14.51)$$

где μ — средняя мощность помехи. Тогда по (14.50) получим

$$W_K(z) = \frac{k}{\mu} C_M^k [\exp(-z/\mu)]^{M-k+1} [1 - \exp(-z/\mu)]^{k-1}. \quad (14.52)$$

Вероятность того, что помеха в анализируемом элементе пре-
взойдет порог Z_T , имеет вид

$$P(z \geq Z_T | Z_T) = \frac{1}{\mu} \int_{Z_T}^{\infty} e^{-z/\mu} dz = \exp(-Z_T/\mu), \quad (14.53)$$

где $Z_T = \delta z$. Здесь порог Z_T является функцией СВ z_K (14.48). Следовательно, для вычисления ВЛТ $Q_0 = \alpha$ необходимо усреднить величину (14.53) с весом $W(z_k) = W_k(z)$:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \int_0^{\infty} P(z \geq Z_T | Z_T) W_k(z) dz = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\delta z/\mu} \frac{k}{\mu} C_M^k (1 - e^{-z/\mu})^{k-1} \left[\exp\left(-\frac{z}{\mu}\right) \right]^{M-k+1} dz = \\ &= k C_M^k \int_0^{\infty} \exp[-y(\delta + M - k + 1)] [1 - \exp(-y)]^{k-1} dy. \end{aligned} \quad (14.54)$$

По (14.54) можно сделать важное заключение, а именно, ВЛТ Q_0 не зависит от средней мощности помехи μ , что характерно для ПУЛТ процессоров.

По (14.54) после интегрирования можно получить следующее выражение для ВЛТ Q_0 [161]:

$$Q_0 = k C_M^k \frac{(\delta + M - k)! (k - 1)!}{(\delta + M)!}. \quad (14.55)$$

Результаты расчета множителя δ приведены в [161] при $Q_0 = 10^{-6}$ (табл. 14.1) при размерах опорного окна $M = 8; 16; 24; 32$.

Соотношению (14.55) можно придать иной вид [173]

$$Q_0 = \frac{M!}{(M - k)!} \frac{\Gamma(\delta + M - k + 1)}{\Gamma(\delta + M + 1)} = \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{\delta}{M + 1 - i}\right)^{-1}, \quad (14.56)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Замечание 3. В силу приведенного вывода можно рассматривать величины z_i , $i = \overline{1, M}$, нормированными и вместо (14.51) рассматривать

$$W(z) = W_0(z) = e^{-z}; \quad F_0(z) = 1 - e^{-z}. \quad (14.57)$$

Таблица 14.1

k	$M = 8$	$M = 16$	$M = 24$	$M = 32$
1	7 999 992,0	15 999 984,0	23 999 976,0	31 999 968,0
2	7 475,8	15 476,4	23 471,2	31 464,5
3	688,2	1 482,8	2 275,5	3 067,9
4	196,0	442,7	688,1	933,3
5	86,4	206,7	326,0	444,9
6	46,7	120,4	192,8	265,0
7	27,8	79,4	129,5	179,2
8	16,8	56,6	94,1	131,3
9		42,4	72,1	101,4
10		32,9	57,3	81,4
11		26,1	46,8	67,2
12		20,9	39,1	56,7
13		16,9	33,1	48,5
14		13,7	28,3	42,2
15		10,9	24,5	37,0
16		8,3	21,3	32,7
17			18,6	29,2
18			16,3	26,1
19			14,3	23,5
20			12,5	21,2
21			10,8	19,2
22			9,3	17,4
23			7,9	15,8
24			6,3	14,4
25				13,1
26				11,9
27				10,7
28				9,6
29				8,6
30				7,6
31				6,6
32				5,4

Аналогично, при наличии сигнала [172, 173]

$$W_1(z) = D \exp(-Dz), \quad (14.58)$$

где $D = 1/(1 + \bar{d})$, \bar{d} — среднее ОСШ, $\bar{d} = \bar{u}_c^2/\mu$ в предположении, что цель флуктуирует так, что огибающая сигнала имеет релеевское распределение при среднем ОСШ \bar{d} . Тогда цель обнаруживается с вероятностью Q_d в анализируемом элементе [172, 173] [вычисляется аналогично (14.55) и (14.56)] [172]

$$\begin{aligned}
 Q_d &= k C_M^k \frac{(\alpha_D + M - k)!(k - 1)!}{(\alpha_D + M)!} = \\
 &= \frac{M!}{(M - k)!} \frac{\Gamma(\delta D + M - k + 1)}{\Gamma(\delta D + M + 1)} = \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{\delta D}{M + 1 - i} \right)^{-1}, \quad (14.59)
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha_D = \delta / (1 + \bar{d}). \quad (14.60)$$

При $D = 1$ из (14.59) следует (14.56).

Для расчета характеристики ПС ПУЛТ-процессора можно воспользоваться асимптотической формулой Стерлинга

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\theta(n)}, \quad |\theta(n)| \leq 1/(12n). \quad (14.61)$$

Представим ВЛТ (14.55) в виде

$$Q_0 = \frac{(\delta + M - k)!}{(\delta + M)!} \frac{M!}{(M - k)!}. \quad (14.62)$$

В аналогичной форме может быть записана и вероятность обнаружения Q_d (14.59).

В [172] определяются функции

$$f(\delta, M, k) = \ln \frac{(\delta + M - k)!}{(\delta + M)!}, \quad f(0, M, k) = \ln \frac{(M - k)!}{M!}, \quad (14.63)$$

и используется формула Стирлинга в виде

$$\ln(n!) \approx \frac{1}{2} \ln 2\pi + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{12n}. \quad (14.64)$$

В результате находим соотношение

$$\begin{aligned} f(\delta, M, k) \approx & \left(\delta + M - k + \frac{1}{2}\right) \ln(\delta + M - k) + \\ & + \left(\delta + M + \frac{1}{2}\right) \ln(\delta + M) + \frac{k}{12(\delta + M - k)(\delta + M)} + k. \end{aligned} \quad (14.65)$$

Используя функции (14.63), можно выразить через них и ВЛТ Q_0 и вероятность обнаружения Q_d :

$$\ln Q_0 = f(\delta, M, k) - f(0, M, k); \quad (14.66)$$

$$\ln Q_d = f(\alpha_D, M, k) - f(0, M, k). \quad (14.67)$$

При этом характеристики ПС ПУЛТ процессора находятся по (14.66), (14.67) с учетом (14.60).

Рассмотрим частный случай (14.43). Величина δ определяется по табл. 14.1 и равна $\delta = 32,9$ ($M = 16$; $k = 10$).

В общем случае значение δ находится из уравнения

$$\ln Q_0 + f(0, M, k) = f(\delta, M, k). \quad (14.68)$$

Аналогично при заданной вероятности обнаружения ищется величина α_D из уравнения

$$\ln Q_d + f(0, M, k) = f(\alpha_D, M, k). \quad (14.69)$$

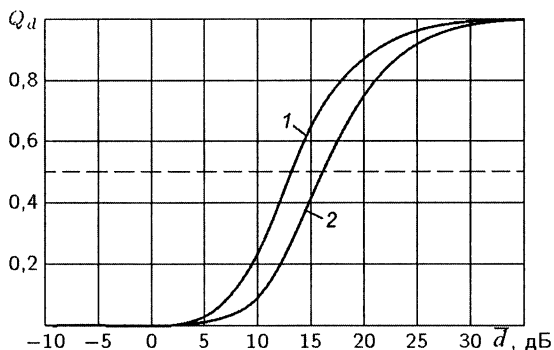


Рис. 14.18

При условии (14.43) в [172] получено значение $\alpha_D = 0,78$.

При известных δ и α_D по (14.60) находится ОСШ $\bar{d} = 41,21$, или $\bar{d}_{\text{дБ}} = 16,15$ дБ.

Таким образом, при условии (14.43) можно вычислить потери по ОСШ \bar{d} в различных ПУЛТ-процессорах. ПС ПУЛТ-процессор проигрывает УС ПУЛТ-процессору $16,15 - 14,77 = 1,38$ дБ, а по отношению к оптимальному обнаружителю $16,15 - 12,77 = 3,38$ дБ.

Зависимость $Q_d = f(\bar{d})$ при $k = 10$; $M = 16$; $Q_0 = 10^{-6}$ изображена на рис. 14.18 [кривая 1 — (14.22); кривая 2 — (14.67)].

14.3. ПУЛТ-процессоры с нерелеевским распределением помехи

Рассмотрим сначала УС ПУЛТ-процессоры, когда распределение амплитуд помехи не является релеевским. Наибольшее распространение получили модели вейбулловского и логарифмически нормального распределения амплитуд помехи.

Рассмотрим вначале алгоритм обнаружения одиночного импульса при вейбулловском распределении амплитуд помехи и известных параметрах ПРВ.

Распределение Вейбулла имеет вид (см. приложение 1)

$$W(x) = \begin{cases} \frac{\eta \ln 2}{x_m} \left(\frac{x}{x_m} \right)^{\eta-1} \exp \left[-\ln 2 \left(\frac{x}{x_m} \right)^\eta \right] & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (14.70)$$

где x_m — медиана распределения; η — параметр формы — индикатор степени асимметрии ПРВ.

Для СВ ξ , распределенной по закону Вейбулла, среднее значение и дисперсия имеют вид

$$E(\xi) = \frac{x_m}{\sqrt{\ln 2}} \Gamma \left(\frac{\eta + 1}{\eta} \right);$$

$$D(\xi) = \text{var } \xi = \left[\frac{x_m}{\sqrt{\ln 2}^{1/\eta}} \right]^2 \left[\Gamma \left(\frac{\eta + 2}{\eta} \right) - \Gamma^2 \left(\frac{\eta + 1}{\eta} \right) \right]. \quad (14.71)$$

Так же, как и в начале данной главы, рассмотрим алгоритм классического обнаружения, полагая, что параметры распределения Вейбулла известны и решающее правило основано на поступлении одиночного импульса:

$$\begin{aligned} H_1: D(\nu) &\geq T, \\ H_0: D(\nu) &< T. \end{aligned} \quad (14.72)$$

Порог T определяется через ВЛТ Q_0 соотношением

$$\begin{aligned} Q_0 &= P\{D(\nu) = T \mid \text{цель отсутствует в элементе разрешения}\} = \\ &= \int_T^\infty W_0(x) dx. \end{aligned} \quad (14.73)$$

Вероятность обнаружения

$$\begin{aligned} Q_d &= P\{D(\nu) \geq T \mid \text{цель присутствует в элементе разрешения}\} = \\ &= \int_T^\infty W_1(x) dx. \end{aligned} \quad (14.74)$$

Подставляя (14.70) в (14.73), находим

$$Q_0 = \int_T^\infty \frac{\eta \ln 2}{x_m} (x/x_m)^{\eta-1} e^{-\ln 2 (x/x_m)^\eta} dx.$$

После подстановки $y = \ln 2 (x/x_m)^\eta$ получим

$$Q_0 = \int_{\ln 2 (T/x_m)^\eta}^\infty e^{-y} dy = \exp[-\ln 2 (T/x_m)^\eta].$$

Отсюда следует значение порога

$$T = x_m \left[\frac{\ln Q_0^{-1}}{\ln 2} \right]^{1/\eta}. \quad (14.75)$$

С учетом соотношения (14.71) получим связь порога со средним значением статистики $D_0 = D_0(\nu)$:

$$T = E(D_0) \frac{[\ln Q_0^{-1}]^{1/\eta}}{\Gamma(1 + 1/\eta)}. \quad (14.76)$$

Вероятность обнаружения может быть получена в виде [156]

$$Q_d = \int_A^\infty \frac{\eta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_1(y, \theta) dy d\theta = Q_d(Q_0, \lambda, \eta), \quad (14.77)$$

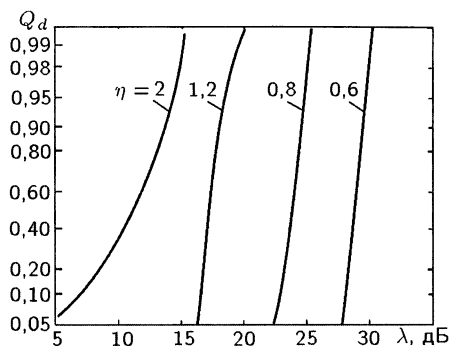


Рис. 14.19

где

$$\Phi_1(y, \theta) = \frac{y}{[\lambda\Gamma(1 + 2/\eta) - 2\sqrt{\lambda\Gamma(1 + 2/\eta)}y \cos \theta + y^2]^{(2-\eta)/2}} \times \\ \times \exp\{-[\lambda\Gamma(1 + 2/\eta) - 2\sqrt{\lambda\Gamma(1 + 2/\eta)}y \cos \theta + y^2]^{\eta/2}\}; \quad (14.78)$$

$A = (\ln Q_0^{-1})^{1/\eta}$, $\lambda = \frac{b^2(\ln 2)^{2/\eta}}{x_m^2 \Gamma(1 + 2/\eta)}$ — ОСП (отношение сигнал/помеха); $b = k\varepsilon A$.

Таким образом, вероятность обнаружения зависит от трех параметров: $Q_d = Q_d(Q_0, \lambda, \eta)$.

В результате графики зависимости (14.77) для нефлуктуирующей цели при вейбулловском распределении амплитуд помехи принимают вид рис. 14.19 [156]. На этом рисунке $Q_0 = 10^{-6}$, причем параметром кривых служит величина η .

Заметим, что распределение Вейбулла при $\eta = 2$ вырождается в закон Релея. Действительно, при $\eta = 2$ по (14.70) находим

$$W(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x \geq 0,$$

где σ — параметр закона Релея; $\sigma = x_m/\sqrt{2 \ln 2}$. Тогда по (14.71) получим

$$E(\xi) = \sigma\sqrt{2}\Gamma(3/2) = \sigma\sqrt{\pi/2}, \\ D(\xi) = \sigma^2 2[\Gamma(2) - \Gamma^2(3/2)] = (2 - \pi/2)\sigma^2,$$

так как $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$. Таким образом, кривая при $\eta = 2$ на рис. 14.19 соответствует распределению Релея.

При $\eta = 1$ закон Вейбулла вырождается в показательное распределение

$$W(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

где $\lambda = \ln 2/x_m$.

Рассмотрим характеристики обнаружителя, когда распределение амплитуд помехи подчиняется логарифмически нормальному распределению, которое имеет вид

$$W(x) = \frac{1}{x\sqrt{4\pi\ln\rho}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \ln x_m)^2}{4\ln\rho}\right], \quad x \geq 0, \quad (14.79)$$

где x_m — медиана распределения; ρ — показатель асимметрии ПРВ, причем

$$\rho = E(\xi)/x_m. \quad (14.80)$$

Найдем характеристики обнаружения одиночного импульса при логарифмически нормальном распределении амплитуды помехи и известных параметрах ПРВ.

Найдем вначале выражение для ВЛТ

$$Q_0 = \int_T^\infty \frac{1}{x\sqrt{4\pi\ln\rho}} e^{-(\ln x - \ln x_m)^2/4\ln\rho} dx.$$

После подстановки $y = (\ln x - \ln x_m)/\sqrt{2\ln\rho}$ получим

$$Q_0 = \int_B^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\ln T - \ln x_m}{\sqrt{4\ln\rho}} \right) \right], \quad (14.81)$$

где $B = \frac{\ln(T/x_m)}{\sqrt{2\ln\rho}}$; $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$. Следовательно, величина порога T определяется соотношением

$$T = x_m \exp[\sqrt{4\ln\rho} \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2Q_0)]. \quad (14.82)$$

С учетом соотношения (14.80) по (14.82) находим

$$T = E(D_0)\rho^{-1} \exp[\sqrt{4\ln\rho} \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2Q_0)]. \quad (14.83)$$

Можно показать, что вероятность обнаружения Q_d определяется соотношением [156]

$$Q_d = \frac{1}{2\pi} \int_C^\infty \int_0^{2\pi} \Phi_2(y, \theta) dy d\theta = Q_d(Q_0, \lambda, \rho), \quad (14.84)$$

где $C = \exp[\sqrt{4\ln\rho} \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2Q_0)]$;

$$\begin{aligned} \Phi_2(y, \theta) = & \frac{1}{\sqrt{4\pi\ln\rho}} \frac{y}{\rho^4 \lambda - 2\rho^2 \sqrt{\lambda} y \cos \theta + y^2} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{4\ln\rho} [\ln \sqrt{\rho^4 \lambda - 2\rho^2 \sqrt{\lambda} y \cos \theta + y^2}]^2 \right\}; \end{aligned} \quad (14.85)$$

$\lambda = b^2/(x_m^2 \rho^4)$ — отношение сигнал/помеха на выходе обнаружителя;
 $b = k\varepsilon A^2$.

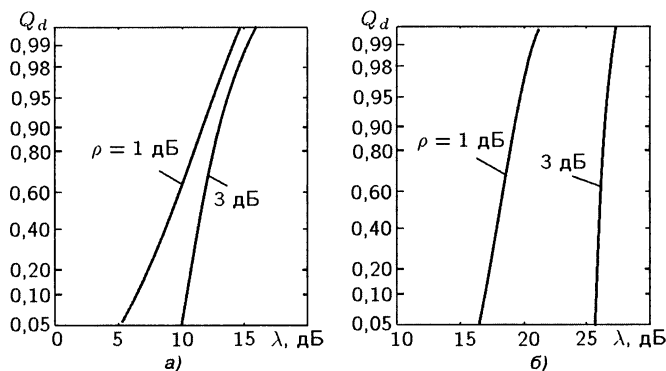


Рис. 14.20

Зависимости $Q_d(\lambda)$ изображены на рис. 14.20: а — при $Q_0 = 10^{-2}$; б — при $Q_0 = 10^{-4}$.

Найдем характеристики обнаружения единичного импульса линейным детектором с использованием УС ПУЛТ-процессора.

Структура обнаружителя при помехах с распределениями Вейбулла и логарифмически нормальным аналогична структуре при релейских помехах. При этом, как и ранее, порог обнаружения можно записать в виде $T' = E'(D_0)C(Q_0, K)$, причем при $K \rightarrow \infty$

$$C(Q_0, K) \rightarrow \frac{[\ln(Q_0^{-1})]^{1/\eta}}{\Gamma(3/2)}$$

при помехе с распределением Вейбулла;

$$C(Q_0, K) \rightarrow \rho^{-1} \exp[\sqrt{4 \ln \rho} \operatorname{erf}^{-1}(1 - 2Q_0)]$$

при помехе с логарифмически нормальным распределением, причем при $K < \infty$ коэффициент $C(Q_0, K)$ больше, чем его величина на бесконечности.

В УС ПУЛТ-процессоре порог вычисляется согласно его оценке

$$T' = C(Q_0, K) \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K D_i. \quad (14.86)$$

Величина $C_K = C(Q_0, K)$ при распределении Вейбулла находится из соотношения [156]

$$C_K = \frac{1}{Kg_{\eta,K}^{-1}(Q_0)}, \quad (14.87)$$

когда

$$Q_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{K}{C_K} \int_0^\infty e^{-\ln 2u^\eta} \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty \eta \ln 2x^{\eta-1} \times \right.$$

$$\times e^{-\ln 2x^\eta} e^{isx} dx \Big]^K e^{-isuK/C_k} dsdu = g_{\eta,K} \left(\frac{K}{C_k} \right). \quad (14.88)$$

При логарифмически нормальном распределении [156]

$$C_K = \frac{1}{Kh_{\eta,K}^{-1}(Q_0)}, \quad (14.89)$$

когда

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{2\pi} \frac{K}{C_K} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\ln u}{\sqrt{4 \ln \rho}} \right) \right] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{4\pi \ln \rho}} e^{-(\ln x)^2/4 \ln \rho} e^{isx} dx \right]^K e^{-isuK/C_k} dsdu = \\ &= h_{\eta,K}(K/C_k). \end{aligned}$$

Вероятность обнаружения при использовании УС ПУЛТ с распределением помех по закону Вейбулла имеет вид [156]

$$\begin{aligned} Q_d &= \frac{\eta}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{A_1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \Phi_1(y, \Theta) d\Theta dy \right] \times \\ &\times \frac{K}{2\pi C_k} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \eta \ln 2r^{\eta-1} e^{-\ln 2r^\eta} e^{isr} dr \right] e^{-isuK/C_k} dsdu = \\ &= Q_d(K/C_k, \lambda, \eta, k) = Q_d[g_{\eta,k}^{-1}(Q_0), \lambda, \eta, k] = q_{\eta,K}(Q_0, \lambda), \quad (14.90) \end{aligned}$$

где $\Phi_1(y, \Theta)$ определяется по (14.78), $A_1 = (\ln 2)^{1/\eta} u$.

Вероятность обнаружения при использовании УС ПУЛТ с распределением помех по логарифмическому нормальному закону имеет вид [156]

$$\begin{aligned} Q_d &= \int_0^{\infty} \left[\int_u^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_2(y, \Theta) dy d\Theta \right] \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \frac{K}{C_K} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{r\sqrt{4\pi \ln \rho}} e^{-(\ln r)^2/4 \ln \rho} e^{isr} dr \right]^K e^{-isuK/C_k} dsdu = \\ &= Q_d(K/C_K, \lambda, \rho, K) = Q_d[h_{\rho,K}^{-1}(Q_0), \lambda, \rho, K], \quad (14.91) \end{aligned}$$

где $\Phi_2(y, \Theta)$ определяется по (14.85).

Пусть на входе ПС ПУЛТ-процессора воздействует помеха с распределением амплитуд по закону Вейбулла (см. Приложение 1).

$$W(x) = \frac{\lambda}{b} \left(\frac{x}{b} \right)^{\lambda-1} \exp \left[- \left(\frac{x}{b} \right)^\lambda \right]. \quad (14.92)$$

Это распределение переходит в закон Релея при $\lambda = 2$ и чем меньше λ , тем протяженнее «хвост» распределения, при $\lambda = 1$ рас-

пределение Вейбулла вырождается в показательный закон.

Если процессору предшествует квадратичный детектор с характеристикой $g(x) = x^2$, то результирующее распределение после нелинейного элемента будет также вейбулловским. Без потери общности положим $z = (x/b)^2$, тогда обратная функция $x = \varphi(z) = b\sqrt{z}$; $d\varphi/dz = b/2\sqrt{z}$ и тогда получим

$$W(z) = \alpha z^{\alpha-1} \exp(-z^\alpha), \quad (14.93)$$

где $\alpha = \lambda/2$.

Снова получили распределение Вейбулла, графики ПРВ $W(z)$ которого [170] приведены на рис. П1.8 приложения (1 — $\alpha = 0,5$; 2 — $\alpha = 1$ (показательный закон), 3 — $\alpha = 2$ (закон Релея), 4 — $\alpha = 5$).

По (14.93) находим

$$W(z) = -(e^{-z^\alpha})', \quad \alpha = \lambda/2. \quad (14.94)$$

Тогда функция распределения имеет вид

$$F(z) = 1 - e^{-z^\alpha}, \quad \alpha = \lambda/2. \quad (14.95)$$

Для того чтобы найти выражение ВЛТ для ПС ПУЛТ-процессора, выразим вначале вероятность

$$P(z \geq Z_T | Z_T) = \int_{Z_T}^{\infty} W(z) dz = \int_{\delta z_k}^{\infty} (e^{-z^\alpha})' dz = e^{-(\delta z_k)^{\lambda/2}}.$$

Тогда согласно (14.54) получим ВЛТ

$$Q_0 = \int_0^{\infty} \exp[-(\delta z_k)^{\lambda/2}] W(z_k) dz_k. \quad (14.96)$$

Используя выражение для ПРВ (14.93)

$$W(z_k) = k C_M^k [1 - \exp(-z^{\lambda/2})]^{k-1} \exp(-z^{\lambda/2})^{M-k} \frac{\lambda}{2} z^{\lambda/2-1} \exp(-z^{\lambda/2}), \quad (14.97)$$

получим ВЛТ

$$Q_0 = \int_0^{\infty} \exp[-(\delta z)^{\lambda/2}] k C_M^k [1 - \exp(-z^{\lambda/2})]^{k-1} \times \\ \times \exp(-z^{\lambda/2})^{M-k} \frac{\lambda}{2} z^{\lambda/2-1} \exp(-z^{\lambda/2}) dz. \quad (14.98)$$

В [173] после интегрирования получен результат

$$Q_0 = \frac{M!}{(M-k)!} \frac{\Gamma(\delta^{\lambda/2} + M - k + 1)}{\Gamma(\delta^{\lambda/2} + M + 1)} = \prod_{i=1}^k (1 + \frac{\delta^{\lambda/2}}{M + 1 - i})^{-1}. \quad (14.99)$$

Отсюда при $\lambda = 2$ находится соотношение (14.56) для релеевской

помехи, а значит, и справедливы значения табл. 14.1, если в них положить вместо δ величину $\delta^{\lambda/2}$ (при $Q_0 = 10^{-6}$).

Справедливо также использование формулы Стирлинга.

14.4. Другие разновидности ПУЛТ-процессоров

В [22] (см. также [186, 187]) рассмотрена разновидность ПУЛТ-приемника (CFAR receiver), решающего задачу обнаружения сигнала, когда помехой является ГБШ $n_k(t)$, $k = \overline{1, M}$, с неизвестной спектральной плотностью S_0 .

Задача обнаружения сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} H_0: v_k(t) &= n_k(t), \quad k = \overline{1, M}; \\ H_1: v_k(t) &= n_k(t) + s_k(t), \quad k = \overline{1, M}, \end{aligned} \quad (14.100)$$

где $s_k(t) = A \operatorname{Re} F(t) \exp(i\Omega t + i\Psi_k)$ — отсчеты фазы Ψ_k — независимые СВ, равномерно распределенные в интервале $(0, 2\pi)$.

Решающей статистикой является

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M |z_k|^2,$$

где $z_k = x_k + iy_k = C \int_0^T F^*(t) V_k(t) dt$; $V_k(t)$ — комплексная огибающая k -го входного колебания, $(0, T)$ — интервал, включающий весь сигнал.

Составляющие x_k, y_k — независимые гауссовские СВ такие, что при H_0 : $E(z_k | H_0) = 0$; при H_1 :

$$E(z_k | H_1) = E(x_k | H_1) + iE(y_k | H_1) = d_k \exp \psi_k,$$

где $d_k = 2\mathcal{E}_k/S'$, $k = \overline{1, M}$; \mathcal{E}_k — энергия сигнала, принятого в k -м интервале наблюдения; S' — аналог неизвестной спектральной плотности S_0 .

Если спектральная плотность S_0 известна, то приемник должен сравнивать решающую статистику U с ее пороговым уровнем u_0 пропорциональным S_0 . В противном случае приемник предварительно должен оценить неизвестную спектральную плотность S_0 . Чтобы сделать это, используются k вспомогательных входных колебаний v'_j , $j = \overline{1, K}$, содержащих только один ГБШ, независимый от ГБШ $n_k(t)$ и обладающий той же неизвестной спектральной плотностью S_0 . Отсчеты $z'_k = x'_k + iy_k$, $k = \overline{1, K}$, формируются соответствующим образом, как и отсчеты z_k , причем x_k и y_k являются независимыми гауссовскими СВ с равными нулю средними значениями как при гипотезе H_0 , так и при гипотезе H_1 . Эти составляющие статистически независимы от M составляющих x_k и y_k и имеют те же дисперсии.

Статистика

$$U' = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K |z'_k|^2 \quad (14.101)$$

являются оценкой неизвестной спектральной плотности S_0 , ее среднее значение пропорционально действительной спектральной плотности помехи.

В результате решающим правилом является

$$\begin{aligned} H_0: U &< TU'; \\ H_1: U &\geq TU', \end{aligned}$$

где T — постоянная величина — порог, значение которого определяется заранее определенной ВЛТ Q_0 .

Поскольку приемник использует одну и ту же ВЛТ независимо от того, какова может быть истинная плотность действующего ГБШ, то такой приемник относится к классу ПУЛТ-приемникам (CFAR receiver).

В [22] показано, что ВЛТ Q_0 такого приемника

$$Q_0 = P(U \geq TU' | H_0) = P(U/U' \geq T | H_0)$$

определяется соотношением

$$Q_0 = \frac{(M+K-1)!}{(M-1)!(K-1)!} \int_0^b x^{K-1}(1-x)^{M-1} dx, \quad b = \frac{1}{1+T}. \quad (14.102)$$

Если значения M и $K = RM$ достаточно велики, то СВ $V = U - TU'$ имеет нормальное распределение. Полагая без потери общности $S' = S_0 = 1$, находим среднее значение и дисперсию [22]:

$$\begin{aligned} E(V) &= E(U) - TE(U') = M - TK; \\ \sigma_v^2 &= \text{var}(V | H_0) = \text{var} U + \beta^2 \text{var} U' = M + T^2 K. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q_0 = P(V \geq 0 | H_0) \approx \text{erfc} \left(-\frac{E(V)}{\sigma_v} \right) = \text{erfc} x_0, \quad (14.103)$$

$$x_0 = \frac{TK - M}{\sqrt{M + T^2 K}}, \quad K < x_0^2, \quad (14.104)$$

$$\text{erfc} x = Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du.$$

Вероятность обнаружения находится в интегральном виде

$$Q_d = P(V \geq 0 | H_1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} z^{-1} h(z) dz, \quad (14.105)$$

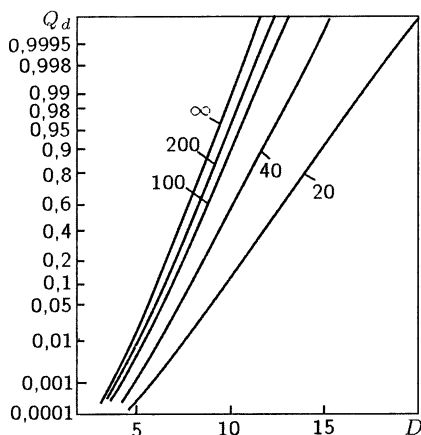


Рис. 14.21

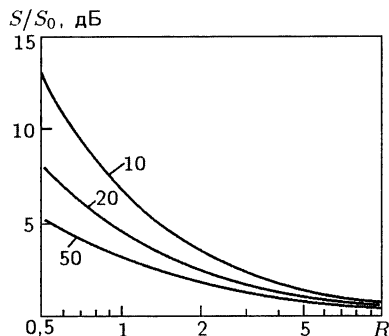


Рис. 14.22

где $\operatorname{Re} z < 0$; $c < 0$;

$$h(z) = (1+z)^{-M}(1-Tz)^{-K} \exp\left(-\frac{zd}{1+z}\right), \quad (14.106)$$

d — ОСШ; $-1 < c < T^{-1}$, $0 \leq V \leq \infty$.

На рис. 14.21 [22] для нефедингующих сигналов приводятся зависимости $Q_d(D)$, $D = \sqrt{2d}$ при $Q_0 = 10^{-6}$ (при этом находим [58] $x_0 = 4,75342$) $M = 20$; $K = \text{var}$. По рис. 14.21 замечаем, что даже при $K = 200$ вероятность обнаружения $Q_d(D) < Q_d(D_0)$, где $D_0 = \sqrt{2d_0}$, d_0 — ОСШ при известной спектральной плотности $S = S_0$. Предельная кривая на рис. 14.21 совпадает с характеристикой $Q_d(D)$ на рис. П1.12 при $N = 20$.

На рис. 14.22 приводятся потери (d/d_0) дБ, где d — ОСШ при неизвестной спектральной плотности шума, соответствующее $Q_0 = 10^{-6}$ и $Q_d = 0,999$.

Одна из разновидностей ПУЛТ-обнаружителя предложена также в [176].

14.5. Непараметрические ПУЛТ-процессоры

Наиболее известными непараметрическими ПУЛТ-процессорами являются знаковый обнаружитель (см. п. 9.2) и обнаружитель Вилкоксона (см. п. 9.3).

Непараметрические ПУЛТ процессоры обеспечивают обнаружение сигнала практически без существенных априорных сведений о распределении помехи или формы ее энергетического спектра.

Существуют два метода оценки эффективности непараметрических обнаружителей по отношению к оптимальным параметрическим обнаружителям.

Один из этих методов основан на вычислении асимптотической относительной эффективности (АОЭ), а другой использует моделирование методом статистических испытаний (методом Монте-Карло).

Знаковый обнаружитель использует статистику ступенек (9.52)

$$D = \sum_{i=1}^N u(w_i), \quad (14.107)$$

$$\text{где } u(w_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } w_i > 0, \\ 0 & \text{при } w_i < 0. \end{cases}$$

Таким образом, если w_i , $i = \overline{1, N}$, являются независимыми, одинаково распределенными СВ, то статистики D подчиняются биномиальному распределению с параметром p :

$$P(D = K) = C_N^K p^K (1-p)^{N-K}, \quad K = 0, 1, \dots, N. \quad (14.108)$$

Следовательно, ВЛТ Q_0 находится из соотношения (9.56):

$$Q_0 = P(D = T | H_0) = \sum_{K=T}^N C_N^K (1/2)^N. \quad (14.109)$$

Порог обнаружения определяется при известных Q_0 и N . Следовательно, порог T не зависит от формы распределения помехи. Отсюда следует, что знаковый обнаружитель обладает свойством ПУЛТ-процессора.

Вероятность обнаружения Q_d определяется соотношением (9.55):

$$Q_d = P(D \geq T | H_1) = \sum_{K=T}^N C_N^K p^K (1-p)^{N-K}. \quad (14.110)$$

Схема знакового обнаружителя изображена на рис. 14.23. На этом рисунке СФ — согласованный фильтр для сигнала $s_i(t)$, отсчеты осуществляются в точках $t = (i-1)T_p + \tau$, где τ — длительность импульса, T_p — период повторения импульсов;

$$w_i = \int_{(i-1)T_p}^{(i-1)T_p + \tau} \nu_i(t) s_i(t) dt;$$

РУ — решающее устройство, определяющее порог на основе решения уравнения (14.109); АК — амплитудный компаратор.

Обнаружитель Вилкоксона имеет решающую статистику (9.13) (см. пример 9.1).

$$D = \sum_{i=1}^N \lambda_i u(w_i), \quad (14.111)$$

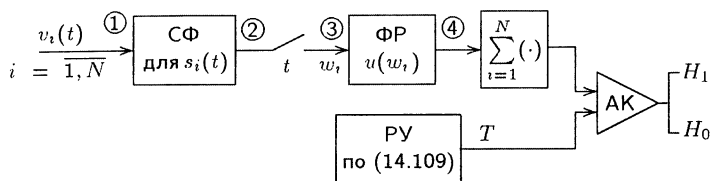


Рис. 14.23

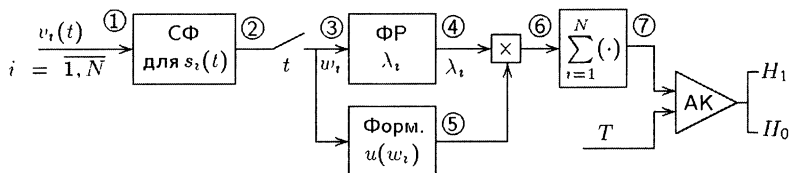


Рис. 14.24

$$\text{где } \lambda_i = \begin{cases} i & \text{при } w_i > 0, \\ 0 & \text{при } w_i \leq 0. \end{cases}$$

Правило проверки гипотез следующее:

$$\begin{aligned} H_1: D &\geq T, \\ H_0: D &< T. \end{aligned} \quad (14.112)$$

При отсутствии сигнала ВЛТ не зависит от вида распределения помехи, и таким образом обнаружитель Вилкоксона обладает свойством ПУЛТ-процессора.

Схема обнаружителя Вилкоксона изображена на рис. 14.24, на котором ФР — формирователь ранга λ_i .

Недостатком обнаружителя Вилкоксона является необходимость запоминать выборку для ее ранжирования.

15 Робастные методы фильтрации

При проектировании реальных систем разработчики зачастую сталкиваются с тем обстоятельством, что полезные сигналы на входе и параметры шумов могут в некоторой степени варьироваться. При этом оказывается, что даже небольшие изменения могут приводить к существенной деградации характеристик системы, синтезированной для некоторого «номинального» случая. Один из подходов к решению задачи в этих условиях заключается в построении адаптивных систем.

Другим способом преодоления априорной неопределенности является построение робастных алгоритмов обработки сигналов. При наличии параметрической или непараметрической неопределенности в сигнально-помеховой обстановке робастный алгоритм синтезируется для «наихудшего» случая, обеспечивая тем самым гарантированные рабочие характеристики системы обработки в данном классе сигналов и помех. Это так называемый минимаксный подход. Следует особо отметить, что робастные процедуры могут с успехом применяться при непараметрической априорной неопределенности. Используя робастный алгоритм фильтрации, зачастую удается за счет незначительного ухудшения характеристик системы добиться значительного уменьшения чувствительности алгоритма к изменению априорных данных.

Основные модели априорной неопределенности. Чаще всего возникают неопределенности в спектрах (корреляционных функциях) полезных сигналов и шумов на входе приемника, а также в их законах распределения вероятностей. Модели априорной неопределенности как для спектров, так и для плотностей распределения вероятностей чаще всего выглядят одинаково. Рассмотрим основные такие модели.

Модель ε -загрязнения. Пусть $\Phi(\omega)$ — энергетический спектр некоторого сигнала. Тогда модель класса спектров с ε -загрязнением имеет вид

$$\{\Phi \mid \Phi(\omega) = (1 - \varepsilon)\Phi_0(\omega) + \varepsilon\Phi_1(\omega)\}, \quad (15.1)$$

где $\Phi_0(\omega)$ — «номинальный» (невозмущенный) спектр; $\Phi_1(\omega)$ — произвольный неизвестный «загрязняющий» спектр; параметр $0 < \varepsilon < 1$ описывает неопределенность исходных данных.

Класс ε -загрязненных ПРВ описывается аналогично, т.е. в качестве $\Phi_0(x)$ выступает невозмущенная ПРВ, а в качестве $\Phi_1(x)$ — возмущающая ПРВ. Например, часто принимают в качестве $\Phi_0(x)$

нормальное распределение, а $\Phi_1(x)$ может быть атомарным распределением: $\Phi_1(x) = \delta(x - x_0)$.

Модель ε -окрестности. В этом случае в качестве спектрального класса рассматривается ε -окрестность невозмущенного спектра $\Phi_0(\omega)$:

$$\{\Phi \mid \|\Phi(\omega) - \Phi_0(\omega)\| \leq \varepsilon \|\Phi(\omega)\|\}. \quad (15.2)$$

Например, для энергетических спектров, интегрируемых по абсолютному значению, такой класс выглядит следующим образом:

$$\left\{ \Phi(\omega) \mid \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_0(\omega) - \Phi_1(\omega)| d\omega \leq \varepsilon \sigma_0^2 \right\}, \quad (15.3)$$

где $\sigma_0^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) d\omega$.

Робастный согласованный фильтр. Робастный согласованный фильтр часто называют оптимально-стабильным согласованным фильтром. Проиллюстрируем на его примере важность построения робастных процедур.

Рассмотрим обнаружение сигнала вида $s(t) = A_0 \sin(x)/x$ в дискретном времени на фоне коррелированного шума с треугольным энергетическим спектром. Непрерывный случай такой фильтрации в предельном случае бесконечного времени наблюдения рассмотрен в [1].

При дискретном наблюдении положим

$$s(k) = A_0 \frac{\sin(\bar{\omega}_0 k)}{\bar{\omega}_0 k},$$

где $\bar{\omega}_0 = \omega_0 \Delta t$, Δt — шаг дискретизации. Спектр дискретного шума примем равным

$$S_n(\omega) = \begin{cases} S_0(1 - |\bar{\omega}|/\bar{\omega}_p) & \text{при } |\bar{\omega}| \leq \bar{\omega}_p; \\ 0 & \text{при } \pi \geq |\bar{\omega}| > \bar{\omega}_p. \end{cases}$$

Построим дискретный согласованный фильтр для рассматриваемого случая.

Корреляционная функция шума

$$R_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_n(\bar{\omega}) e^{i\bar{\omega}n} d\bar{\omega}.$$

Составим из значений корреляционной функции шума теплицеву матрицу

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} R_n(0) & R_n(1) & \dots & R_n(N) \\ R_n(1) & R_n(0) & \dots & R_n(N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_n(N) & R_n(N-1) & \dots & R_n(0) \end{bmatrix},$$

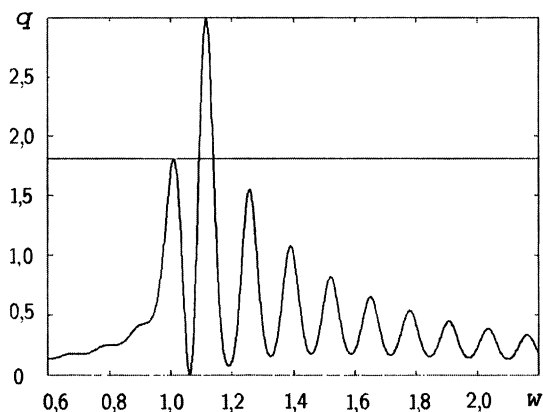


Рис. 15.1

а из отсчетов полезного сигнала $s(k)$ — вектор $\mathbf{s} = [s(N), s(N-1), \dots, s(0)]^T$. С учетом принятых обозначений вектор отсчетов импульсной характеристики согласованного фильтра $\mathbf{H}_{\text{opt}} = [h(0), h(1), \dots, h(N)]^T$ определяется выражением

$$\mathbf{H}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{s}. \quad (15.4)$$

Теперь допустим, что на самом деле значение параметра $\bar{\omega}_0$ неизвестно. Если на согласованный фильтр, оптимизированный для сигнала с параметром $\bar{\omega}_0$, подать аддитивную смесь шума и полезного сигнала другим значением параметра $\bar{\omega}_0$, то ОСШ q на выходе такого случая будет отличаться от оптимального.

На рис. 15.1 изображена зависимость ОСШ на выходе фильтра, оптимизированного для сигнала с $\bar{\omega}_0 = 1$, отличающегося от того, который поступает на вход фильтра с параметром $w = \bar{\omega}_0$. При расчетах полагалось: $N = 100$, $\Delta t = 1$, $\bar{\omega}_p = 0,1\pi$, $S_0 = 1$, $A_0 = 1$. Как видно из рисунка, характеристики фильтра существенно изменяются при сравнительно небольшом рассогласовании в параметрах сигналов на входе и выходе. Более того, в правой окрестности номинального значения $\omega = 1$ наблюдается существенно немонотонный ход кривой. Формы невозмущенного и возмущенного полезных сигналов представлены на рис. 15.2 и 15.3 соответственно при значениях параметра $\bar{\omega}_0 = 1$ (рис. 15.2) и $\bar{\omega}_0 = 1,05$ (рис. 15.3). По этим рисункам на глаз сложно отличить сигналы, в то время как характеристики фильтра меняются существенно.

Рассмотрим способ построения робастного согласованного фильтра. В случае синтеза согласованного фильтра критерием является достижение наибольшего ОСШ, которое зависит от вида полезного сигнала $S = \{s(t), t \in [0, T]\}$ и характеристик шума $N = \{n(t),$

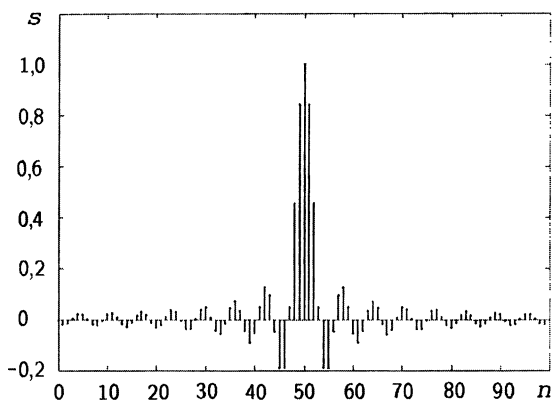


Рис. 15.2

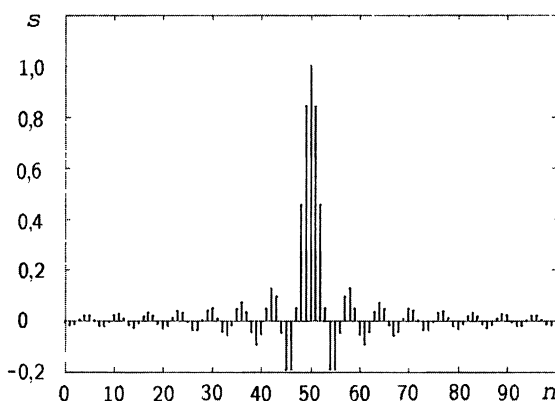


Рис. 15.3

$t \in [0, T]\}$. Пусть полезный сигнал на входе фильтра принадлежит некоторому классу Ω_s , а шум — классу Ω_n . Тогда отношение сигнал/шум на выходе фильтра можно записать в виде

$$\rho = \rho(s, n, h),$$

где $s \in S$; $n \in N$; h — импульсная характеристика согласованного фильтра для сигнала s на фоне аддитивного шума n .

Импульсная характеристика h^* робастного согласованного фильтра должна удовлетворять соотношению [192]

$$\inf_{(s,n) \in S \times N} \rho(s, n, h^*) = \max_h \left\{ \inf_{(s,n) \in S \times N} \rho(s, n, h) \right\}. \quad (15.5)$$

Точка (s^*, n^*, h^*) называется седловой точкой игры (15.5), если

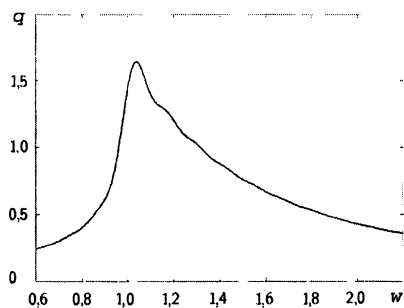


Рис. 15.4

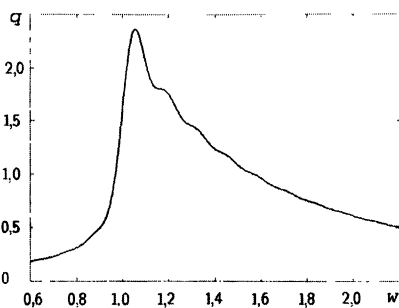


Рис. 15.5

выполнено соотношение

$$\inf_{(s,n) \in S \times N} \rho(s, n, h^*) = \rho(s^*, n^*, h^*) = \max_h \rho(s^*, n^*, h). \quad (15.6)$$

В [193] показано, что в случае описания неопределенности моделью с ε -окрестностью вектор импульсной характеристики робастного согласованного фильтра имеет вид

$$\mathbf{H}_r = (\mathbf{R}_n + \sigma_0 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{s}, \quad (15.7)$$

где $\sigma_0^2 = \varepsilon / \|\mathbf{H}_r\|^2$, $\|\mathbf{s} - \mathbf{s}_0\|^2 \leq \varepsilon$, \mathbf{s}_0 — невозмущенный полезный сигнал.

Рассмотрим, какие характеристики будет иметь робастный согласованный фильтр для нашего примера. На рис. 15.4–15.6 изображены зависимости ОСШ на выходе робастного согласованного фильтра от расстройки параметра сигнала. Рисунки построены при тех же параметрах, что и рис. 15.1; для рис. 15.4 $\sigma_0 = 0,2$, для рис. 15.5 $\sigma_0 = 0,05$, для рис. 15.6 $\sigma_0 = 0,01$. Из рисунков видно, что в окрестности номинального значения параметра $\bar{\omega}_0 = 1$ поведение кривых меняется достаточно существенно. При этом проигрыш в ОСШ при номинальном значении параметра небольшой.

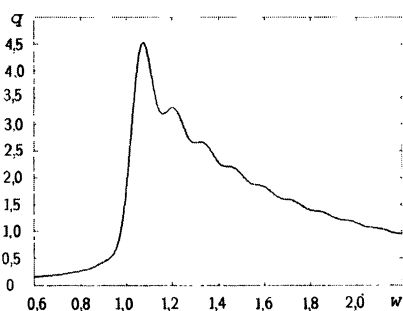


Рис. 15.6

Робастный фильтр Колмогорова-Винера. Рассмотрим построение и характеристики робастного варианта фильтра, минимизирующего дисперсию ошибки оценивания. Рассмотрим модель наблюдения следующего вида:

$$y(t) = s(t) + n(t), \quad (15.8)$$

где $s(t)$ и $n(t)$ — независимые стационарные случайные процессы с нулевыми средними значениями и энергетическими спектрами, равными $S_s(\omega)$ и $S_n(\omega)$ соответственно. Случайный процесс $s(t)$ описывает информативный процесс, а $n(t)$ — шум наблюдения. Пусть требуется найти линейный фильтр с частотной характеристикой $H(i\omega)$, при подаче на вход которого аддитивной смеси (15.8) на его выходе формируется оценка $\hat{s}(t)$ информативного случайного процесса $s(t)$ с наименьшей дисперсией $\sigma^2 = \mathbf{E}\{[s(t) - \hat{s}(t)]^2\}$.

Напомним основные соотношения винеровской фильтрации.

Пусть $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(i\omega)\}$ — импульсная характеристика фильтра. Тогда дисперсию сигнала на его выходе можно записать в виде

$$\sigma^2 = \mathbf{E}\{[s(t) - \hat{s}(t)]^2\} = \mathbf{E}\{s^2(t)\} + \mathbf{E}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t)h(t-\tau) d\tau\right]^2\right\} - 2\mathbf{E}\left\{s(t) \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)h(t-\tau) d\tau\right\}.$$

Первое слагаемое этого выражения представляет собой дисперсию информативного случайного процесса и по теореме Парсеваля

$$\mathbf{E}\{s^2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) d\omega.$$

Второе слагаемое представляет собой дисперсию случайного процесса на выходе фильтра, которая по теореме Винера–Хинчина и теореме Парсеваля равна

$$\mathbf{E}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t)h(t-\tau) d\tau\right]^2\right\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S_s(\omega) + S_n(\omega)] |H(i\omega)|^2 d\omega.$$

Учтем, что в последнем слагаемом $h(t)$ — детерминированная функция, а $\mathbf{E}\{s(t)y(\tau)\} = \mathbf{E}\{s(t)[s(\tau) + n(\tau)]\} = \mathbf{E}\{s(t)s(\tau)\} = R_s(t-\tau)$ в силу независимости информативного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$ и равенства нуля их математических ожиданий. С учетом этого преобразуем последнее слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R_s(t-\tau)h(t-\tau) d\tau &= \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega) e^{-i\alpha(t-\tau)} H(\beta) e^{-i\beta(t-\tau)} d\alpha d\beta d\tau. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha(t-\tau)} e^{-i\beta(t-\tau)} d\tau = 2\pi e^{-i\alpha t} e^{-i\beta t} \delta(\alpha + \beta),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, окончательно получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_s(t - \tau)h(t - \tau) d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(\omega)H(i\omega) d\omega.$$

Таким образом, после приведения подобных слагаемых имеем

$$\sigma^2 = \mathbf{E}\{[s(t) - \hat{s}(t)]^2\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_s(\omega)|1 - H(i\omega)|^2 + S_n(\omega)|H(i\omega)|^2\} d\omega. \quad (15.9)$$

Из этого уравнения сразу же следует, что частотная характеристика $H_0(\omega) = H(i\omega)$ фильтра Винера, минимизирующая дисперсию,

$$H_0(\omega) = \frac{S_s(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)}, \quad (15.10)$$

а минимальная ошибка оценивания

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_s(\omega)S_n(\omega)}{S_s(\omega) + S_n(\omega)} d\omega. \quad (15.11)$$

В случае, если наблюдение на входе имеет вид

$$y(t) = s'(t) + n'(t),$$

где характеристики независимых случайных процессов $s'(t)$ и $n'(t)$, отличаются от тех, для которых строится фильтр Колмогорова–Винера, то выражение (15.9) видоизменяется:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_{s'}(\omega)|1 - H(i\omega)|^2 + S_{n'}(\omega)|H(i\omega)|^2\} d\omega. \quad (15.12)$$

Согласно [112] частотная характеристика робастного варианта фильтра Колмогорова–Винера задается выражением:

$$H_r(i\omega) = \begin{cases} c_2 & \text{при } H_0(\omega) > c_2, \\ H_0(\omega) & \text{при } c_1 \leq H_0(\omega) \leq c_2, \\ c_1 & \text{при } H_0(\omega) < c_1, \end{cases} \quad (15.13)$$

где $H_0(\omega)$ — частотная характеристика фильтра Колмогорова–Винера для номинального случая, задаваемая выражением (15.10).

В качестве примера рассмотрим две модели искажения энергетического спектра информативного сигнала. Обозначим номинальные энергетические спектры сигнала и помехи соответственно

$$S_{s0}(\omega) = \frac{k_s^2}{1 + T_s 2\omega^2}; \quad S_n(\omega) = \frac{k_n^2}{1 + T_n 2\omega^2}.$$

В качестве первой модели примем возмущение энергетического спек-

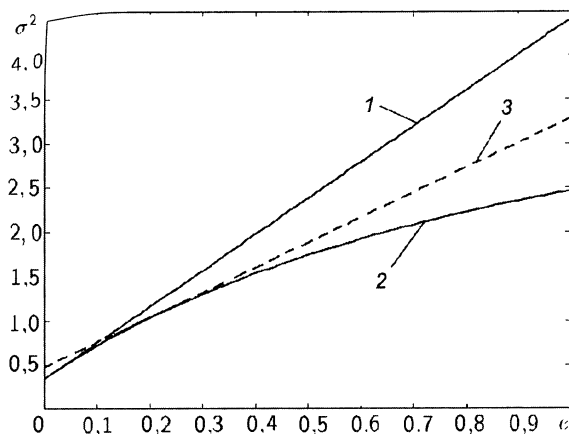


Рис. 15.7

тра информативного сообщения в виде

$$S_s(\omega) = (1 - e)S_{s0}(\omega) + eS_n(\omega), \quad e \in [0; 1]. \quad (15.14)$$

При $e = 0$ энергетический спектр сообщения совпадает с номинальным, а при $e = 1$ — с шумом.

На рис. 15.7 изображена зависимость дисперсии ошибки фильтрации от параметра e . Рисунок построен при следующих значениях параметров энергетических спектров: $k_s = 1$, $T_s = 10$, $k_n = 1$, $T_n = 1$. В этом случае $T_s > T_n$, т.е. информативный сигнал является узкополосным по сравнению с шумом.

Сплошная линия 1 соответствует фильтру, оптимальному при номинальных значениях параметров. Сплошная линия 2 соответствует оптимальному фильтру. Штриховая линия 3 соответствует робастному фильтру (15.13) при $c_1 = 0,2$, $c_2 = 0,8$. Как следует из рисунка, при малых значениях e робастный фильтр проигрывает неробастному варианту, однако при сближении спектров полезного сигнала и помехи, робастный вариант предпочтительнее. Кривая 3 дает нижнюю границу дисперсии ошибки оценивания, достижимой методами линейной фильтрации.

В качестве второй модели интересно рассмотреть вариацию параметров энергетического спектра информативного сигнала. Будем рассматривать параметр k_s изменяющимся и построим зависимость дисперсии на выходах фильтра Колмогорова–Винера, оптимизированного для конкретного значения k_s , и робастного варианта фильтра от этого параметра. Результаты расчетов изображены на рис. 15.8. Рисунок построен при следующих значениях параметров энергетических спектров: $T_s = 10$, $k_n = 1$, $T_n = 1$. Для робастного фильтра прини-

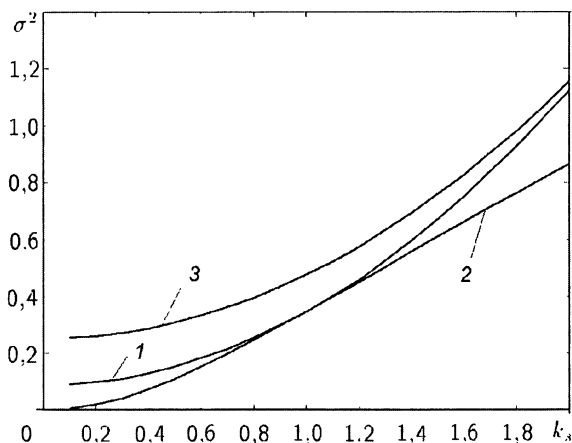


Рис. 15.8

малось $c_1 = 0,2$, $c_2 = 0,8$. Сплошная линия 1 соответствует фильтру, оптимальному при значении $k_s = 1$. Сплошная линия 2 соответствует оптимальному фильтру. Линия 3 соответствует робастному фильтру. При выбранных значениях параметров робастный фильтр проигрывает неробастному при значениях k_s , изображенных на графике и начинает давать выигрыш только при гораздо больших значениях k_s , начиная примерно с 10.

Построим теперь соответствующие кривые для случая широкоплоского по сравнению с шумом полезного сигнала. Результаты расчетов при значениях параметров $k_s = 1$, $T_s = 1$, $k_n = 5$, $T_n = 10$, $c_1 = 0,2$, $c_2 = 0,8$ изображены на рис. 15.9 и 15.10. Рис. 15.9 соответствует модели неопределенности (15.14), рис. 15.10 построен при изменяющемся значении параметра k_s . На рис. 15.9 кривая 1 соответствует фильтру, оптимальному при значении $k_s = 1$, кривая 2 — робастному фильтру при $c_1 = 0,2$, $c_2 = 0,8$. Из рисунка видно, что в этом случае уже при небольшом отклонении спектра информативного сигнала от номинального робастный фильтр обеспечивает лучшие характеристики. Кривая 3 на рисунке — дисперсия сигнала на выходе оптимального фильтра Колмогорова–Винера.

На рис. 15.10 кривая 1 соответствует фильтру, оптимальному при значении $k_s = 1$, кривая 3 соответствует робастному фильтру при $c_1 = 0,2$, $c_2 = 0,8$. Кривая 2 определяет предельно достижимую для линейного фильтра точность оценки. Из рисунка видно, что и в этом случае область изменения параметра k_s можно разделить на две подобласти, в которых робастный фильтр пригравает или выигрывает по сравнению с неробастным алгоритмом, хотя различия и меньше, чем на рис. 15.9.

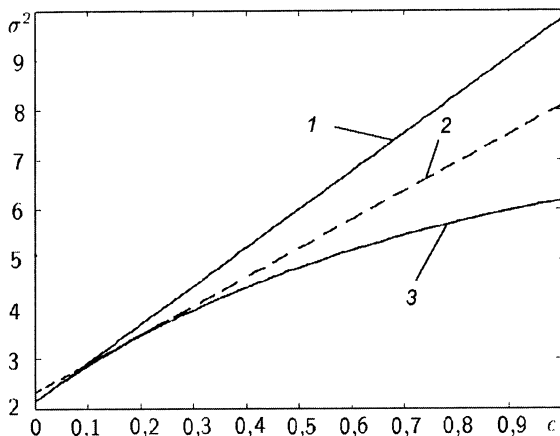


Рис. 15.9

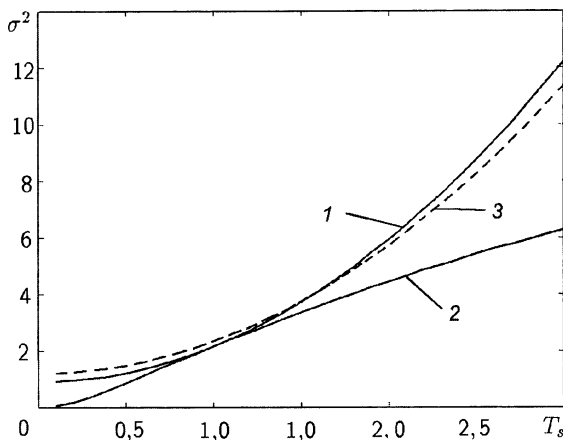


Рис. 15.10

Рассмотрим аналогичные кривые для значений параметров $k_s = 1$, $T_s = 10$, $k_n = 1$, $T_n = 30$, $c_1 = 0,2$, $c_2 = 0,7$, изображенные на рис. 15.11 и 15.12. Рис. 15.11 соответствует модели неопределенности (15.14), рис. 15.12 построен при изменяющемся значении параметра k_s . На рисунках кривые 1 соответствуют фильтру, оптимальному при значении $k_s = 1$, кривая 2 — робастному фильтру, кривая 3 — предельно достижимым характеристикам.

Из приведенных рисунков видно, что выбор коэффициентов c_1 и c_2 , определяющих характеристики робастного фильтра, позволяет перемещать точку в области параметров, для которой дисперсии оценок робастного и неробастного алгоритма совпадают.

Смысл параметров c_1 и c_2 допускает достаточно наглядное физи-

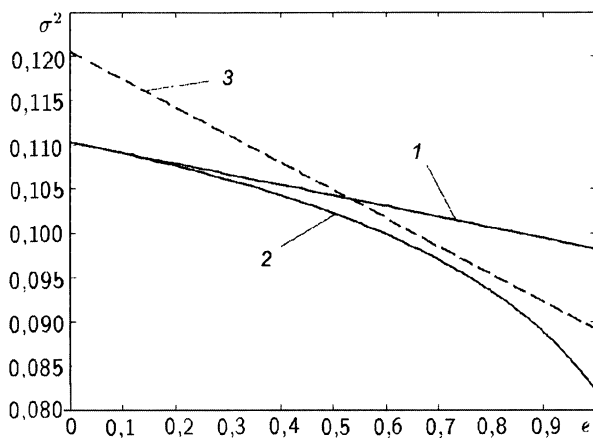


Рис. 15.11

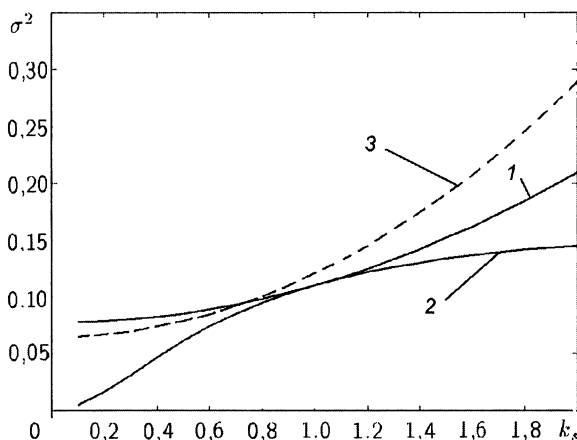


Рис. 15.12

ческое объяснение [112]. Частотная характеристика фильтра Колмогорова–Винера, как видно из (15.10), строится таким образом, что на частотах, где значение ОЦШ $S_s(\omega)/S_n(\omega)$ велико, значение частотной характеристики близко к единице. На частотах, где это отношение мало, частотная характеристика близка к нулю. Между этими предельными случаями усиление фильтра выбирается так, чтобы обеспечить компромисс между искажением информативного сигнала и подавлением аддитивного шума. Частотная характеристика робастного фильтра обладает схожими свойствами. Однако из-за спектральной неопределенности необходимо ограничить частотную характеристику сверху и снизу. Если коэффициент передачи исходного неробастного фильтра на определенной частоте близок к единице, то его ограничивают свер-

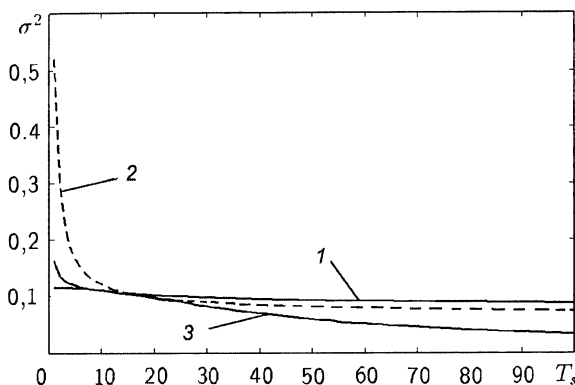


Рис. 15.13

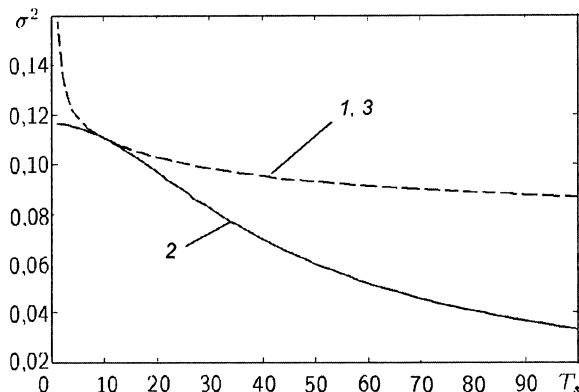


Рис. 15.14

ху значением c_2 , чтобы уменьшить влияние возможного попадания большей, чем в номинальном случае, шумовой составляющей на эту частоту. Поскольку для номинального случая имеется достаточный запас по ОСШ, то деградация характеристик робастного фильтра по этой причине будет не такой большой. С другой стороны, в области малых значений частотной характеристики исходного фильтра необходимо выбрать несколько большее усиление c_1 , для того чтобы не допустить чрезмерного подавления сигнала при неприведенном попадании его частотных компонент в эту область.

Проиллюстрируем теперь зависимость дисперсии ошибки от изменения ширины спектра информативного сигнала. Зависимость дисперсии ошибки оценивания от параметра T_s энергетического спектра сигнала приведена на рис. 15.13 для неробастного (кривая 1), робастного (кривая 3) и оптимального (кривая 2) алгоритмов фильтрации. Рисунок построен при значениях параметров $k_s = 1$, $k_n = 1$, $T_n = 30$,

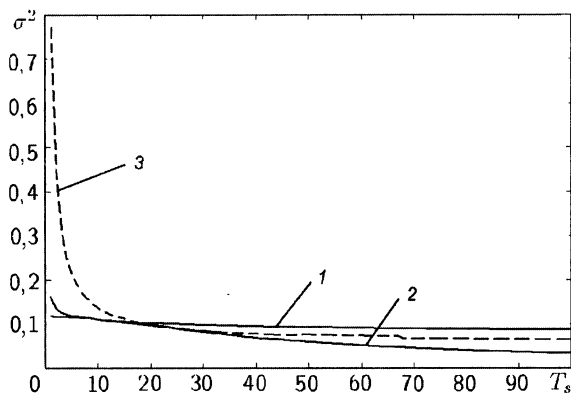


Рис. 15.15

$c_1 = 0,05$, $c_2 = 0,7$. Номинальный фильтр Колмогорова–Винера рассчитывался для значения параметра $T_s = 10$. Как видно из рисунка, при выбранных значениях параметров робастного фильтра он достаточно сильно проигрывает при малых значениях T_s неробастному алгоритму. При умеренно больших значениях T_s выигрыш от использования робастной процедуры незначителен. Следует отметить тот факт, что характеристика робастного фильтра практически совпадает с характеристикой оптимального при значении $T_s \approx 15$.

Результаты аналогичных расчетов приведены также на рис. 15.14 и 15.15. Рис. 15.14 построен при значениях $k_s = 1$, $k_n = 1$, $T_n = 30$, $c_1 = 0,1$, $c_2 = 0,9$. Рис. 15.15 построен при значениях $k_s = 1$, $k_n = 1$, $T_n = 30$, $c_1 = 0,1$, $c_2 = 0,6$. На рис. 15.14 величина c_1 выбрана достаточно малой, а c_2 достаточно большой, поэтому характеристики робастного и неробастного алгоритмов в этом случае совпадают.

Приложения

1. Основные законы распределения вероятностей

П1.1. Гауссовское распределение

Гауссовская плотность распределения вероятностей (ПРВ) (также известная как нормальная ПРВ) для скалярной случайной переменной x определяется как

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2 \right], \quad -\infty < x < \infty, \quad (\text{П1.1})$$

где μ — среднее значение (математическое ожидание); σ^2 — дисперсия СВ x . ПРВ обозначается как $N(\mu, \sigma^2)$, и говорят, что $x \sim N(\mu, \sigma^2)$, где « \sim » значит «распределен по». Если $\mu = 0$, то моменты равны

$$E(x^n) = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)\sigma^2, & n - \text{четное}; \\ 0, & n - \text{нечетное}. \end{cases} \quad (\text{П2.2})$$

Функция распределения при $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$ называется стандартной нормальной ПРВ и определяется как

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left(-\frac{1}{2}t^2 \right) dt. \quad (\text{П1.3})$$

Более удобно представление $Q(x) = 1 - \Phi(x)$, где

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp \left(-\frac{1}{2}t^2 \right) dt. \quad (\text{П1.4})$$

При этом $Q(x)$ называется правосторонней вероятностью и является вероятностью превышения данного значения. Ее значения показаны на рис. П1.1 в линейном и логарифмическом масштабе. Для расчетов используется программа Q.m пакета MATLAB или таблица [58]. Иногда используется следующее приближение:

$$Q(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \exp \left(-\frac{1}{2}x^2 \right),$$

которое также построено на рис. П1.2 вместе с точными значениями $Q(x)$. Приближение достаточно точно при $x > 4$.

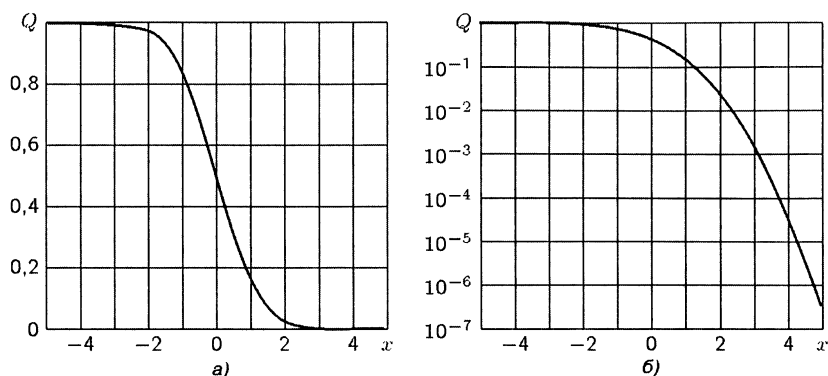


Рис. П1.1

Если известен закон распределения вероятности $P = Q(\gamma)$, то можно определить γ по заданной вероятности P . При записи в символьном виде имеем $\gamma = Q^{-1}(P)$, где Q^{-1} — обратная функция. Обратная функция должна существовать, так как $Q(x)$ монотонно убывает. Программа `Qinv.m` вычисляет функцию Q^{-1} и может быть использована для вычисления γ численно.

Многомерная гауссовская ПРВ случайного n -мерного вектора \mathbf{x} определяется в виде

$$W(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \det^{1/2}(\mathbf{K})} \times \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma})^T \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}) \right], \quad (\text{П1.5})$$

где $\boldsymbol{\gamma}$ — вектор средних значений; \mathbf{K} — ковариационная матрица.

Данная ПРВ обозначается как $N(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{K})$. Подразумевается, что \mathbf{K} — положительно определена и, следовательно, \mathbf{K}^{-1} существует.

Координаты вектора средних значений задаются в виде

$$[\boldsymbol{\gamma}]_i = E(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

а элементы ковариационной матрицы

$$[\mathbf{K}]_{ij} = E[(x_i - E(x_i))(x_j - E(x_j))], \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Сама ковариационная матрица имеет вид

$$\mathbf{K} = E[(\mathbf{x} - E(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - E(\mathbf{x}))^T].$$

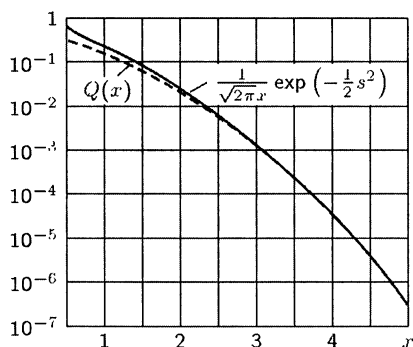


Рис. П1.2

Если $\mu = 0$, то все смешанные моменты нечетных порядков равны нулю. Моменты четных порядков находятся как комбинации моментов второго порядка. При $\mu = 0$ получим [154]

$$E(x_i x_j x_k x_l) = E(x_i x_j)E(x_k x_l) + E(x_i x_k)E(x_j x_l) + E(x_i x_l)E(x_j x_k). \quad (\text{П1.6})$$

П1.2. Распределение хи-квадрат (центральное)

ПРВ по закону хи-квадрат с ν степенями свободы задается следующим образом:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} \exp(-\frac{1}{2}x), & x > 0; \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\text{П1.7})$$

и обозначается как χ_ν^2 . Предполагается, что степени свободы ν являются целыми числами $\nu \geq 1$. Здесь $\Gamma(u)$ — гамма-функция, определяемая следующим образом:

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1} \exp(-t) dt. \quad (\text{П1.8})$$

Выражение $\Gamma(u) = (u-1)\Gamma(u-1)$ верно для любого u , $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ и $\Gamma(n) = (n-1)!$ для целых n . Для примера возьмем ПРВ, приведенную на рис. П1.3. По мере увеличения ν закон приближается к гауссовому. Следует заметить, что при $\nu = 1$ данная ПРВ равна бесконечности при $x = 0$.

ПРВ хи-квадрат ведет себя как ПРВ от x , где $x = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$, а $x_i \sim N(0, 1)$ и все x_i не зависят друг от друга и одинаково распределены. Их среднее значение и дисперсия равны соответственно

$$E(x) = \nu; \quad \text{var}(x) = 2\nu. \quad (\text{П1.9})$$

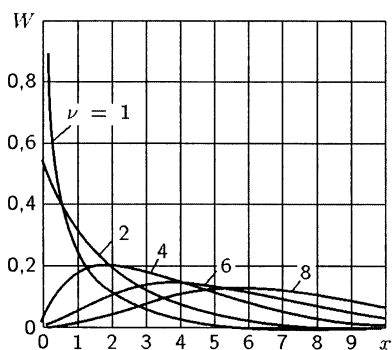


Рис. П1.3

Следует отметить случай $\nu = 2$. Приходим к следующему выражению:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(-\frac{1}{2}x), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\text{П1.10})$$

то есть к экспоненциальной ПРВ (рис. П1.3).

Правосторонняя вероятность для случайной переменной χ_ν^2 выражается следующим образом:

$$Q_{\chi_\nu^2}(x) = \int_x^\infty W(x) dx, \quad x > 0, \quad (\text{П1.11})$$

и можно показать [58], что для четных ν

$$Q_{\chi^2_\nu}(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \sum_{k=0}^{\nu/2-1} \frac{(x/2)^k}{k!}, \quad \nu > 2, \quad (\text{П1.12})$$

что при $c = \nu/2$; $m = x/2 = \chi^2/2$ совпадает с распределением Пуассона [58]. Для нечетных ν

$$Q_{\chi^2_\nu}(x) = \begin{cases} 2Q(\sqrt{x}), & \nu = 1, \\ 2Q(\sqrt{x}) + \frac{\exp(-x/2)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{(\nu-1)/2} \frac{(k-1)!(2x)^{k-1/2}}{(2k-1)!}, & \nu \geq 3. \end{cases} \quad (\text{П1.13})$$

П1.3. Закон хи-квадрат (не центральный)

Обобщим ПРВ χ^2_ν , просуммировав квадраты независимых и распределенных по гауссовому закону случайных переменных с ненулевыми средними значениями. А именно, если $x = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2$, где x_i независимы и $x_i \sim N(\mu_i, 1)$, то x имеет не центральную ПРВ, распределенную по закону хи-квадрат, с ν степенями свободы и параметром нецентральности $\lambda = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i^2$. Ее выражение имеет вид

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{(\nu-2)/4} \exp\left[-\frac{1}{2}(x + \lambda)\right] I_{\nu/2-1}(\sqrt{\lambda x}), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\text{П1.14})$$

где $I_r(u)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка r . Она выглядит следующим образом:

$$I_r(u) = \frac{(u/2)^r}{\sqrt{\pi}\Gamma(r+1/2)} \int_0^\pi \exp(u \cos \theta) \sin^{2r} \theta d\theta \quad (\text{П1.15})$$

и представляется в виде ряда

$$I_r(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u/2)^{2k+r}}{k!\Gamma(r+k+1)}. \quad (\text{П1.16})$$

Некоторые графики данной ПРВ (П1.14) приведены на рис. П1.4. Следует заметить, что по мере увеличения ν данная ПРВ приближается к гауссовой. Используя разложение в ряд для $I_r(u)$, данную ПРВ можно представить в виде ряда:

$$W(x) = \frac{x^{\nu/2-1}}{2^{\nu/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(x + \lambda)\right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x/4)^k}{k!\Gamma(\nu/2+k)}. \quad (\text{П1.17})$$

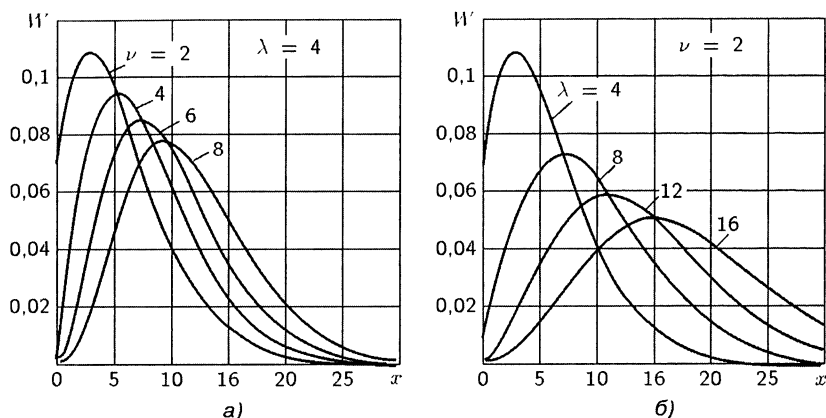


Рис. П1.4

Заметим, что при $\lambda = 0$ не центральная ПРВ, распределенная по закону хи-квадрат, вырождается в ПРВ, распределенную по простому закону хи-квадрат. Не центральная ПРВ, распределенная по закону хи-квадрат с ν степенями свободы и параметром нецентральности λ , записывается как $\chi'^2_{\nu}(\lambda)$.

Среднее значение и дисперсия СВ равны

$$E(x) = \nu + \lambda; \quad \text{var}(x) = 2\nu + 4\lambda. \quad (\text{П1.18})$$

Обозначим правостороннюю вероятность как

$$Q_{\chi'^2_{\nu}(\lambda)}(x) = \int_x^{\infty} W(t) dt, \quad x > 0. \quad (\text{П1.19})$$

П1.4. F -распределение (центральное)

ПРВ F -распределения характеризует СВ в виде отношения двух независимых случайных переменных, распределенных по закону хи-квадрат. А именно,

$$x = \frac{x_1/\nu_1}{x_2/\nu_2}, \quad (\text{П1.20})$$

где $x_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$, $x_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$, причем x_1, x_2 — независимы.

ПРВ F -распределения определяется следующим образом:

$$W(x) = \begin{cases} \frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2}}{B(\nu_1/2, \nu_2/2)} \frac{x^{\nu_1/2-1}}{[1 + (\nu_1/\nu_2)x]^{(\nu_1+\nu_2)/2}}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (\text{П1.21})$$

где $B(u, v)$ — бета-функция, которая выражается через гамма-фун

кцию

$$B(u, v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \quad (\text{П1.22})$$

Данная ПРВ обозначается как F_{ν_1, ν_2} , что значит F-ПРВ с ν_1 степенями свободы в числителе и ν_2 степенями свободы в знаменателе. Некоторые графики данной ПРВ приведены на рис. П1.5.

Правосторонняя вероятность обозначается как $Q_{F_{\nu_1, \nu_2}}(x)$ и может быть вычислена численно [58].

Среднее значение и дисперсия соответственно равны

$$E(x) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}, \quad \nu_2 > 2; \quad (\text{П1.23})$$

$$\text{var}(x) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}, \quad \nu_2 > 4. \quad (\text{П1.24})$$

Отметим, что при $\nu_2 \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \frac{x_1}{\nu_1} \sim \frac{\chi_{\nu_1}^2}{\nu_1}$, так как $x_2/\nu_2 \rightarrow 1$.

П1.5. F-распределение (не центральное)

Не центральная F-ПРВ получается в результате отношения не центральной случайной переменной, распределенной по закону хи-квадрат к центральной случайной переменной, распределенной по закону хи-квадрат:

$$x = \frac{x_1/\nu_1}{x_2/\nu_2}, \quad (\text{П1.25})$$

где $x_1 \sim \chi_{\nu_1}^2(\lambda)$ и $x_2 \sim \chi_{\nu_2}^2$, а x_1, x_2 — независимы. Говорят, что x имеет не центральную F-ПРВ. Она обозначается как $F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda)$, что читается как не центральная F-ПРВ с ν_1 степенями свободы в числителе, ν_2 — в знаменателе и параметром нецентральности λ . Данная ПРВ может быть представлена в виде ряда

$$W(x) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda/2)^k}{k!} \frac{(\nu_1/\nu_2)^{\nu_1/2+k}}{B[(\nu_1 + 2k)/2, \nu_2/2]} x^{\nu_1/2+k-1} \times \\ \times \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-(\nu_1+\nu_2)/2-k}. \quad (\text{П1.26})$$

При $\lambda = 0$ она сводится к центральной ПРВ (при $k = 0$ в (П1.26)).

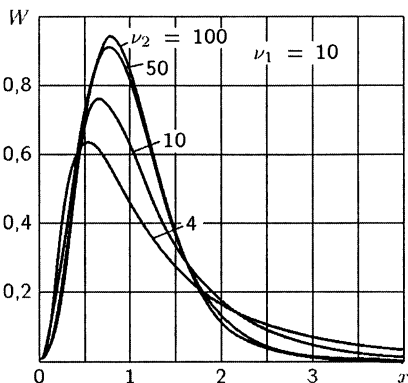


Рис. П1.5

Среднее значение и дисперсия СВ равны

$$E(x) = \frac{\nu_2(\nu_1 + \lambda)}{\nu_1(\nu_2 - 2)}, \quad \nu_2 > 2, \quad (\text{П1.27})$$

$$\text{var}(x) = 2 \left(\frac{\nu_2}{\nu_1} \right)^2 \frac{(\nu_1 + \lambda)^2 + (\nu_1 + 2\lambda)(\nu_2 - 2)}{(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}, \quad \nu_2 > 4. \quad (\text{П1.28})$$

Правосторонняя вероятность обозначается как $Q_{F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda)}(x)$ и требует численного оценивания. Также отметим, что при $\nu_2 \rightarrow \infty$ $F'_{\nu_1, \nu_2}(\lambda) \rightarrow \chi^2_{\nu_1}(\lambda)$.

П1.6. Закон Релея

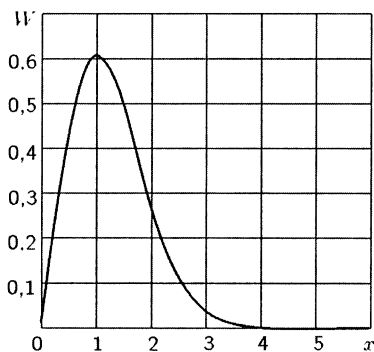


Рис. П1.6

Закон Релея является распределением вероятности СВ $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, где $x_1 \sim N(0, \sigma^2)$, $x_2 \sim N(0, \sigma^2)$, а x_1, x_2 — независимы. Эта ПРВ имеет вид

$$W(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (\text{П1.29})$$

На рис. П1.6 ПРВ изображена при $\sigma^2 = 1$. Среднее значение и дисперсия вычисляются достаточно просто [154]:

$$E(x) = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad \text{var}(x) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \sigma^2. \quad (\text{П1.30})$$

Правосторонняя вероятность $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = \int_x^\infty W(t) dt = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \quad (\text{П1.31})$$

Релеевская ПРВ получается из χ^2_2 -ПРВ, так как если x — случайная переменная, распределенная по закону Релея, то $x = \sigma\sqrt{y}$, где $y \sim \chi^2_2$. В результате правосторонняя вероятность может быть рассчитана следующим образом:

$$\begin{aligned} P\{x > \sqrt{\gamma'}\} &= P\{x/\sqrt{\sigma^2} > \sqrt{\gamma'}/\sqrt{\sigma^2}\} = P\{\sqrt{y} > \sqrt{\gamma'}/\sqrt{\sigma^2}\} = \\ &= P\{y > \gamma'/\sigma^2\} = Q_{\chi^2_2}(\gamma'/\sigma^2), \end{aligned} \quad (\text{П1.32})$$

или

$$P\{x > \gamma\} = Q_{\chi^2_2}(\gamma^2/\sigma^2), \quad (\text{П1.33})$$

откуда получаем (П1.31), так как $Q_{\chi^2_2}(x) = \exp(-x/2)$.

П1.7. Распределение Райса

ПРВ Райса является распределением вероятности СВ $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, где $x_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$, $x_2 \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ и x_1, x_2 — независимы. ПРВ записывается в виде

$$W(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + \alpha^2)\right] I_0\left(\frac{\alpha x}{\sigma^2}\right), & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad (\text{П1.34})$$

где $\alpha^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$ и $I_0(u)$ выражается формулой (П1.16) при $r = 0$ или

$$I_0(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(u \cos \theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(u \cos \theta) d\theta. \quad (\text{П1.35})$$

Графики ПРВ приведены на рис. П1.7 при $\sigma^2 = 1$.

При $\alpha^2 = 0$ она превращается в релеевскую ПРВ. Моменты СВ выражаются через вырожденные гипергеометрические функции [154].

Можно показать, что правосторонняя вероятность относится к вероятности не центральной случайной переменной, распределенной по закону хи-квадрат, и может быть оценена численно. Для этого произведем следующие действия:

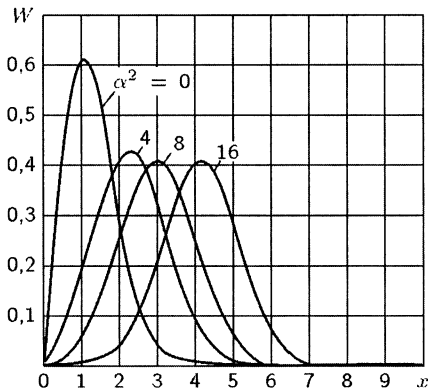


Рис. П1.7

$$\begin{aligned} P\{x > \sqrt{\gamma'}\} &= \\ = P\left\{\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sigma^2}} > \sqrt{\frac{\gamma'}{\sigma^2}}\right\} &= P\left\{\frac{x_1^2 + x_2^2}{\sigma^2} > \frac{\gamma'}{\sigma^2}\right\} = Q_{\chi'^2_2(\lambda)}\left(\frac{\gamma'}{\sigma^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{П1.36})$$

Таким образом,

$$P\{x > \gamma\} = Q_{\chi'^2_2(\lambda)}(\gamma^2/\sigma^2), \quad (\text{П1.37})$$

где $\lambda = (\mu_1^2 + \mu_2^2)/\sigma^2$.

П1.8. Квадратичная форма при законе Гаусса

Иногда требуется вычислить ПРВ $y = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, где \mathbf{A} — симметрическая $n \times n$ матрица, а \mathbf{x} — вектор гауссовского распределения и $\mathbf{x} \sim N(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{K})$. В общем случае это сложная задача. Рассмотрим некоторые простейшие случаи.

1. Если $\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}$ и $\boldsymbol{\gamma} = 0$, то

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{x} \sim \chi_n^2. \quad (\text{П1.38})$$

2. Если $\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}$ и $\gamma \neq 0$, то

$$\mathbf{x}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{x} \sim \chi_n'^2(\lambda), \quad (\text{П1.39})$$

где $\lambda = \gamma^T \mathbf{K}^{-1} \gamma$.

3. Если \mathbf{A} — идемпотентная матрица ($\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$) ранга r , $\mathbf{K} = \mathbf{I}$, а $\gamma = 0$, то

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \sim \chi_r^2. \quad (\text{П1.40})$$

П1.9. Распределение Вейбулла

В литературе имеется несколько разновидностей записи распределения Вейбулла.

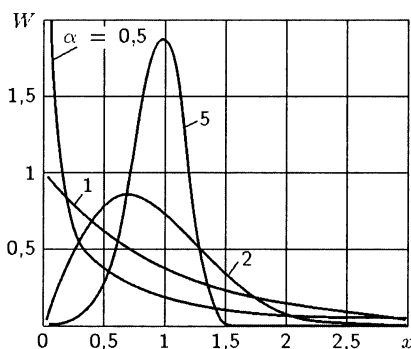


Рис. П1.8

1. [170]

$$\begin{aligned} W(x) &= \alpha(\lambda x)^{\alpha-1} e^{-(\lambda x)^\alpha}; \\ F(x) &= 1 - e^{-(\lambda x)^\alpha}, \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.41})$$

На рис. П1.8 изображена ПРВ $W(x)$ при $\lambda = 1$ [170]: 1 — $\alpha = 0,5$; 2 — $\alpha = 1$ (показательный закон); 3 — $\alpha = 2$ (закон Релея); 4 — $\alpha = 5$.

Среднее значение и дисперсия равны соответственно [170]

$$m_x = \lambda \Gamma(1 + 1/\alpha); \quad \sigma_x^2 = \lambda^2 [\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/\alpha)]. \quad (\text{П1.42})$$

Мода

$$x_{\text{mod}} = \lambda(\alpha - 1)^{1/\alpha}.$$

2. [85, 175]

$$W(x) = \lambda_0 \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda_0 x^\alpha}; \quad x \geq 0, \alpha > 0, \lambda_0 > 0; \quad (\text{П1.43})$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda_0 x^\alpha};$$

$$m_x = \lambda_0 \Gamma(1 + 1/\alpha); \quad \sigma_x^2 = (\lambda_0)^{-2/\alpha} [\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/\alpha)];$$

$$x_{\text{mod}} = \begin{cases} 0, & \alpha \leq 1; \\ (\lambda_0)^{-1/\alpha} (1 - 1/\alpha)^{1/\alpha}, & \alpha \geq 1; \end{cases}$$

$$m_k = E(x^k) = (\lambda_0)^{-k/\alpha} - \alpha \Gamma(1 + k/\alpha).$$

3. [157, 173]

$$W(x) = \frac{\lambda}{b} \left(\frac{x}{b} \right)^{\lambda-1} e^{-(x/b)^\lambda}; \quad x > 0, b > 0, \lambda > 0, \quad (\text{П1.44})$$

где b — параметр масштаба, λ — параметр формы, эта форма распределения Вейбулла эквивалентна предыдущей, если взять $\lambda_0 = \lambda/b$ и $\alpha = \lambda$.

4. [156]

$$W(x) = \frac{\alpha \ln 2}{x_m} \left(\frac{x}{x_m} \right)^{\alpha-1} e^{-\ln 2 (x/x_m)^\alpha}, \quad x \geq 0, \alpha > 0; \quad (\text{П1.45})$$

$$m_x = E(x) = \frac{x_m}{(\ln 2)^{1/\alpha}} \Gamma(1 + 1/\alpha);$$

$$\sigma_x^2 = \left[\frac{x_m}{(\ln 2)^{1/\alpha}} \right]^2 [\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/\alpha)];$$

x_n — медиана распределения; α — параметр формы, указывает степень асимметрии ПРВ.

П1.10. Распределение Стьюдента

Распределение Стьюдента с ν степенями свободы (t -распределение) имеет вид

$$W(x) = k_\nu \left(1 + \frac{x^2}{\nu} \right)^{-(\nu+1)/2} = \frac{k_\nu}{\sqrt{(1 + x^2/\nu)^{\nu+1}}}, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

где $k_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$.

Функция распределения

$$S_\nu(t) = P(t_\nu < t) = k_\nu \int_{-\infty}^t \left(1 + \frac{x^2}{\nu} \right)^{-(\nu+1)/2} dx.$$

В частности, при $\nu = 1$ $S_1(t) = 0,5 + \pi^{-1} \arctg t$, что является функцией распределения Коши.

Справедливы свойства:

1) $S_\nu(t) + S_\nu(-t) = 1$, т.е. ПРВ $W(x)$ симметрична относительно нуля (рис. П1.9) [188];

2) $P(t_\nu < 0) = P(t_\nu > 0) = S_\nu(0) = 0,5$.

Выполняется соотношение

$$A(t | \nu) = P(|t_\nu| < t) = k_\nu \int_{-t}^t \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-(\nu+1)/2} dx = 2S_\nu(t) - 1.$$

Если $\nu \rightarrow \infty$, то распределение Стьюдента сходится к нормаль-

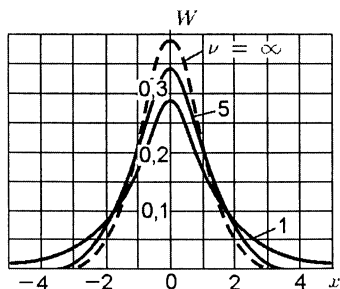


Рис. П1.9

ному распределению $N(0, 1)$:

$$S_\nu(t) \rightarrow S_\infty(t) = \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dx.$$

Поэтому

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} A(t | \nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^t e^{-u^2/2} du = A(t).$$

Моменты СВ t_ν $m_n = E(t_\nu^n)$ существуют только при $n < \nu$, при этом моменты нечетного порядка равны нулю, а моменты четного порядка выражаются формулой [37, 58]

$$\mu_{2n} = m_{2n} = \nu^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(\nu-2)(\nu-4) \cdots (\nu-2n)}, \quad \nu > 2n.$$

Отсюда в частном случае получается выражение для дисперсии

$$D(t_\nu) = \mu_2 = \frac{\nu}{\nu-2}, \quad \nu > 2.$$

Утверждение 1. Распределение Стьюдента является распределением вероятностей СВ $t_\nu = X/\sqrt{\chi^2/\nu}$, где $X \sim N(0, 1)$, причем X и χ^2 независимы.

Доказательство этого утверждения приводится, в частности, в [154].

Таким образом, справедливо соотношение [58]

$$\begin{aligned} A(t | \nu) &= P \left\{ \left| \frac{X}{\sqrt{\chi^2/\nu}} \right| \leq t \right\} = \\ &= \left[\sqrt{\nu} B \left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2} \right) \right]^{-1} \int_{-t}^t \left(1 + \frac{x^2}{\nu} \right)^{(\nu+1)/2} dx = 1 - I_u \left(\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

где $u = \nu/(\nu + t^2)$; $I_u(a, b)$ — неполная бета-функция.

Пример П1.1 [170]. Пусть X_1, \dots, X_n — независимые одинаково нормально распределенные СВ с параметрами a и σ [$X_i \sim N(a, \sigma^2)$], причем a и σ независимы. Тогда статистики

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

являются наилучшими несмещенными оценками параметров a и σ^2 , причем \bar{X} и s^2 статистически независимы.

Так как СВ $Y = \sqrt{n}(\bar{X} - a)/\sigma$ подчиняется стандартному нормальному закону [$Y \sim N(0, 1)$], а СВ $\frac{n-1}{\sigma^2} s^2 = \chi_{n-1}^2$ распределена по закону хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы, то в силу их независи-

мости и согласно приведенному утверждению 1 дробь

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)/\sigma}{\sqrt{\chi_{n-1}^2/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - a)}{s}$$

подчиняется распределению Стьюдента с $\nu = n - 1$ степенями свободы.

Нецентральное t -распределение [58]

$$P(t' | \nu, \delta) = \left[\sqrt{\nu} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \right]^{-1} \int_{-\infty}^t \left(\frac{\nu}{\nu + x^2} \right)^{(\nu+1)/2} \times \\ \times \exp \left[-\frac{\nu \delta^2}{2(\nu + x^2)} \right] H h_{\nu} \left(-\frac{\delta x}{\sqrt{\nu^2 + x^2}} \right) dx,$$

где $x = \frac{\nu}{\nu + t'^2}$; $H h_{\nu}(u) = \frac{1}{\nu!} \int_u^{\infty} (t - u)^{\nu} e^{-t^2/2} dt$; δ — параметр нецентральности.

Аппроксимация нецентрального t -распределения [58]

$$P(t' | \nu, \delta) \approx \Phi(x), \quad x = \frac{t'(1 - 1/4\nu) - \delta}{1 + \sqrt{t'^2/2\nu}}.$$

1.11. Q -функция Маркума

Функция Маркума $Q = Q_{\nu}(\alpha, \gamma)$ представляет собой правостороннюю вероятность СВ, распределенную по закону Райса и является эквивалентом формулы (П1.37) [см. (7.14)].

Запишем распределение Райса (иногда оно называется нецентральным распределением Релея) в виде

$$q(\alpha, x) = x \exp \left[-\frac{1}{2}(x^2 + \alpha^2) \right] I_0(\alpha x), \quad x \geq 0. \quad (\text{П1.46})$$

Тогда правосторонняя вероятность

$$Q(\alpha, \beta) = P(x > \beta) = \int_{\beta}^{\infty} q(\alpha, x) dx \quad (\text{П1.47})$$

называется Q -функцией Маркума. Ее свойства:

$$Q(\alpha, 0) = 1; \quad (\text{П1.48})$$

$$Q(0, \beta) = e^{-\beta^2/2}. \quad (\text{П1.49})$$

Положив $\beta = 0$, по условию нормировки $Q(\alpha, 0) = 1$ (П1.48) получим значение интеграла

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2/2} I_0(bx) dx = \frac{1}{a} e^{b^2/2a}. \quad (\text{П1.50})$$

Используя эту формулу, можно получить значение интеграла [22]

$$\int_0^{\infty} e^{zx^2} q(\alpha, x) dx = \frac{1}{1-2z} \exp\left(\frac{\alpha^2 z}{1-2z}\right), \quad (\text{П1.51})$$

который является производящей функцией полинома Лагерра $L_n(x)$ [178, с. 190, ф-ла (17)]

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n = \frac{1}{1-z} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right); \quad (\text{П1.52})$$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Отсюда находятся моменты СВ X четного порядка [22]

$$E(X^{2n}) = 2^n n! L_n\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right). \quad (\text{П1.53})$$

В частных случаях [22]

$$E(X^2) = 2 + \alpha^2; \quad E(X^4) = 8 + 8\alpha^2 + \alpha^4.$$

Справедливы соотношения [22]:

$$Q(\alpha, \beta) = A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n I_n(\alpha\beta). \quad (\text{П1.54})$$

$$Q(\alpha, \beta) = 1 - A \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n I_n(\alpha\beta), \quad (\text{П1.55})$$

где $A = \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]$.

Графики Q -функция Маркума изображены на рис. П1.10 и П1.11, где параметром кривых служит ОСШ $d^2 = \alpha^2/2$.

Наряду с Q -функцией Маркума в теории обнаружения используется и так называемая обобщенная функция Маркума [22] N -го порядка

$$Q_N(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} x \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{N-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + \alpha^2)\right] I_{N-1}(\alpha x) dx, \quad (\text{П1.56})$$

где $I_n(z)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка.

Эта функция может быть записана в эквивалентной форме

$$Q_N(S, y) = Q_N(\sqrt{2S}, \sqrt{2y}) = \int_y^{\infty} \left(\frac{v}{S}\right)^{(N-1)/2} e^{-S-v} I_{N-1}(2\sqrt{Sv}) dv. \quad (\text{П1.57})$$

При этом ПРВ имеет вид

$$W(v) = (v/S)^{(N-1)/2} e^{-S-v} I_{N-1}(2\sqrt{Sv}), \quad v \geq 0. \quad (\text{П1.58})$$

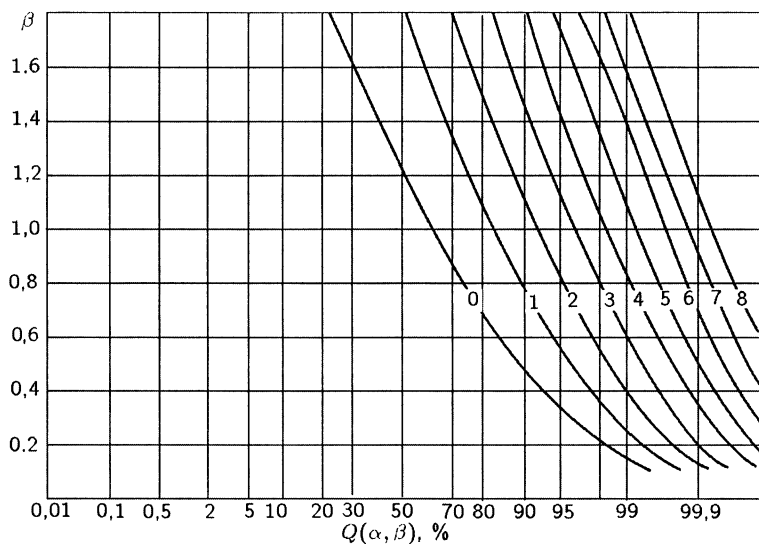


Рис. П1.10

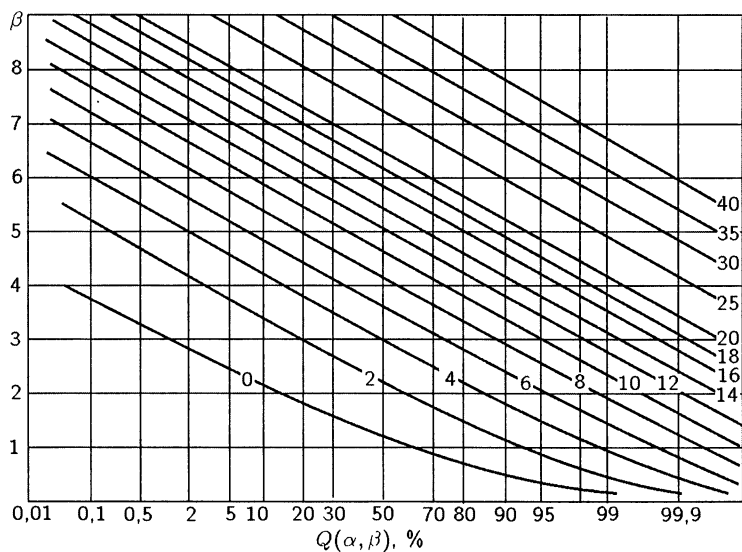


Рис. П1.11

При переходе от (П1.56) к (П1.57) использовались подстановки

$$v = \frac{1}{2}x^2, \quad y = \frac{1}{2}\beta^2, \quad S = \frac{1}{2}\alpha^2.$$

Производящая функция моментов СВ v имеет вид преобразова-

ния Лапласа от ПРВ (П1.58) [22]:

$$\begin{aligned} h(z) &= E(e^{-zv}) = \int_0^\infty e^{-zv} e^{-S-v} \left(\frac{v}{S}\right)^{(N-1)/2} I_{N-1}(2\sqrt{Sv}) dv = \\ &= \frac{e^{-S}}{(1+z)^N} \exp\left(\frac{S}{1+z}\right) = \frac{1}{(1+z)^N} \exp\left(-\frac{zS}{1+z}\right). \end{aligned} \quad (\text{П1.59})$$

Справедливы соотношения [22]

$$Q_N(\alpha, \beta) = A \sum_{k=1-N}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k I_k(\alpha\beta), \quad (\text{П1.60})$$

$$Q_N(\alpha, \beta) = Q(\alpha, \beta) + A \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n I_n(\alpha\beta), \quad (\text{П1.61})$$

где $A = \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right]$.

П1.12. Гамма-распределение

Плотность распределения СВ X имеет вид

$$W(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0. \quad (\text{П1.62})$$

Принадлежность СВ X к гамма-распределению обозначается так: $X \sim G(\alpha, \beta)$.

Среднее значение и дисперсия СВ X выражаются в виде

$$E(x) = m_x = \alpha\beta, \quad \text{var } X = \sigma_x^2 = \alpha\beta^2. \quad (\text{П1.63})$$

Моментная функция СВ X

$$\Phi(t) = 1/(1 - \beta t)^\alpha. \quad (\text{П1.64})$$

Иногда удобно записывать гамма-распределение в виде [153]

$$W(x) = \gamma x^{b-1} e^{-cx} 1(x), \quad \gamma = \frac{c^b}{\Gamma(b)}. \quad (\text{П1.65})$$

При $b = 1$, $\Gamma(1) = 1$, и гамма-распределение вырождается в показательное распределение

$$W(x) = ce^{-cx}, \quad (\text{П1.66})$$

или по (П1.62) (при $\alpha = 1$)

$$W(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}. \quad (\text{П1.67})$$

Согласно (П1.64) для показательного распределения моментная функция имеет вид

$$\Phi(t) = 1/(1 - \beta t). \quad (\text{П1.68})$$

Замечание 1. Пусть имеется сумма независимых одинаково распределенных СВ

$$Z = \sum_{i=1}^N X_i, \quad (\text{П1.69})$$

причем каждое слагаемое распределено по показательному закону с одним и тем же параметром β . Тогда ПРВ суммы — это гамма-распределение

$$W(z) = \frac{1}{(N-1)!\beta^N} x^{N-1} e^{-x/\beta}. \quad (\text{П1.70})$$

Функция распределения СВ X выражается через неполную гамма-функцию [170] (при $\beta = 1$, $\alpha = 1$)

$$G_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^x y^{\lambda-1} e^{-y} dy. \quad (\text{П1.71})$$

Гамма-распределение используется в теории обнаружения сигналов при их некогерентной обработке.

Так, например, в (14.35) статистики D_c имеют показательное распределение, а сама сумма z имеет гамма-распределение (П1.70) (при $1/\beta = \lambda$). Поэтому ВЛТ Q_0 определяется формулой

$$Q_0 = \int_{h_0}^{\infty} W_0(x) dx = \int_{h_0}^{\infty} \frac{\lambda^N}{(N-1)!} x^{N-1} e^{-\lambda x} dx = \int_{h_0}^{\infty} \frac{y^{N-1}}{(N-1)!} e^{-y} dy, \quad (\text{П1.72})$$

где $h_0 = \lambda\gamma$.

Формулу (П1.72) можно представить в виде [22]

$$Q_0 = \int_{h_0}^{\infty} W_0(y) dy = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h_0^k}{k!} e^{-h_0} = 10^{-p}. \quad (\text{П1.73})$$

Для ВЛТ $Q_0 = 10^{-p}$, где $p = \overline{1, 12}$, и при $1 \leq N \leq 150$ получены численные значения порога h , которые сведены в таблицы [21, 180, 181].

Замечание 2. В форме Пирсона неполная гамма-функция имеет вид [22, 23]

$$I(u, p) = \frac{1}{p!} \int_0^{u\sqrt{p+1}} x^p e^{-x} dx, \quad (\text{П1.74})$$

и тогда ВЛТ может быть выражена через эту функцию [22]

$$Q_0 = 1 - I(N^{-1/2}h_0, N-1). \quad (\text{П1.75})$$

При быстром релеевском фединге, когда флуктуации амплитуды

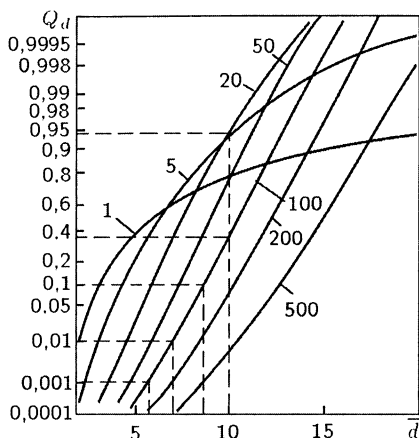


Рис. П1.12

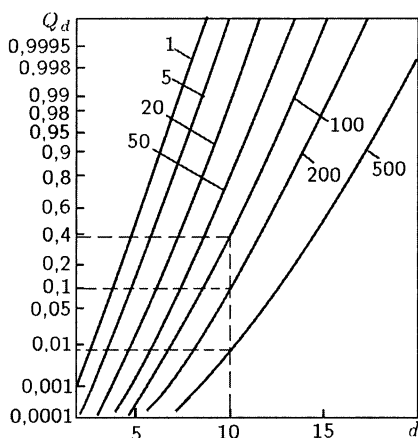


Рис. П1.13

независимы от импульса к импульсу (случай 2 Сверлинга) вероятность обнаружения Q_d находится по формуле, аналогичной (П1.73) [21, 22]

$$Q_d = \int_{h_1}^{\infty} W_1(x) dx = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h_1^k}{k!} e^{-h_1}, \quad (\text{П1.76})$$

где $h_1 = h_0/(1 + s^2)$; s^2 — среднее частное ОСШ по мощности; h_0 — порог, определяемый по (П1.73) [21, 180, 181].

Сравнивая (П1.76) и (П1.12), замечаем, что справедливо равенство [58]

$$Q_d = Q(\chi^2 | \nu) = \sum_{k=0}^{c-1} e^{-m} \frac{m^k}{k!}; \quad m = \chi^2/2, \quad c = \nu/2. \quad (\text{П1.77})$$

На рис. П1.12 изображена зависимость $Q_d = f(\bar{d})$ [22] при $Q_0 = 10^{-6}$, $N = \text{var}$, $\bar{d} = \sqrt{\langle D^2 \rangle}$, $\langle D^2 \rangle = 2Ns^2$ — среднее общее ОСШ.

Величину ОСШ \bar{d} можно определить по тем же таблицам, что и порог h_0 [21, 180, 181]. Например, задаваясь $Q_d = 10^{-p}$, $p = 1, 2, 3$, по таблицам при $N = 100$ находим соответственно $h_1 = 133; 124,7; 133,77$, что при $h_0 = 154,9$ (при $Q_0 = 10^{-6}$, $N = 100$) находим $s^2 = 0,37; 0,24; 0,1587$. Тогда получим ОСШ $\bar{d} = 8,6; 6,9; 5,6$ (см. штриховые линии на рис. П1.11).

Пример П1.2. Используем таблицы правосторонней вероятности $Q(\chi^2 | \nu)$ хи-квадрат распределения [34, 58] при $N = c = 20$, $\nu = 2c = 40$; $m = h_0/(1 + s^2) = h_1$, когда при $Q_0 = 10^{-6}$, $h_0 = 48,8$. Положив $\bar{d} = 10$, находим $s^2 = 2,5$, тогда $h_1 = m = 13,9 \approx 14$ и $\chi^2 = 2m = 28$. При $\nu = 40$, $\chi^2 = 28$ по [38] получим $Q_d = Q(28 | 40) = 0,9235$ (см. штриховые линии на рис. П1.12).

При больших N для приближенных расчетов $Q_d = Q(\chi^2 | \nu)$ можно пользоваться приближенными соотношениями [58]

$$Q(\chi^2 | \nu) \approx Q(x_1), \quad x_1 = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1}, \quad \nu > 100, \quad (\text{П1.78})$$

$$Q(\chi^2 | \nu) \approx Q(x_2), \quad x_2 = 3\sqrt{\frac{\nu}{2}} \left(\sqrt[3]{\frac{\chi^2}{\nu}} - 1 + \frac{2}{9\nu} \right), \quad \nu > 30. (\text{П1.79})$$

Для сравнения с рассмотренным случаем быстрого фединга приводится рис. П1.13, на котором изображены графики зависимости $Q_d = f(d)$, $d = \sqrt{S}$ [22], S — общее ОСШ пачки из N импульсов при $Q_0 = 10^{-6}$.

Зависимости рис. П1.13 характеризуют прием нефедингующего сигнала при релеевском распределении помехи. Сравнивая рис. П1.12 и П1.13, замечаем, что при значительных величинах N зависимости Q_d от ОСШ на рис. П1.12 и П1.13 практически совпадают (см. штриховые линии на рис. П1.12 и П1.13), что означает, что при больших N ослабляется вредное влияние фединга на вероятность обнаружения.

Произведем расчет по формуле (П1.78). Возьмем $N = 100$, $\bar{d} = 10$, получим $s^2 = 0,5$ при $Q_0 = 10^{-6}$ (рис. П1.12), $h_0 = 154,9 = 155$, тогда $h_1 = 103,33$, $\chi^2 = 2h_1$, $\nu = 2c = 200$, $x_1 = 20,33 - 19,77 = 0,36$, $Q(x_1) = Q(0,36) \approx 0,36$. Аналогично по формуле (П1.79) получим $x_2 = 0,33$ и $Q(x_2) \approx 0,37$ (см. штриховые линии на рис. П1.12). В условиях примера П1.2 при $N = 20$, $\nu = 40$, $\chi^2 = 28$, получим $Q_d = Q(-1,5) = \Phi(1,5) = 0,9332$, т.е. величину близкую к точной.

П1.13. Бета-распределение

Бета-распределение (рис. П1.14) имеет вид

$$W(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{П1.80})$$

где $1 \leq \alpha < \infty$, $1 \leq \beta < \infty$, $B(\alpha, \beta)$ — бета-функция.

Среднее значение и дисперсия СВ X

$$m_x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta},$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \quad (\text{П1.81})$$

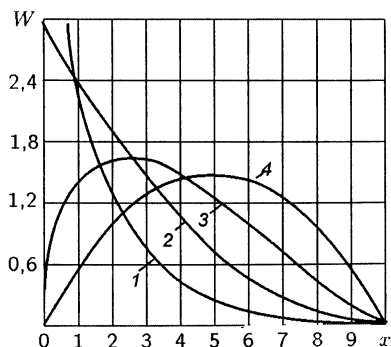


Рис. П1.14

Функция распределения СВ X выражается через неполную бета-функцию [58, 170]

$$I_x(a, b) = B_{a,b}(x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (\text{П1.82})$$

Замечание 3. Функция бета-распределения $B_{a,b}(x)$ позволяет вычислять значения биномиального распределения согласно соотношению [170] ($a = m$; $b = n$):

$$B_{n-m, m+1} = \sum_{k=0}^m C_n^k p^k (1-p)^{n-k}. \quad (\text{П1.83})$$

2. Аналитический сигнал

Пусть $f(t)$ некоторый вещественный сигнал. Его Фурье-спектр

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{П2.1})$$

Справедливо свойство

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = F^*(\omega). \quad (\text{П2.2})$$

Рассмотрим вещественный сигнал $f(t)$ со спектром $F(\omega)$. По $f(t)$ можно получить сигнал $f_a(t)$, который сохраняет всю информацию в $F(\omega)$ при $f = \omega/2\pi \geq 0$, но который не будет иметь никакой избыточной информации при $f < 0$. Простейший такой сигнал имеет спектр

$$F_a(\omega) = F(\omega)[1 + \operatorname{sgn}(f)], \quad (\text{П2.3})$$

где

$$\operatorname{sgn}(f) = \begin{cases} 1, & f > 0; \\ 0, & f = 0; \\ -1, & f < 0. \end{cases} \quad (\text{П2.4})$$

Тогда

$$F_a(\omega) = \begin{cases} 2F(\omega) & \text{при } f > 0; \\ F(0) & \text{при } f = 0; \\ 0 & \text{при } f < 0. \end{cases} \quad (\text{П2.5})$$

Сигнал $f_a(t)$ со спектром (П2.5) называется аналитическим сигналом, соответствующим вещественному сигналу $f(t)$.

Поскольку $f_a(t)$ имеет спектр (П2.5), который не удовлетворяет условию симметрии (П2.2), требуемому для вещественного сигнала, то аналитический сигнал является комплексным. Сигнал $f_a(t)$ является аналитической функцией переменной t , если t взять комплексной $t = t' + it''$. Это видно из следующей записи:

$$f_a(t) = 2 \int_0^{\infty} [F_1(\omega) + iF_2(\omega)] e^{i\omega t} d\omega = f_{a1}(t) + if_{a2}(t),$$

где $F(\omega)$ и $f_a(t)$ разделены на вещественную и мнимую части.

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t,$$

легко показать, что удовлетворяются уравнения Коши-Римана

$$\frac{d}{dt'} f_{a1} = \frac{d}{dt''} f_{a2}; \quad \frac{d}{dt''} f_{a1} = -\frac{d}{dt'} f_{a2}.$$

Следовательно, $f_a(t)$ — аналитическая функция комплексной переменной t .

Из определения (П2.3) вытекает важное свойство аналитического сигнала, а именно:

$$f(t) = \operatorname{Re}[f_a(t)]. \quad (\text{П2.6})$$

Докажем это свойство. Запишем новую функцию

$$g(t) = \operatorname{Re}[f_a(t)] = \frac{1}{2}[f_a(t) + f_a^*(t)] \quad (\text{П2.7})$$

Запишем преобразование Фурье

$$\mathfrak{F}[f_a^*(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_a^*(t) e^{-i\omega t} dt = [F_a(-\omega)]^*,$$

так как

$$F_a(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_a(t) e^{i\omega t} dt.$$

Поэтому с учетом (П2.3) по (П2.7) получим

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \mathfrak{F}[g(t)] = \frac{1}{2}\{F_a(\omega) + [F_a(-\omega)]^*\} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{cases} 2F(\omega) + 0 & \text{при } f > 0 \\ F(0) + F(0) & \text{при } f = 0 \end{cases} = F(\omega) \quad \text{при } f \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку $g(t)$ вещественная функция и так как спектр $G(\omega) = F(\omega)$ при неотрицательных частотах, свойство симметрии (П2.2) гарантирует равенство $G(\omega) = F(\omega)$ повсюду, так что $g(t) = f(t)$ и равенство (П2.6) тем самым доказано.

Пример П2.1. Пусть задан вещественный сигнал

$$f(t) = \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right)^2, \quad (\text{П2.8})$$

который имеет спектр

$$F(\omega) = 1 - |f|, \quad |f| \leq 1.$$

Спектр соответствующего аналитического сигнала

$$F_a(\omega) = 2(1 - f), \quad 0 < f \leq 1; \quad F_a(0) = F(0) = 1.$$

Тогда

$$f_a(t) = 2 \int_0^1 (1-f) e^{i\omega t} df = \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t} \right)^2 + \frac{i}{\pi t} \left(1 - \frac{\sin 2\pi t}{2\pi t} \right). \quad (\text{П2.9})$$

По (П2.6) $f(t) = \text{Re}[f_a(t)]$. В этом примере $F_a(\omega)$ терпит разрыв при $\omega = 0$. Преобразование Фурье от (П2.9) представляет собой интеграл, сходящийся к $[F_a(0^+) - F_a(0^-)]/2$. Определение (П2.4) соответствует этой величине.

Узкополосные сигналы

Основное применение аналитического сигнала — его использование для узкополосных сигналов. Узкополосный сигнал возникает при модуляции несущей информационным сигналом. Рассмотрим сигнал

$$f(t) = a(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)] \quad (\text{П2.10})$$

Хотя любой сигнал $f(t)$ может быть представлен в форме (П2.10), будем иметь в виду, что $a(t) > 0$ и изменяется медленно по сравнению с периодом несущей $1/f_c$.

Полезно записать (П2.10) в виде

$$f(t) = \text{Re}[\tilde{f}(t)e^{i\omega_c t}], \quad (\text{П2.11})$$

где величина

$$\tilde{f}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)} = x(t) + iy(t) \quad (\text{П2.12})$$

называется комплексной огибающей вещественного сигнала $f(t)$. Ее модуль — *вещественная огибающая*

$$a(t) = |\tilde{f}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}. \quad (\text{П2.13})$$

Фаза представляет угловую модуляцию сигнала (П2.10)

$$\varphi(t) = \arctg[y(t)/x(t)]. \quad (\text{П2.14})$$

Предположим, что вещественная огибающая $a(t)$ — функция амплитудной модуляции колебания (П2.10) — имеет полосу B , которая меньше, чем несущая частота f_c : $B/2 < f_c$, как показано на рис. П2.1,а ($A(\omega) = \mathfrak{F}[a(t)]$).

По выражению (П2.10) находим спектр модулированного колебания (рис. П2.1,б)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \mathfrak{F} \left[\frac{a}{2} e^{i(\omega_c t + \varphi)} + \frac{a}{2} e^{-i(\omega_c t + \varphi)} \right] = \frac{1}{2} \mathfrak{F}[\tilde{f} e^{i\omega_c t} + \tilde{f}^* e^{-i\omega_c t}] = \\ &= \frac{1}{2} \{ \tilde{F}(\omega_c - \omega) + \tilde{F}^*[-(\omega + \omega_c)] \}, \end{aligned} \quad (\text{П2.15})$$

так как

$$\mathfrak{F}[\tilde{f}^* e^{-i\omega_c t}] =$$

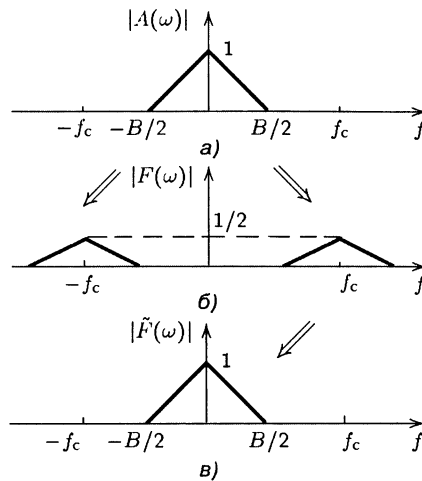


Рис. П2.1

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^* e^{-i(\omega + \omega_c)t} dt = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f} e^{i(\omega + \omega_c)t} dt \right]^* = \tilde{F}^* [-(\omega + \omega_c)].$$

По (П2.5) с учетом (П2.15) получим

$$F_a(\omega) = 2F(\omega) = \tilde{F}(\omega - \omega_c).$$

Отсюда

$$\tilde{F}(\omega) = F_a(\omega + \omega_c) \quad (\text{П2.16})$$

(рис. П2.1, в). Тогда

$$\tilde{f}(t) = f_a(t) e^{-i\omega_c t}. \quad (\text{П2.17})$$

Отсюда следует, что комплексная огибающая вещественного сигнала может быть выражена через аналитический сигнал. Вещественная огибающая $a(t)$ имеет вид

$$a(t) = |\tilde{f}(t)| = |f_a(t)|. \quad (\text{П2.18})$$

Пример П2.2. Пусть несущая $\cos \omega_c t$ модулируется импульсом $a(t) = te^{-t}$, $t \geq 0$. Спектр модулирующего сигнала

$$A(f) = \int_0^{\infty} te^{-t} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{(1 + i\omega)^2}. \quad (\text{П2.19})$$

Спектр модулированного сигнала

$$F(\omega) = \frac{1}{2} [A(\omega - \omega_c) + A(\omega + \omega_c)]. \quad (\text{П2.20})$$

Поэтому

$$\tilde{F}(\omega - \omega_c) = 2F(\omega) = F_a(\omega) = A(\omega - \omega_c).$$

Преобразование Гильберта

Аналитический сигнал $f_a(t)$, соответствующий вещественному сигналу $f(t)$, определен по (П2.3) посредством его спектра

$$F_a(\omega) = F(\omega)[1 + \text{sign}(f)].$$

Этот спектр запишем в виде

$$F_a(\omega) = F(\omega) + i\check{F}(\omega), \quad (\text{П2.21})$$

где

$$\check{F}(\omega) = H(\omega)F(\omega), \quad (\text{П2.22})$$

причем

$$H(\omega) = -i \text{sgn}(f). \quad (\text{П2.23})$$

Функция $\text{sgn}(f)$ определена по (П2.4).

Система с передаточной функцией (частотной характеристикой) $H(\omega)$ называется преобразованием Гильберта функции $f(t)$. Поскольку $\text{sgn}(0) = 0$, то фильтр с ЧХ $H(\omega)$ имеет нулевой отклик по постоянному току.

Преобразование Гильберта $\check{f}(t)$ любого четного сигнала является нечетной функцией. Это свойство следует из (П2.21), (П2.22):

$$\mathfrak{F}\{f(-t)\} = \check{F}(-\omega) = H(-\omega)F(-\omega) = -H(\omega)F(\omega) = -\mathfrak{F}\{\check{f}(t)\},$$

так как

$$F(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-u)e^{-i\omega u} du = F(\omega).$$

Таким образом,

$$\check{f}(-t) = -\check{f}(t). \quad (\text{П2.24})$$

Аналогично для нечетной функции $f(t)$

$$\mathfrak{F}\{\check{f}(-t)\} = H(-\omega)F(-\omega) = -H(\omega)[-F(\omega)] = H(\omega)F(\omega),$$

и, следовательно,

$$\check{f}(-t) = \check{f}(t). \quad (\text{П2.25})$$

Для вещественного сигнала $f(t)$ спектр его $F(\omega)$ обладает симметрией (П2.2). По (П2.23) получим

$$\check{F}(-\omega) = H(-\omega)F(-\omega) = i \text{sgn}(f)F^*(\omega) = H^*(\omega)F^*(\omega) = \check{F}^*(\omega).$$

Следовательно, $\check{f}(t)$ — вещественная функция. По (П2.21)

$$f_a(t) = f(t) + i\check{f}(t). \quad (\text{П2.26})$$

Отсюда получим

$$f(t) = \operatorname{Re} f_a(t); \quad \check{f}(t) = \Im f_a(t). \quad (\text{П2.27})$$

По (П2.17) и (П2.26) следует

$$\check{f}(t) = [f(t) + i\check{f}(t)]e^{-i\omega_c t}. \quad (\text{П2.28})$$

Таким образом, амплитудная модуляция (вещественная огибающая) $a(t)$ сигнала (П2.10) с учетом (П2.18) может быть выражена в виде

$$a(t) = |\check{f}| = \sqrt{f^2(t) + \check{f}^2(t)}. \quad (\text{П2.29})$$

Пример П2.3. Рассмотрим вещественный сигнал (П2.8), его аналитический сигнал задается (П2.9). Тогда преобразование Гильберта от $f(t)$ согласно (П2.27) имеет вид

$$\check{f}(t) = \frac{1}{\pi t} \left(1 - \frac{\sin 2\pi t}{2\pi t} \right).$$

По (П2.22) функцию $\check{f}(t)$ можно представить сверткой

$$\check{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (\text{П2.30})$$

По (П2.22) замечаем, что спектр гильбертова преобразователя имеет бесконечную полосу, поэтому импульсная характеристика $h(\tau)$ нуждается в доопределении конечным процессом. Для этого необходимо использовать соответствующий интеграл обратного преобразования Фурье в смысле его главного значения

$$h(t) = \lim_{\substack{T \rightarrow \infty \\ \alpha \rightarrow 0}} \int_{-T}^T e^{-\alpha|f|} H(\omega) e^{i\omega t} df = \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha f} \sin \omega t df = \frac{1}{\pi t}, \quad (\text{П2.31})$$

тогда по (П2.30) выразим преобразование Гильберта

$$\check{f}(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{f(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (\text{П2.32})$$

Этот интеграл снова имеет вид несобственного интеграла в смысле его главного значения.

Гильбертов преобразователь согласно (П2.23) обладает свойством

$$\frac{1}{H(\omega)} = \frac{i}{\operatorname{sgn}(f)} = i \operatorname{sgn}(f) = -H(\omega), \quad f \neq 0. \quad (\text{П2.33})$$

По (П2.22) находим обратное преобразование Гильберта

$$F(\omega) = \frac{\check{F}(\omega)}{H(\omega)} = -H(\omega)\check{F}(\omega). \quad (\text{П2.34})$$

Отсюда следует

$$f(t) = -\left(\frac{1}{\pi t}\right) * \check{f}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{f}(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (\text{П2.35})$$

Здесь $*$ — знак свертки, а интеграл снова понимается в смысле главного значения.

Вычисление преобразования Гильберта (П2.32) и обратного преобразования (П2.35) во временной области и с использованием свертки аналитически довольно сложно. Эта процедура может быть выполнена путем дискретизации исходного колебания с последующим использованием дискретной свертки, или цифрового фильтра с соответствующей импульсной характеристикой, то есть дискретной версии $1/\pi t$. С другой стороны, может быть использовано быстрое преобразование Фурье (БПФ) для вычисления спектра сигнала, подлежащего преобразованию. Сначала используется гильбертов преобразователь (П2.23), чтобы получить спектр преобразования Гильберта, затем используется обратное БПФ, по которому находятся отсчеты функции $\check{f}(t)$.

Узкополосные случайные процессы

Как и детерминированные сигналы, СП тоже может быть узкополосным. Это означает, что ЭС СП занимает относительно узкую полосу вблизи высокой несущей частоты. По аналогии с (П2.10) предположим, что СП имеет вид

$$n(t) = a(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)], \quad (\text{П2.36})$$

где несущая частота $f_c > B/2$, а B — двусторонняя полоса, содержащая спектр относительно медленно изменяющихся параметров модуляции $a(t)$, $\cos \varphi(t)$. В дальнейшем будем полагать, что СП имеет нулевое среднее значение $E[n(t)] = 0$. Как и в (П2.12) комплексная огибающая СП $n(t)$ с использованием амплитудной и фазовой модулирующих функций имеет вид

$$\tilde{n}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)} = x(t) + iy(t). \quad (\text{П2.37})$$

Действительная и мнимая части $x(t)$ и $y(t)$ комплексной огибающей $\tilde{n}(t)$ называется синфазной и квадратурной составляющей шума $n(t)$. Как и в детерминированном случае

$$|a(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}; \quad \varphi(t) = \arctg[y(t)/x(t)]. \quad (\text{П2.38})$$

Используя (П2.17) и (П2.26), комплексную огибающую (П2.36) получим в виде

$$\tilde{n}(t) = n_a(t)e^{-i\omega t} = [n(t) + i\check{n}(t)]e^{-i\omega_c t}. \quad (\text{П2.39})$$

Сравнивая (П2.37) и (П2.39), получим

$$\begin{aligned} x(t) &= n(t) \cos \omega_c t + \check{n}(t) \sin \omega_c t; \\ y(t) &= \check{n}(t) \cos \omega_c t - n(t) \sin \omega_c t. \end{aligned} \quad (\text{П2.40})$$

Известны следующие соотношения для КФ:

$$\begin{aligned} R_{n\check{n}}(\tau) &= -\check{R}_n(\tau); \quad R_{\check{n}n}(\tau) = \check{R}_n(\tau); \\ R_{n\check{n}}(0) &= R_{\check{n}n}(0) = 0; \quad R_{\check{n}}(\tau) = R_n(\tau). \end{aligned}$$

Рассмотрим КФ синфазной $x(t)$ и квадратурной $y(t)$ составляющих шумового процесса $n(t)$. По (П2.40) получим

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E[x(t)x(t-\tau)] = E[n(t)n(t-\tau)] \cos \omega_c t \cos \omega_c(t-\tau) + \\ &+ E[n(t)\check{n}(t-\tau)] \cos \omega_c t \sin \omega_c(t-\tau) + E[\check{n}(t)n(t-\tau)] \sin \omega_c t \cos \omega_c(t-\tau) + \\ &+ E[\check{n}(t)\check{n}(t-\tau)] \sin \omega_c t \sin \omega_c(t-\tau) = \frac{R_n(\tau)}{2} \{\cos[\omega_c(2t-\tau)] + \cos \omega_c t\} + \\ &+ \frac{R_{n\check{n}}(\tau)}{2} \{\sin[\omega_c(2t-\tau)] - \sin \omega_c t\} + \frac{R_{\check{n}n}(\tau)}{2} \{\sin[\omega_c(2t+\tau)] + \sin \omega_c t\} + \\ &+ \frac{R_{\check{n}}(\tau)}{2} \{\cos \omega_c \tau - \cos[\omega_c(2t-\tau)]\} = R_n(\tau) \cos \omega_c \tau + \check{R}_n(\tau) \sin \omega_c \tau. \end{aligned} \quad (\text{П2.41})$$

Аналогично можно показать справедливость следующих соотношений:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) = R_n(\tau) \cos \omega_c \tau + \check{R}_n(\tau) \sin \omega_c \tau; \quad (\text{П2.42})$$

$$R_{xy}(\tau) = R_n(\tau) \sin \omega_c \tau - \check{R}_n(\tau) \cos \omega_c \tau; \quad (\text{П2.43})$$

$$R_{yx}(\tau) = -R_n(\tau) \sin \omega_c \tau + \check{R}_n(\tau) \cos \omega_c \tau = -R_{xy}(\tau). \quad (\text{П2.44})$$

Если средние значения процессов не равны нулю, КФ заменяется на КВФ и тогда

$$K_y(\tau) = K_x(\tau) = K_n(\tau) \cos \omega_c \tau + \check{K}_n(\tau) \sin \omega_c \tau; \quad (\text{П2.45})$$

$$K_{xy}(\tau) = -K_{yx}(\tau) = K_n(\tau) \sin \omega_c \tau - \check{K}_n(\tau) \cos \omega_c \tau. \quad (\text{П2.46})$$

Можно получить некоторые следствия из приведенных формул. По (П2.41), (П2.43) получим

$$R_n(\tau) = R_x(\tau) \cos \omega_c \tau + R_{xy}(\tau) \sin \omega_c \tau. \quad (\text{П2.47})$$

Из (П2.42) следует, что, если $n(t)$ — стационарный СП, то стационар-

ны и СП $x(t)$ и $y(t)$ и наоборот, по (П2.47): если стационарные СП $x(t)$ и $y(t)$, то и $n(t)$ — стационарный СП.

Если СП $n(t)$ имеет нулевое среднее значение ($E[n(t)] = 0$), то нулевые средние значения имеют $\check{n}(t)$, $x(t)$ и $y(t)$. По (П2.42) получим равенство дисперсий

$$\sigma_x^2 = R_x(0) = R_y(0) = \sigma_y^2. \quad (\text{П2.48})$$

Аналогично по (П2.47) следуют равенства

$$\sigma_n^2 = R_n(0) = R_x(0) = \sigma_x^2 = \sigma_y^2. \quad (\text{П2.49})$$

Поскольку $x(t)$ и $y(t)$ вещественные СП, то $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$. Вместе с (П2.44) получим

$$R_{xy}(-\tau) = -R_{yx}(-\tau) = -R_{xy}(\tau). \quad (\text{П2.50})$$

Отсюда следует, что взаимная КФ квадратурных составляющих нечетная функция параметра τ . Следовательно,

$$R_{xy}(0) = -R_{xy}(0) = 0. \quad (\text{П2.51})$$

Так что отсчеты $x(t)$ и $y(t)$ в один и тот же момент времени некоррелированы.

Далее пусть узкополосный процесс (П2.36) имеет симметричный ЭС

$$S_n(\omega_c + \Delta\omega) = S_n(\omega_c - \Delta\omega), \quad 0 \leq \Delta\omega \leq \omega_c. \quad (\text{П2.52})$$

При дополнительном условии

$$S_n(\omega) = 0, \quad \omega \geq 2\omega_c, \quad (\text{П2.53})$$

можно показать, что не только выполняется равенство (П2.51) и также и равенство $R_{xy}(\tau) = 0$, при этом квадратурные составляющие некоррелированы в том смысле, что $x(t)$ и $y(t')$ некоррелированные СВ при любых значениях t и t' .

Чтобы показать это, рассмотрим соотношение (П2.43).

Спектральная плотность $S_n(\omega) = \mathfrak{F}[R_n(\tau)]$, а из свойства преобразования Гильберта следует, что при условии $\check{S}_n(\omega) = \mathfrak{F}[\check{R}_n(\tau)]$ справедливо соотношение

$$\check{S}_n(\omega) = -i \operatorname{sgn}(f) S_n(\omega). \quad (\text{П2.54})$$

Тогда по (П2.43) получим

$$S_{xy}(\omega) = \frac{S_n(\omega - \omega_c) - S_n(\omega + \omega_c)}{2i} + \frac{\operatorname{sgn}(f - f_c) S_n(\omega - \omega_c) + \operatorname{sgn}(f + f_c) S_n(\omega + \omega_c)}{2}. \quad (\text{П2.55})$$

Это соотношение можно привести к виду

$$S_{xy}(\omega) = i[S_n(\omega - \omega_c) - S_n(\omega + \omega_c)], \quad |f| < f_c. \quad (\text{П2.56})$$

Отсюда при условии (П2.52) получим $S_{xy}(\omega) = 0$, $R_{xy}(\tau) = 0$. Следовательно,

$$R_n(\tau) = R_x(\tau) \cos \omega_c \tau; \quad (\text{П2.57})$$

$$S_n(\omega) = [S_x(\omega - \omega_c) + S_x(\omega + \omega_c)]/2. \quad (\text{П2.58})$$

Определение комплексной огибающей

В случае сигнала (П2.10) полезна комплексная огибающая (П2.12), особенно если необходимо производить вычисления, используя отсчеты модулированного сигнала. В данном разделе рассмотрим несколько способов определения комплексной огибающей

$$\tilde{f}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)} = x(t) + iy(t) \quad (\text{П2.59})$$

вещественного сигнала

$$f(t) = \text{Re}[\tilde{f}(t)e^{i\omega_c t}] = a(t) \cos[\omega_c t + \varphi(t)]. \quad (\text{П2.60})$$

Как и на рис. П2.1, предположим, что вещественная огибающая $a(t)$ имеет двустороннюю полосу частот B , такую, что $f_c > B/2$. Причем часто полагают $f_c \gg B/2$.

В принципе можно использовать аналитический сигнал, как он представлен в (П2.17) и (П2.26):

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) = f_a(t)e^{-i\omega_c t} &= [f(t) + i\check{f}(t)]e^{-i\omega_c t} = [f(t) \cos \omega_c t + \check{f}(t) \sin \omega_c t] + \\ &+ i[\check{f}(t) \cos \omega_c t - f(t) \sin \omega_c t] \end{aligned} \quad (\text{П2.61})$$

Преобразование Гильберта по (П2.32) можно выразить в виде $\check{f}(t) = (1/\pi t)f(t)$.

Однако преобразование Гильберта особенно неудобно при вычислениях во временной области. Поэтому используется частотное представление соотношения (П2.61). Особенно это удобно, если исходный сигнал $f(t)$ дискретизирован и найдено его преобразование Фурье при помощи БПФ. По (П2.3) и (П2.16) находим

$$\tilde{F}(\omega) = F_a(\omega + \omega_c) = [1 + \text{sgn}(f + f_c)]F(\omega + \omega_c). \quad (\text{П2.62})$$

Таким образом, процедура включает в себя дискретизацию $f(t)$, вычисление БПФ, удвоение положительной по частоте части спектра, сдвиг спектра влево на несущую и вычисление обратного БПФ. Такой подход имеет очевидный недостаток, так как $f(t)$ должна дискретизироваться по крайней мере с частотой $f_d = 2(f_c + B/2)$, что означает достаточно высокую частоту, если f_c достаточно велика. Однако, можно показать, что этот недостаток только кажущийся.

В процедуре, которая часто используется в аналоговой технике, если $f_c \gg B/2$, в этом случае непосредственно по (П2.60) находим

$$2f(t) \cos \omega_c t = a(t)[\cos \varphi(t) + \cos(2\omega_c t + \varphi)].$$

Первое слагаемое имеет полосу частот $|f| < B/2$ в то время, как второе слагаемое занимает полосу при частотах $\pm 2f_c$.

Используя ФНЧ, достаточно легко выделить составляющую (П2.59)

$$x(t) = \operatorname{Re} \tilde{f}(t) = a(t) \cos \varphi = 2[f(t) \cos \omega_c t]_{\text{нч}}, \quad (\text{П2.63})$$

где индекс «нч» обозначает низкочастотную фильтрацию колебаний в квадратных скобках. Таким же способом легко показать справедливость соотношения

$$y(t) = a(t) \sin \varphi = -2[f(t) \sin \omega_c t]_{\text{нч}}. \quad (\text{П2.64})$$

Умножение модулирующего колебания $f(t)$ на несущую $\cos \omega_c t$ оправдывает термин синфазная составляющая для колебания $x(t)$, а умножение на $\sin \omega_c t$ со сдвигом по фазе на 90 градусов несущей приводит к термину для $y(t)$ — квадратурная составляющая.

3. Модели Сверлинга [189]

Эффективная площадь рассеяния (ЭПР) флуктуирующей цели является случайной величиной, которая характеризуется своей ПРВ.

Случай 1. Первая модель Сверлинга соответствует цели с медленными флуктуациями амплитуды и с релейевским ПРВ амплитуды отраженного сигнала

$$W(u) = \frac{u}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right), \quad u \geq 0. \quad (\text{П3.1})$$

В этом случае M сигнальных амплитуд федингуют вместе (дружно), от цикла к циклу сканирования [171] с общим распределением отраженного сигнала (П3.1).

В этом случае цель представляется в виде совокупности n точечных элементов, среди которых нет преобладающего отражателя.

При этом распределение частного ОСШ имеет вид [22]

$$W(d) = \frac{d}{s^2} \exp\left(-\frac{d^2}{2s^2}\right), \quad (\text{П3.2})$$

тогда ПРВ ЭПР является экспоненциальной [153]:

$$W(\sigma_{\text{эф}}) = \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{\sigma_{\text{эф}}^2}{2\sigma^2}\right); \quad \sigma_{\text{эф}} \geq 0. \quad (\text{П3.3})$$

Так как величина ЭПР $\sigma_{\text{эф}}$ пропорциональна квадрату амплитуды

u^2 . Общее ОСШ S также подчиняется экспоненциальному распределению [22]

$$W(S) = e^{-S/\bar{S}}/\bar{S}, \quad S \geq 0, \quad (\text{П3.4})$$

где $\bar{S} = Ms^2$ — среднее значение общего ОСШ.

Случай 2. В этом случае M сигнальных амплитуд федингуют независимо, и по-прежнему отраженный сигнал имеет релеевское распределение. Этот случай соответствует цели с более быстрыми, чем в случае 1, назависимыми флуктуациями амплитуды от импульса к импульсу.

Таким образом, это модель флуктуирующей цели при независимости ЭПР от импульса к импульсу. Предполагается, что ЭПР флуктуирует согласно ПРВ (П3.3) [171]

$$W(\sigma) = \frac{1}{\bar{\sigma}} \exp\left(-\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right), \quad (\text{П3.5})$$

где $\bar{\sigma}$ — среднее значение ЭПР.

Общее ОСШ S в этом случае имеет гамма-распределение [22]

$$W(S) = \frac{1}{(M-1)!\bar{S}'} \left(\frac{S}{\bar{S}'}\right)^{M-1} e^{-S/\bar{S}'}, \quad \bar{S}' = \frac{\bar{S}}{M}. \quad (\text{П3.6})$$

Случай 3. Это модель флуктуаций от одного цикла сканирования к другому, как в случае 1 [171]. Здесь, как и в случае 1, M сигнальных амплитуд федингуют вместе (дружно). Частное ОСШ d имеет распределение

$$W(d) = \frac{d^3}{2s^4} e^{-d^2/2s^2}. \quad (\text{П3.7})$$

Общее ОСШ S имеет следующую ПРВ:

$$W(S) = \frac{4S}{\bar{S}^2} e^{-2S/\bar{S}}. \quad (\text{П3.8})$$

Случай 4. В этом случае M сигнальных амплитуд флуктуируют независимо от импульса к импульсу, как в случае 2. Частная ОСШ имеет ПРВ в виде (П3.7). Общее ОСШ имеет ПРВ [22]

$$W(S) = \frac{1}{(2M-1)!\bar{S}'} \left(\frac{S}{\bar{S}'}\right)^{2M-1} e^{-S/\bar{S}'}, \quad \bar{S}' = \frac{\bar{S}}{2M}. \quad (\text{П3.9})$$

Замечание 1. Во всех четырех случаях ПРВ $W(S)$ имеет гамма-распределение вида

$$W(S) = \frac{1}{\Gamma(k)\bar{S}'} \left(\frac{S}{\bar{S}'}\right)^{k-1} e^{-S/\bar{S}'}, \quad \bar{S}' = \frac{\bar{S}}{k}, \quad \bar{S} = E(S). \quad (\text{П3.10})$$

Тогда в каждом из случаев надо положить $k = 1, M, 2, 2M$.

Случай 5. Часто нефлуктуирующую цель относят к случаю 5 Сверлинга (или случаю 0). В этом случае предполагают амплитуду отраженного сигнала неизвестной при отсутствии флуктуаций ЭПР.

Замечание 2. В случаях 1 и 2 предполагается, что в состав цели входит большое число независимых отражателей, причем ни один из них не доминирует. В случаях 3 и 4 предполагается, что в составе цели имеется один доминирующий нефлуктуирующий отражатель, совместно с другими независимыми отражателями с меньшей интенсивностью отражения.

В случаях 1 и 2 огибающая отраженного сигнала имеет распределение Релея, в случаях 3 и 4 огибающая сигнала имеет распределение хи-квадрат. Обобщенная формула для ПРВ ЭПР может быть записана в виде [157, 158]

$$W(S_0) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{k}{S_0} \left(\frac{kS_0}{S_0} \right)^{k-1} \exp \left(-\frac{kS_0}{S_0} \right). \quad (\text{П3.11})$$

4. Приближенные формулы для Q-функций Маркума

При значительных ОСШ $d = v$ справедлива асимптотическая формула [184]

$$Q(v, u) = 1 - \Phi \left(u - v - \frac{1}{2v} \right) = 1 - \Phi(-\gamma) = 1 - Q(\gamma) = \Phi(\gamma), \quad (\text{П4.1})$$

где $\gamma = v + \frac{1}{2v} - u$; $u = \sqrt{2v_0}$; $v = d$; d — ОСШ; v_0 — порог, определяемый из условия

$$Q_0 = \int_{v_0}^{\infty} W_0(x) dx = \sum_{k=0}^{c-1} e^{-m} \frac{m^k}{k!} = Q(\chi^2 | v), \quad (\text{П4.2})$$

где $c = \nu/2 = N$; $m = \chi^2/2 = v_0$.

Величина $m = v_0$ табулирована в [21, 180, 181].

Результаты расчета вероятности обнаружения [22]

$$Q_d = \int_{v_0}^{\infty} W_1(x) dx = Q(d, \sqrt{2v_0}) \quad (\text{П4.3})$$

приведены в табл. П4.1. В этой таблице первые два значения $Q_d = 9,4 \cdot 10^{-4}$ и $Q_d = 1,64 \cdot 10^{-2}$ взяты по таблице [184] при пороге $v_0 = 13,8155$; $\sqrt{2v_0} = 5,2565 \approx 5,26$ и ОСШ $d = v = 2$; $d = 3$. Третье значение $Q_d = 0,538$ вычисляется по соотношению [184]

$$Q(u, u) = 0,5[1 + e^{-u^2} I_0(u^2)] \quad (\text{П4.4})$$

Таблица П4.1

d	2	3	5,26	8	9
Q_d	$9,4 \cdot 10^{-4}$	$1,64 \cdot 10^{-2}$	0,5379	0,9975	0,9999

с использованием асимптотической формулы

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \quad (\text{П4.5})$$

при $x = u^2 = d^2$. Последние два значения вероятности обнаружения Q_d вычислены с использованием соотношения (П4.1)

$$Q_d = \Phi(\gamma); \quad \gamma = d + \frac{1}{2d} - \sqrt{2v_0} = d + \frac{1}{2d} - 5,2565,$$

когда при $d = 8$, $\gamma = 2,806$, $\Phi(\gamma) \approx 0,99749 \approx 0,9975$ и при $d = 9$, $\gamma = 3,806$, $\Phi(\gamma) \approx 0,999927$. Приведенные данные табл. П4.1 соответствуют кривой при $N = 1$ на рис. П1.13 (нефедингующая цель).

Вероятность обнаружения при $N > 1$ рассчитывается по формуле [22]

$$Q_d = \int_{v_0}^{\infty} W_1(x) dx = Q_N(d, \sqrt{2v_0}), \quad (\text{П4.6})$$

где

$$Q_N(\alpha, \beta) = \int_{\beta}^{\infty} x \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{N-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + \alpha^2)\right] I_{N-1}(\alpha x) dx, \quad (\text{П4.7})$$

или

$$Q_N(\alpha, \beta) = Q(\alpha, \beta) + \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)\right] \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k I_k(\alpha\beta). \quad (\text{П4.8})$$

При $\alpha = \beta$ отсюда находим

$$\begin{aligned} Q_N(\alpha, \alpha) &= \frac{1}{2}[1 + e^{-\alpha^2} I_0(\alpha^2)] + e^{-\alpha^2} \sum_{k=1}^{N-1} I_k(\alpha^2) = \\ &= Q(\alpha, \alpha) + e^{-\alpha^2} \sum_{k=1}^{N-1} I_k(\alpha^2), \end{aligned} \quad (\text{П4.9})$$

где учтено соотношение (П4.4).

При $N = 5$ приближенное значение вероятности обнаружения можно оценить при помощи формул (П4.4) и (П4.5), а также формулы (П4.9), используя вместо второго слагаемого его приближенное выражение:

$$\sum_{k=1}^4 e^{-d^2} I_k(d^2) \approx 4 \frac{1}{d\sqrt{2\pi}}. \quad (\text{П4.10})$$

При $N = 5$ порог $v_0 = 23,4415$; $\sqrt{2v_0} = 6,8456 = \beta$, полагая $d = \sqrt{2v_0} = 6,8456$, по (П4.10) получим $4 \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} = 0,23308$. Тогда $Q(d, d) = 0,5 \left(1 + \frac{1}{d\sqrt{2\pi}}\right) = 0,529$.

Итого по (П4.9) $Q_d = 0,529 + 0,233 = 0,762$ (см. отсчет Q_d на рис. П1.13).

Аналогичные расчеты можно осуществить при $d = 10$, если соотношение (П4.8) преобразовать с учетом (П4.5) и (П4.1)

$$Q_5(\alpha, \beta) \approx \Phi(\gamma) + e^{-(\alpha-\beta)^2/2} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta 2\pi}}, \quad (\text{П4.11})$$

где $\gamma = 10 + 1/20 - \beta = 10,05 - 6,8456 = 3,2$, $\Phi(\gamma) = 0,9993$;

$$\exp\left[-\frac{1}{2}(x - \beta)^2\right] = \exp(-4,975) = 6,91 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta 2\pi}} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k = \frac{0,3989}{\sqrt{68,456}} \frac{0,78}{0,46} = 0,0817.$$

В результате получим

$$Q_d = Q_5(\alpha, \beta) = 0,9993 + 6,91 \cdot 10^{-3} \cdot 8,17 \cdot 10^{-2} = 0,9993 + 0,000565 = 0,999865 \approx 0,9999$$

(ср. с отсчетом Q_d на рис. П1.13).

Для рассматриваемого случая в [191] приводится аналитическая формула К. Хелстрема ($N > 100$)

$$Q^{-1}(Q_d) = \sqrt{\frac{N}{d^2 + N}} \left[Q^{-1}(Q_0) - \frac{d^2}{2\sqrt{N}} \right]. \quad (\text{П4.12})$$

При ВЛТ $Q_0 = 10^{-6}$, $Q^{-1}(Q_0) = 4,75342$, $d = 10$ и $N = 200$ и 500 соответственно получены значения $Q_d \approx 0,16$ и $0,01$ (см. штриховые горизонтальные линии на рис. П1.13). Как следует из рис. П1.13, рассчитанные значения Q_d являются оценками истинных значений Q_d снизу.

Вероятность обнаружения может быть выражена через неполную функцию Торонто [23, 185]

$$T_u(m, n, r) = 2r^{n-m+1} e^{-r^2} \int_0^u z^{m-n} e^{-z^2} I_n(2rz) dz. \quad (\text{П4.13})$$

Тогда

$$Q_d = 1 - T_{\sqrt{v_0}} \left[2N - 1, N - 1, \frac{d}{\sqrt{2}} \right]. \quad (\text{П4.14})$$

Литература

1. Рут В.Л. Введение в теорию обнаружения сигналов в шуме // ТИИЭР. 1970. Т. 58, т 5. С. 8–22.
2. Рут В.Л. Заметки (преимущественно исторического характера) о развитии теории обнаружения сигналов и оценивания их параметров // ТИИЭР. 1987. Т. 75, т 11. С. 7–11.
3. Kailath T., Poor V.D. Detection of stochastic processes // IEEE Trans. 1998. V. IT-44, т 6. P. 2230–2259 (перевод см. Дополнение).
4. Вудворт Ф.М. Теория вероятностей и теория информации с применениями в радиолокации. Перевод с англ. под ред. Г.С. Горелика. — М.: Сов. радио, 1955. — 128 с.
5. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. — М.: Госэнергоиздат, 1956. — 151 с.
6. Амиантов И.Н. Применение теории решений к задачам обнаружения сигналов и выделения сигналов из шумов. — М.: изд. ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1958. — 252 с.
7. Davenport W.B., Root W.L. An introduction to the theory of random signals and noise. — N.Y.: McGraw Hill, 1958. Русский перевод: Девенпорт В.Б., Рут В.Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Пер. с англ. под ред. Р.Л. Добрушина. — М.: ИЛ, 1960. — 468 с.
8. Helstrom C.W. Statistical theory of signal detection. — N.Y.: Pergamon press, 1960. — 364 p. Русский перевод: Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов / Пер. с англ. под ред. Ю.Б. Кобзарева. — М.: ИЛ, 1963. — 431 с.
9. Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Сб. переводов под ред. Н.А. Железнова. — М.: ИЛ, 1953. — 288 с.
10. Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д. Выделение сигналов на фоне случайных помех. — М.: Сов. радио, 1960. — 447 с.
11. Прием сигналов при наличии шума. Пер. с англ. под ред. Л.С. Гуткина. — М.: ИЛ, 1960. — 343 с.
12. Прием импульсных сигналов в присутствии шумов. Пер. с англ. под ред. А.Е. Башаринова и М.С. Александрова. — М.: ИЛ, 1960.
13. Гуткин Л.С. Теория оптимальных методов радиоприема при флуктуационных помехах. — М.: Госэнергоиздат, 1961; 2-е изд. — М.: Сов. радио, 1972. — 448 с.
14. Фалькович С.Е. Прием радиолокационных сигналов на фоне флуктуационных помех. — М.: Сов. радио, 1961.

15. Бакут П.А., Большаков И.А., Герасимов и др. Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Г.П. Тартаковского. Т. 1. — М.: Сов. радио, 1963. — 426 с.; Т. 2, 1964. — 1080 с.

16. Ширман Я.Д., Голиков В.Н. Основы теории обнаружения радиолокационных сигналов и измерения их параметров. — М.: Сов. радио, 1963. — 278 с.

17. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. — М.: Сов. радио, 1966. — 678 с.

18. Marcum J.I. A statistical theory of target detection by pulsed radar // IRE Trans. 1960. V. IT-6, т 2. P. 59–114.

19. Шахтарин Б.И. Об учете корреляционных свойств шума при оценке параметров сигнала // Труды ВВИА им. Н.Е. Жуковского. 1966. Вып. 1157. С. 182–189.

20. Шахтарин Б.И., Сизых В.В. Оптимальное обнаружение и оценка параметров сигналов. Руководство к решению задач по курсу «Статистическая радиотехника». — М.: Изд-во МГТУ, 1990. — 72 с.

21. Амиантов И.Н. Избранные вопросы статистической теории связи. — М.: Сов. радио, 1971. — 416 с.

22. Helstrom C.W. Elements of signal detection and estimation. — N. Jersey: Prentice Hall, 1995. — 586 pp.

23. McDonough R.N., Whalen A.D. Detection of signals in noise. 2nd ed. — N.Y.: Academic Press, 1995. — 485 pp.

24. Kay S.M. Fundamentals of statistical signal processing. Detection theory. V. II. N. Jersey: Prentice Hall, 1998. — 560 pp.

25. Ширман Я.Д., Голиков В.Н., Бусыгин И.А. и др. Теоретические основы радиолокации. Учебное пособие для вузов. — М.: Сов. радио, 1970. — 560 с.

26. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. — М.: Радио и связь, 1983. — 320 с.

27. Вальд А. Последовательный анализ. — М.: Физматгиз, 1962. — 320 с.

28. Теория связи. Пер. с англ. — М.: Связь, 1972. — 392 с.

29. Bussgang J.J., Middleton D. Optimum sequential detection of signals in noise // IRE Trans. 1955. V. IT-1, т 6. P. 5–18. Русский перевод: Бусганг Дж., Мидлтон Д. Оптимальное последовательное обнаружение сигналов в шуме, гл. IV, с. 123–159 [11].

30. Бакулев П.А., Степин В.М. Методы и устройства селекции движущихся целей. — М.: Радио и связь, 1986. — 288 с.

31. Бакулев П.А., Басистов Ю.А., Тугуши В.Г. Обработка сигналов с постоянным уровнем ложных тревог // Известия вузов. Серия «Радиоэлектроника», 1989. Т. 32, т 4. С. 4–15.

32. Papoulis A. Probability, random variables and stochastic processes, 3rd ed., N.Y.: McGraw-Hill, 1991. — 666 pp.

33. Koberston G.H. Computation of noncentral F distribution (CFAR) detection // IEEE. V. AES-12 Sept., 1976. P. 568-571.
34. Rickard J.T., Dillard G.M. Adaptive detection algorithms for multiple – target situations // IEEE Trans. 1997. V. AES-13. P. 338-343.
35. Ritcey J.A. Performance analysis of the censored mean – level detector // IEEE Trans. 1986. V. AES-12. P. 443-454.
36. Репин В.Г. Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. — М. Сов. радио, 1977. — 432 с.
37. Крамер Г. Математические методы статистики. Пер. с англ. под ред. А.Н. Колмогорова. — М.: ИЛ, 1948. — 613 с.
38. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. — М.: ВЦ АН СССР, 1968. — 474 с.
39. Вопросы статистической теории радиолокации / Под ред. Г.П. Тартаковского. — М. Сов. радио, Т. 1, 1963; Т. 2, 1964.
40. Scharf L.L. Lytle D.W. Signal detection in Gaussian noise of unknown level: an invariance application // IEEE Trans. 1971. V. IT-17, т 4. P. 404-411.
41. Кендалл Дж. Стюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973. — 899 с.
42. Леман Е. Проверка статистических гипотез. — М.: Наука, 1964. — 408 с.
43. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 3. — М.: Сов. радио, 1976. — 288 с.
44. Акимов П.С., Евстратов Ф.Ф., Захаров С.И. и др. Обнаружение радиосигналов / Под ред. А.А. Волосова. — М.: Радио и связь, 1989. — 288 с.
45. Корадо В.А. Об оптимальном обнаружении сигналов при воздействии помех с неизвестными параметрами // Радиотехника и электроника. 1969. т 2, С. 239-248.
46. Schweppe F.C. Evaluation of likelihood functions for Gaussian signals // IEEE Trans. 1965. V. IT-11, т 1. P. 61-70.
47. Томас Д.Б. Непараметрические методы обнаружения сигналов // ТИИЭР. 1970. V. 58, т 5. С. 23-31.
48. Kassman S.A. A bibliography on nonparametric detection // IEEE Trans. 1980. V. IT-26, т 5. P. 595-602.
49. Gibson J.D., Melsa J.L. Introduction to nonparametric detection with applications. — N.Y.: Academic press, 1975. — 241 pp.
50. Ван Трис Г.Л. Теория обнаружения оценок и модуляции. Пер. с англ. под. ред. В.И. Тихонова, Т. 1. — М.: Сов. радио, 1975. — 343 с. Т. 3. Под. ред. В.Т. Горяинова, 1977. — 662 с.
51. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. — М.: Сов. радио, 1978. — 320 с.

52. Ван Трис Г.Л. Приложение методов переменных состояния в теории обнаружения // ТИИЭР. 1970. V. 58, т 5. С. 55–72.
53. Кайлатс Т. Метод порождающего процесса в применении к теории обнаружения и оценки // ТИИЭР. 1970. V. 58, т 5. С. 82–99.
54. Kassam S.A. Signal detection in non-Gaussian noise. — N.Y.: Springer, 1987. — 234 pp.
55. Kalman filtering and neural networks, ed. by S. Haykin. — N.Y.: J. Wiley, 2001. — 284 pp.
56. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. 2-е изд. испр. — М.: Радио и связь, 2004. — 608 с.
57. Poor H.V. An introduction to signal detection and estimation. 2nd ed. — N.Y.: Springer, 1994. — 398 pp.
58. Справочник по специальным функциями с формулами, графиками и математическими таблицами. Пер. с англ. под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 830 с.
59. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1962. — 1100 с.
60. Шахтарин Б.И. Случайные процессы в радиотехнике. 2-е изд. испр. и дополн. Ч. 1. Линейные системы. — М.: Радио и связь, 2002. — 568 с.
61. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
62. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 335 с.
63. Middleton D. Canonically optimum threshold detection // IEEE Trans. 1966. V. IT-12, т 2. P. 230–243.
64. Миддлтон Д. Очерки теории связи / Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1966. — 160 с.
65. Middleton D. Threshold detection in non-Gaussian interference environments // IEEE Trans. Elecromagnet. Compat. 1984. V. EC-26. P. 19–28.
66. Kay S.M. Fundamentals of statistical signal processing. V.1. Estimation theory. — N.Y.: Prentice Hall, 1993.
67. Буссганг Д.Д. Приложение методов последовательного анализа к задачам радиолокационного обнаружения // ТИИЭР. 1970. v. 58, т 5. С. 138–151.
68. Вальд А. Статистические решающие функции // В кн.: Позиционные игры / Под ред. Н.Н. Воробьева. — М.: Наука, 1967.
69. Ширяев А.Н. Статистический последовательный анализ. — М.: Наука, 1969.
70. Таблицы распределения Релея–Райса // Л.С. Барк, Л.Н. Большев, П.Н. Кузнецов, Л.П. Черенков. — М.: ВЦ АН СССР, 1964 — 246 с.

71. Middleton D. Some general results in the theory of noise through nonlinear devices // Quarterly of Applied Mathematics. 1948. v. 5, т 4. P. 445–498.

72. Selin I. The sequential estimation and detection of signals in normal noise // Information and Control. 1964. v. 7, т 4. P. 512–534; 1965. v. 8, т 1. P. 1–35.

73. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. — 488 с.

74. Башаринов А.Е., Флейшман Б.С. Методы статистического последовательного анализа и их радиотехнические приложения. — М.: Сов. радио, 1962. — 352 с.

75. Хелстром К. Последовательное обнаружение. Гл. 7. с. 288–302 [28].

76. Розанов Б.А., Власов И.Б. Последовательное обнаружение сигналов. Гл. 4, с. 202–266 [77].

77. Акимов П.С., Бакут П.А., Богданович В.А. и др. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П.А. Бакута. — М.: Радио и связь, 1984. — 440 с.

78. Башаринов А.Е. Флейшман Б.С. Применение метода последовательного анализа в системах двухзначной передачи при релейских флуктуациях интенсивности сигналов // Радиотехника и электроника. 1959. Т. 4, т 2. С. 155–160.

79. Middleton D. Non-Gaussian noise models in signal processing for telecommunications: new methods and results for class A and class B noise models // IEEE Trans. 1999. V. IT-45, т 4. P. 1129–1149.

80. Валеев В.Г. Обнаружение сигналов в негауссовских помехах. Гл. 5, с. 266–325 в кн. [77].

81. Turin G.L. Error probability for binary symmetric ideal reception through nonselective slow fading and noise // PIRE. 1958. V. 46, т 9. P. 851–857.

82. Константинов П.А. Помехоустойчивость систем связи с тональной манипуляцией при идеальном приеме // Радиотехника. 1961. Т. 16, т 11. С. 18–25.

83. Антонов О.Е. Оптимальное обнаружение сигналов в негауссовских помехах // Радиотехника и электроника. 1967. Т. 12, т 4. С. 579–587.

84. Антонов О.Е. Оптимальное обнаружение сигналов в негауссовских помехах. Обнаружение сигналов с неизвестной амплитудой и фазой // Радиотехника и электроника. 1967. Т. 12, т 5. С. 727–735.

85. Тихонов В.И., Шахтарин Б.И., Сизых В.В. Случайные процессы. Примеры и задачи. Т. 1. Случайные величины и процессы. — М.: Радио и связь, 2003. — 400 с.

86. Гаек Я., Шидак З. Теория ранговых критериев. Пер. с англ. — М.: Наука, 1971. — 376 с.
87. Хеттманспергер Т.П. Статистические выводы, основанные на рангах. Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1987. — 335 с.
88. Карлил Дж.В. Непараметрические методы в теории обнаружения. Гл. 8. с. 308-339, кн. [28].
89. Sheskin D.J. Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures, 2-nd ed. — N.Y. Chapman and Hall/CRC, 2000. — 900 p.
90. Голубев С.В., Тихонов В.И., Шахтарин Б.И. Обработка радиосигналов корреляционными методами. Обзор. — М.: 1999. — 70 с.
91. Шахтарин Б.И. Случайные процессы в радиотехнике. Цикл лекций. — М.: Радио и связь, 2000. — 584 с.
92. Акимов П.С. Непараметрическое обнаружение сигналов. — М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1980. — 98 с.
93. Wolff S.S., Thomas J.B., Williams T.R. The polarity-coincidence correlator: a nonparametric detection device // IRE Trans. 1962. V. IT-8, т 1. Р. 5–9.
94. Горяинов С.Б., Павлов И.С., Цветкова Г.М. и др. Математическая статистика. Учебник для вузов. 2-е издание, стереот. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. — 424 с.
95. Nonparametric detection: theory and applications / Eds. S.A. Kassam, J.B. Thomas. Stroudsburg, P.A. Dowden, 1980. — 348 p.
96. Акимов П.С. Непараметрическое обнаружение сигналов // Радиотехника. 1977. Т. 32, т 11. С. 17–30.
97. Акимов П.С., Ефремов В.С. Оптимальное ранговое последовательное обнаружение импульсного сигнала // Радиотехническая электротехника. 1975. Т. 20, т 11. С. 2286–2296.
98. Акимов П.С. Ефремов В.С. Ранговая последовательная процедура обнаружения импульсного сигнала // Радиотехника и электроника. 1975. Т. 20, т 1. С. 118–122.
99. Акимов П.С., Ефремов В.С. Адаптация ранговой последовательной процедуры обнаружения // Радиотехника и электроника. 1977. Т. 22, т 5.
100. Акимов П.С. Адаптация ранговой бинарной процедуры обнаружения // Изв. вузов. Радиотехника. 1979. Т. 22, т 7. С. 31–37.
101. Акимов П.С. Ефремов В.С. Журков Л.П., Косолапов А.С. Реализация непараметрического рангового обнаружителя // Радиотехника. 1976. Т. 31, т 7. С. 95–97.
102. Акимов П.С., Кубасов А.Н. Ранговое обнаружение оптического сигнала // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 1977, т. 20, т 7. С. 29–35.

103. **Акимов П.С., Ефремов В.С.** Ранговое обнаружение сигнала с большим динамическим диапазоном // Радиотехника. 1978. Т. 33, т. 4. С. 66–69.
104. **Акимов П.С., Ефремов В.С., Кубасов А.Н.** Об устойчивости непараметрического теста при некогерентной обработке // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, т. 6. С. 1164–1173.
105. **Акимов П.С., Ефремов В.С., Кубасов А.Н.** Об устойчивости последовательной ранговой процедуры обнаружения // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, т. 7. С. 1427–1431.
106. **Акимов П.С., Сенин А.И., Соленов В.И.** Сигналы и их обработка в информационных системах. — М: Радио и связь, 1994. — 256 с.
107. **Розанов Б.А.** Последовательное обнаружение сигналов: Учебн. пособие. — М.: Изд-во МВТУ, 1978. — 28 с.
108. **Communications and networks: a survey of recent advances.** Eds I.F. Blake and H.V. Poor, N.Y.: Springer-Verlag, 1986. — 430 p.
109. **Tantaratana S.** Sequential detection of a positive signal. Ch. 7, pp. 157–196 [108].
111. **Богданович В.А., Вострецов А.Г.** Теория устойчивого обнаружения различения и оценивания сигналов. 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2004. — 318 с.
112. **Кассам С.А., Пур Г.В.** Робастные методы обработки сигналов: Обзор // ТИИЭР. 1985. Т. 73, т. 3. С. 54–110.
113. **Poor H.V.** Robustness in signal detection. Ch. 6. P. 131–156 [108].
114. **Masreliez C.J., Martin R.D.** Robust Bayesian estimation for linear model and robustifying the Kalman filter // IEEE Trans. 1977. V. AC-22. P. 361–371.
115. **Kassam S.A. Lim T.L.** Robust Wiener filters // J. Franklin Inst. 1977. V. 304, т. 4/5. P. 171–185.
116. **Vastola K.S., Poor H.V.** Robust Wiener-Kolmogorov theory // IEEE Trans. 1984. Vol. IT-30, т. 2. P. 316–327.
117. **Capon J.** Optimum coincidence procedures for detecting weak signals in noise // IRE Intern. Conv. Record. Part 4. 1960. P. 154–166.
118. **Capon J.** A nonparametric techniques for the detection of a constant signal in additive noise // IRE WESCON Conf. Rec. Part 4. 1959. P. 92–103.
119. **Tantaratana S. Thomas J.B.** On sequential sign detection of a constant signal // IEEE Trans. 1977. т. IT-23. P. 304–315.
120. **Lee Y.W.** Statistical theory of communications. — N.Y.: Wiley, 1960.

121. **Armstrong G.L.** The effect of dependent sampling on the performance of nonparametric coincidence detectors // Ph. D. diss. Oklahoma State Univ. Still water, 1965. — 129 p.

122. **Kendall M.G.** Rank correlation methods. 4-th ed. — N.Y.: Hafner, 1970. Русск. пер.: Кендал М. Ранговая корреляция. — М.: Статистика, 1974. — 214 с.

123. **Корадо В.А. Захаров С.И.** Оптимальное обнаружение сигнала на фоне помех с неизвестной интенсивностью, гл. 6, с. 83–110, кн. [44].

124. **Корадо В.А. Захаров С.И.** Обнаружение сигнала на фоне случайных стационарных помех с неизвестным спектром мощности, гл. 7, с. 110–158, кн. [44].

125. **Корадо В.А.** Оптимальное обнаружении детерминированных сигналов со случайными параметрами на фоне помех с неизвестной интенсивностью при условии постоянства ложных тревог // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13, т 6. С. 1115–1118.

126. **Борисов В.К., Зинчук В.М., Лимарев А.Е.** и др. Помехозащищенность систем радиосвязи с расширением спектра сигналов модуляцией несущей псевдослучайной последовательностью / Под ред. В.И. Борисова. — М.: Радио и связь, 2003. — 640 с.

127. **Харисов В.Н., Бенев В.Н.** Адаптивная фильтрация нормального марковского процесса с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией // В кн.: Научно-методические материалы по статистической радиотехнике. Под ред. В.И. Тихонова. — М.: ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1979. С. 145–153.

128. **Лайниотис Д.Г.** Разделение — единый метод построения адаптивных систем. I. Оценивание. С. 8–27; II. Управление. С. 74–93 // ТИИЭР. 1976. Т. 64, т 8.

129. **Грищенко Н.С., Гусаров А.И., Логинов В.П., Севостьянов К.К.** Адаптивное оценивание. Ч. II // Зарубежная радиоэлектроника. 1985. т 3. С. 3–26.

130. **Стратонович Р.Л.** Принципы адаптивного приема. — М: Сов. радио, 1973. 141 с.

131. **Перов А.И.** Статистическая теория радиотехнических систем. Учебное пособие для вузов. — М.: Радиотехника, 2003. — 400 с.

132. **Левин Б.Р.** Теоретические основы статистической радиотехники. Кн. 2, изд. 2-е перераб. и доп. — М.: Сов.радио, 1975. — 392 с.

133. **Стратонович Р.Л.** К теории оптимальной нелинейной фильтрации случайных функций // Теория вероятностей и ее применение. 1959. Т. 4, т 2. С. 239–242.

134. **Стратонович Р.Л.** Применение теории процессов Маркова для оптимальной фильтрации сигналов // Радиотехника и электроника. 1960. Т. 5, т 11.

135. Сосулин Ю.Г. Оптимальное обнаружение некоторых негауссовских сигналов в шуме // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1965. т 6.

136. Стратонович Р.Л. Сосулин Ю.Г. Оптимальный прием сигналов на фоне негауссовских помех // Радиотехника и электроника. 1966. Т. 11, т 4. С. 497–507.

137. Сосулин Ю.Г. О некоторых задачах обнаружения и нелинейной фильтрации сигналов при наличии помех // В кн.: 3-я конференция по теории передачи и кодирования. Секция 4. — М., 1967. С. 10–17.

138. Сосулин Ю.Г. Некоторые вопросы обнаружения и фильтрации сигналов на фоне помех марковского типа. Негауссовские помехи // Радиотехника и электроника. 1968. Т. 13, т 4.

139. Кульман Н.К., Стратонович Р.Л. Фазовая автоподстройка частоты и оптимальное измерение параметров узкополосного сигнала с непостоянной частотой в шуме // Радиотехника и электроника. 1964. Т. 9, т 1.

140. Тихонов В.И. Шахтарин Б.И. Сизых В.В. Случайные процессы. Примеры и задачи. Т. 3. Оптимальная фильтрация, экстраполяция и моделирование. Учебное пособие для вузов. — М.: Радио и связь, 2004. — 408 с.

141. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. Пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 168 с.

142. Казаков В.А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые радиотехнические задачи. — М.: Сов. радио, 1973. — 232 с.

143. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. Изд. 2-е доп. — М.: Наука, 1990. — 632 с.

144. Kailath T. An innovation approach to least-squares estimation. Part I. Linear filtering in additive white noise // IEEE Trans. 1968, V. AC-13.

145. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. Учебное пособие для вузов. 3-е изд. перераб. и доп. — М.: Наука, Физматлит, 1992. — 576 с.

146. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. — М.: МГУ, 1966.

147. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. Пер. с англ. — М.: Связь, 1976. — 496 с.

148. Иванов В.А. Голованов М.А., Крутько П.Д. Теория автоматического управления. Ч. IV. Статистическая динамика автоматических систем (семинары). — М.: Изд-во МГТУ, 1995. — 100 с.

149. **Мареха А.С.** Оптимальная фильтрация фазоманипулированных сигналов с замираниями // Радиотехника и электроника. 1986. Т. 31, т 12. С. 2426–2430.
150. **Сосулин Ю.Г.** Фильтрация и обнаружение марковских сигналов при неполной априорной информации // Радиотехника и электроника. 1969. Т. 14, т 12.
151. **Сосулин Ю.Г., Мерзляк М.Г.** Вопросы сходимости адаптивных алгоритмов обнаружения и оценивания стохастических сигналов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1975. т 4.
152. **Горяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И.** Статистическая радиотехника. Примеры и задачи. Учебн. пособие для вузов; Под ред. В.И. Тихонова. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Сов. радио, 1980. — 544 с.
153. **Шахтарин Б.И.** Случайные процессы в радиотехнике. 3-е изд., перераб. Т. 1. Линейные преобразования. — М.: Гелиос АРВ, 2006. — 464 с.
154. **Шахтарин Б.И.** Случайные процессы в радиотехнике. Т. 2. Нелинейные преобразования. — М.: Гелиос АРВ, 2006. — 448 с.
155. **Красненкер В.М.** Стабильные методы обнаружения сигналов на фоне помех (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1980. т 5, С. 65–88.
156. **Minkler G., Minkler J.** CFAR. — Baltimore: Magellan Book Company, 1990. — 374 pp.
157. **Barkat M.** Signal detection and estimation. 2-nd ed. — London: Artech House, 2005. — 692 pp.
158. **Бакулев П.А.** Радиолокационные системы. Учебник для вузов. — М.: Радиотехника, 2004. — 320 с.
159. **Hansen V.G.** Constant false alarm rate processing in search radar // Proceedings of the IEEE 1973 International radar conference. London, 1973, p. 325–332.
160. **Бессекерский В.А., Небылов А.В.** Робастные системы автоматического управления. — М.: Наука, 1983. — 240 с.
161. **Rohling H.** Radar CFAR thresholding in clutter and multiple target situations // IEEE Trans 1983. V. AES-19, т 4. P. 608–621.
162. **Rohling H.** New CFAR processor based on order statistic // Proceedings of the IEEE 1984 International radar conference. Paris, 1984, p. 38–42.
163. **Хьюбер П.** Робастность в статистике. — М.: Мир, 1984. — 304 с.
164. **Tantaratana S., Thomas J.B.** Relative efficiency of the sequential probability ratio test in signal detection // IEEE Trans. 1978. V. IT-24, т 1. P. 22–31.

165. **Tantaratana S., Poor H.V.** Asymptotic efficiencies of truncated sequential tests // IEEE Trans. 1982. V. IT-28, т 6. P. 911–923.
166. **Tantaratana S., Thomas Y.B.** On sequential sign detection of a constant signal // IEEE Trans. 1977. V. IT-23, т 3. P. 304–315.
167. **Bayraktar E., Poor H.V.** Qnikest defection on a minimum of disorder times // Proceeding of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005. Seville, Spain, Dec. 12–15, 2005, p. 326–331.
168. **Ширяев А.Н.** Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. 8, т 1. С. 26–51.
169. **Gini F., Farina A., Greco M.** Selected list of references on radar signal processing // IEEE Trans. 2001. V. AES-37, т 1. P. 329–359.
170. **Вероятность и математическая статистика.** Энциклопедия. — М., 1999. — 910 с.
171. **Справочник по радиолокации в 4-х т.** / Под ред. М. Скони-ка; пер. с англ. под общей редакцией К.А. Трофимова. Т. 1 Основы радиолокации; под ред. Я.С. Иццоки. — М.: Сов. радио, 1976. — 455 с.
172. **Levanon N.** Detection loss due to interfering targets in order statistics CFAR // IEEE Trans. 1988. V. AES-24, т 6. P. 678–681.
173. **Shor M., Levanon N.** Performance of order statistics CFAR // IEEE Trans. 1991. V. AES-27, т 2. P. 214–224.
174. **Nitzberg R.** Analysis of the arithmetic mean CFAR normalizer for fluctuating targets // IEEE Trans. 1978. V. AES-14, т 1. P. 44–47.
175. **Айвазян С.А., Мхитарян В.С.** Теория вероятностей и прикладная статистика. 2-е изд., испр. Т. 1. — М.: Юнити-Дана, 2001. 656 с.
176. **Kay S.M.** Robust defection by autoregressive spectrum analysis // IEEE Trans. 1982. V. ASSP-30, т 2. P. 256–269.
177. **Оводенко А.А.** Робастные локационные устройства. — Л.: Гос. унив., 1981. — 184 с.
178. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / Пер. с англ. под ред. Н.Я. Виленкина. — М.: Наука, 1966. — 295 с.
179. **Barton D.K.** Radar system analysis and modeling. — London: Artech House, 2005. — 535 p.
180. **Трухачев А.А.** Анализ процедур и алгоритмов обнаружения сигналов. — М.: Радио и связь, 2004. — 247 с.
181. **Pachares J.** A table of bias levels usefull in radar detection problems // IRE Trans. 1958. V. IT-4, т 1. P. 39–45.
182. **Мельник Ю.А.** Самолетные радиолокационные бомбоприцелы и радиолокационные станции перехвата. — М.: Воениздат. 1954.

183. **Теоретические** основы радиолокации / А.А. Коростылев, А.Ф. Клюев, Ю.А. Мельник и др.; под ред. В.Е. Дулевича. — М.: Сов. радио, 1978.
184. **Фалькович С.Е.** Оптимальное обнаружение сигналов на фоне помех неизвестной интенсивности // Радиотехника и электроника. 1960. т 9. С. 1539–1541.
185. **Сагон Г.** Численный метод расчета неполной функции Торронта // ТИИЭР. 1966. Т. 54, т 8. С. 99.
186. **Дмитриенко А.Н., Корадо В.А.** Характеристики обнаружения пакета независимо функционирующих импульсов на фоне гауссовской помехи с неизвестной интенсивностью // Радиотехника и электроника. 1967. т 7. С. 1272–1274.
187. **Дмитриенко А.Н., Корадо В.А.** Характеристики обнаружения пакета независимо функционирующих импульсов на фоне гауссовской помехи с неизвестной интенсивностью // Радиотехника и электроника. 1968. т 9. С. 1700–1701.
188. **Куликов Е.И.** Прикладной статистический анализ. — М.: Радио и связь, 2004. — 376 с.
189. **Swerling P.** Probability of detection for fluctuating targets // IRE Trans. 1960. V. IT-6, т 2. P. 269–308.
190. **Обработка** экспериментальных данных с использованием компьютера / Под ред. С. Минами; Пер. с япон. Ю.Н. Чернышова. — М.: Радио и связь, 1999. — 256 с.
191. **Helstrom C.W.** Statistical theory of signal detection. 2nd ed., revised and enlarged. — N.Y.: Pergamon press, 1968. 467 p.
192. **Poor V.H.** Robust matched filters // IEEE Trans. on information theory. 1983. Vol. IT-29, т5. P. 677–687.
193. **Кузнецов В.П.** Устойчивое обнаружение при неточно известном сигнале и спектре нормального шума // Радиотехника. 1976. Т. 31, т 3. С. 12–19.

Оглавление

Предисловие.....	3
Введение	5
Часть I. Обнаружение и различение сигналов (классическая версия)	
<i>Глава 1.</i> Проверка статистических гипотез при обнаружении (различении) сигналов	7
Задачи	19
<i>Глава 2.</i> Обнаружение полностью известных сигналов (дискретные процессы)	22
2.1. Обнаружение сигнала в белом шуме	22
2.2. Обобщенные согласованные фильтры	32
2.3. Применение алгоритмов обнаружения	37
2.4. Линейная модель сигнала	45
Задачи	47
<i>Глава 3.</i> Обнаружение полностью известных сигналов (непрерывные процессы).....	52
3.1. Обнаружение сигнала при аддитивном шуме на входе.....	52
3.2. Обнаружение сигнала при коррелированном шуме на входе.....	62
3.3. Характеристики обнаружения.....	67
Задачи	74
<i>Глава 4.</i> Обнаружение сигналов при наличии случайных (неизмеряемых) параметров	82
4.1. Методы обнаружения	82
4.2. Характеристики обнаружения.....	92
4.3. Характеристики обнаружителя.....	102
4.4. Учет коррелированности входного шума	105
Задачи	107
<i>Глава 5.</i> Последовательное обнаружение	111
5.1. Последовательные многошаговые алгоритмы проверки простой гипотезы против простой альтернативы	111

5.2. Последовательный алгоритм Вальда	113
5.3. Асимптотическая относительная эффективность ..	118
5.4. О длительности последовательного испытания ...	124
Задачи	137

Часть II. Обнаружение сигналов в условиях неопределенности

<i>Глава 6.</i> Обнаружение сигналов при неизвестных параметрах ..	139
Задачи	162
<i>Глава 7.</i> Обнаружение гармонического сигнала с неизвестными параметрами в гауссовском белом шуме	168
Задачи	175
<i>Глава 8.</i> Обнаружение сигналов при негауссовских помехах	176
8.1. Негауссовские распределения	176
8.2. Обнаружение детерминированных сигналов	179
8.3. Обнаружение детерминированных сигналов с неизвестными параметрами	188
Задачи	200
<i>Глава 9.</i> Непараметрические методы обнаружения сигналов	203
9.1. Статистики непараметрических алгоритмов обнаружения сигналов	203
9.2. Свойства знакового алгоритма обнаружения сигналов	221
9.3. Свойства обнаружителя Вилкоксона	235
9.4. Двухканальные системы обнаружения сигналов ...	243
9.5. Ранговые алгоритмы обнаружения стохастического сигнала	259
Задачи	268
Ответы к задачам	273
<i>Глава 10.</i> Адаптивный прием сигналов	280
10.1. Постановка задачи адаптивной фильтрации	280
10.2. Показатели качества адаптивных систем фильтрации	281
10.3. Адаптивная нелинейная оптимальная фильтрация при наличии постоянных параметров	286

Часть III. Обнаружение случайных сигналов

<i>Глава 11.</i> Обнаружение гауссовских сигналов на фоне гауссовского белого шума (непрерывные процессы)	305
<i>Глава 12.</i> Обнаружение случайных сигналов (дискретные процессы)	312

12.1. Энергетический приемник	312
12.2. Обобщение: сигнал коррелированный гауссовский случайный процесс	317
<i>Глава 13. Совместное обнаружение и фильтрация марковских сигналов</i>	<i>333</i>
13.1. Рекуррентная связь отношения правдоподобия и апостериорной плотности сигнала	333
13.2. Обнаружение и фильтрация марковского нормального сигнала на фоне аддитивной помехи с независимыми значениями	338
13.3. Связь функционала отношения правдоподобия с оценками сигнала по критерию минимума среднего квадрата ошибки	340
13.4. Метод порождающего процесса	342
13.5. Общие алгоритмы (непрерывное время)	344
13.6. Гауссовское приближение	352
13.7. Применение алгоритмов гауссовского приближения к задаче синтеза систем	356
<i>Глава 14. Обнаружители с постоянным уровнем ложной тревоги</i>	<i>370</i>
14.1. Классические модели обнаружителей	370
14.2. Обнаружители с постоянным уровнем ложной тревоги с релеевском распределении помех	376
14.3. ПУЛТ-процессоры с нерелеевским распределением помехи	391
14.4. Другие разновидности ПУЛТ-процессоров	398
14.5. Непараметрические ПУЛТ-процессоры	400
<i>Глава 15. Робастные методы фильтрации</i>	<i>403</i>
<i>Приложения</i>	<i>416</i>
1. Основные законы распределения вероятностей	416
2. Аналитический сигнал	434
3. Модели Сверлинга	444
4. Приближенные формулы для Q-функций Маркума ..	446
<i>Литература</i>	<i>449</i>

Адрес издательства в Интернет www.TECHBOOK.RU

Учебное издание

Шахтарин Борис Ильич
ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

Учебное пособие для вузов

3-е издание, исправленное

Компьютерная верстка Ю. Н. Чернышова
Обложка художника В. Г. Ситникова

Подписано в печать 23.03.2015. Формат 60×90/16 Усл. печ. л. 29. Тираж 500 экз. (2 завод. – 100 экз.)
ООО «Научно-техническое издательство «Горячая линия – Телеком»



Б. И. Шахтарин

ОБНАРУЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

Рассмотрены основы теории обнаружения сигналов и ее основные направления от классического подхода, включая последовательное обнаружение, до разделов, касающихся обнаружения сигналов при априорной неопределенности, включая непараметрическое обнаружение (знаковые обнаружители, обнаружители Вилкоксона, Манна–Уитли и др. с примерами АОЭ обнаружителей) и адаптивный прием. Приводятся алгоритмы обнаружения случайных сигналов на основе приемников Стратоновича–Сосулина и приемника Швеппе. Рассмотрены обнаружители с постоянным уровнем ложной тревоги и примеры робастных обнаружителей.

Для студентов старших курсов и аспирантов.

Сайт издательства:

www.techbook.ru

ISBN 978-5-9912-0395-1



9 785991 203951